
CÁLCULO DE LÍMITES.

Límite $x \rightarrow \infty$

Límite de un polinomio. Sustituimos solo en el monomio de mayor grado.

1. Calcula los siguientes límites.

VER VIDEO <https://youtu.be/Aww0iJ3oulw>

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 1 = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 1 = -\infty$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Por orden de infinitud.

EXPONENCIAL > POTENCIAL > LOGARÍTMICA
 $3^x > 2^x$ $x^3 > x^2$ $\log_3 x < \log_2 x$

2. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{e^x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{\ln x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^x}$

VER VIDEO <https://youtu.be/sbOuwXLFteU>

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = +\infty$

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = +\infty$$

Cociente de polinomios. Dividimos numerador y denominador entre la mayor potencia del denominador.

3. Calcula los siguientes límites.

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/ddHDqJA6L1g>

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty - 1}{1 + \frac{1}{\infty}} = +\infty$$

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

= 0

Otra forma. De cada polinomio nos quedamos solo con el monomio de mayor grado.

4. Calcula los siguientes límites.

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/ImJhd4lHHyI>

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Otra forma. Por orden de infinitud, comparando el grado del numerador y el denominador. Seguimos la siguiente tabla:

EXPONENCIAL	>	POTENCIAL	>	LOGARÍTMICA
$3^x > 2^x$		$x^3 > x^2$		$\log_3 x < \log_2 x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = \begin{cases} \text{grado numerador} < \text{grado del denominador} \\ k < p \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = 0 \\ \text{grado numerador} = \text{grado del denominador} \\ k = p \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = \frac{a}{a'} \\ \text{grado numerador} > \text{grado del denominador} \\ k > p \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \dots} = \frac{a}{a'} \cdot \infty \end{cases}$$

5. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/9MUs0FnYbDw>

En el ejemplo a \rightarrow grado numerador $>$ grado denominador

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{1}{1} \infty = +\infty$$

En el ejemplo b \rightarrow grado numerador = grado denominador

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

En el ejemplo c \rightarrow grado numerador $<$ grado denominador

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3} = 0$$

6. Calcula el límite siguiente de tres formas distintas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{3x + 1}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/RDwLUk9qlaY>

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} - \frac{x}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} - 1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{3x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2} - 1)x}{3x} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x}{3x + 1} = \frac{\infty}{\infty} (\text{ind.}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$$

Indeterminación $\infty - \infty$

Por orden de infinitud.

$$\begin{array}{l} \text{EXPONENCIAL} > \text{POTENCIAL} > \text{LOGARÍTMICA} \\ 3^x > 2^x & x^3 > x^2 & \log_3 x < \log_2 x \end{array}$$

7. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - x^2$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$

VER VIDEO <https://youtu.be/2ImfuyOZ8Xg>

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2 = \infty - \infty (\text{ind.}) = +\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - x^2 = \infty - \infty (\text{ind.}) = -\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x - x^2 = \infty - \infty (\text{ind.}) = +\infty$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \infty - \infty (\text{ind.}) = +\infty$

Si se puede restar, restamos.

8. Calcula el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x}$$

VER VIDEO <https://youtu.be/gy6heM7h1S4>

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x} &= \infty - \infty (\text{ind.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - (x-1) \cdot (x^2+1)}{(x-1) \cdot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - (x^3 + x - x^2 - 1)}{(x-1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - x + x^2 + 1}{(x-1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1 \end{aligned}$$

Si hay raíces se multiplica y divide por la expresión conjugada.

9. Calcula el siguiente límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

VER VIDEO <https://youtu.be/RuP12Z7IoZ8>

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) &= \infty - \infty \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{(\sqrt{x^2 - 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - 1} + x)}^{\text{Identidad notable.}}}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} = \frac{-1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Indeterminación 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^g = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} g \cdot (f-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{exponente} \cdot (\text{base}-1)}$$

10. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

VER VIDEO <https://youtu.be/F5WEGDwwDyM>

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1} &= 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \left(\frac{-1}{x+1}\right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} &= 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} \cdot \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x+1}\right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2-1}{x^2+x}} = e^{-1} \end{aligned}$$

Límite $x \rightarrow k, k \in \mathbb{R}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$.

11. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 - x}$

VER VIDEO <https://youtu.be/WA-iDKsfoLw>

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} \stackrel{\text{sacamos x factor común}}{\hat{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} \stackrel{\substack{\text{factorizamos} \\ \text{numerador y} \\ \text{denominador}}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

12. Calcula los siguientes límites.

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3 - 3x - 2}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/B81oiQ6upAA>

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} \stackrel{\substack{\text{factorizamos} \\ \text{numerador y} \\ \text{denominador}}}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)}{(x-1) \cdot (x-2)} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Numerador $(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Denominador $(x-1) \cdot (x-2)$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3 - 3x - 2} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 1)} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Denominador $(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 1)$

Caso $\frac{k}{0}$.

13. Calcula los siguientes límites.

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2}$$

VER VÍDEO <https://youtu.be/J-mJvc0kzCs>

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-}{-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-}{+} = -\infty \end{cases}$$

Indeterminación 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow k} f^g = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow k} (f-1)g}$$

14. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{4-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{4-x} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{x}{4-x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{2x-4}{4-x} \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(4-x)}} = e^{\frac{2}{2}} = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{2}{x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{2-x}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)}{(x-2) \cdot x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x}} \\ &= e^{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

15. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{x-1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}} &= \frac{0}{0} \text{ (ind.)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2) \cdot (x+2\sqrt{x})}{(x-2\sqrt{x}) \cdot (x+2\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[(\sqrt{x})^2 - 2^2] \cdot (x+2\sqrt{x})}{[x^2 - (2\sqrt{x})^2] \cdot (\sqrt{x}+2)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4) \cdot (x+2\sqrt{x})}{[x^2 - 4x] \cdot (\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4) \cdot (x+2\sqrt{x})}{x(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{4 + 4}{4 \cdot (2 + 2)} = \frac{1}{2}$$

16. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 1}$

VER VIDEO <https://youtu.be/qcMO8UWyCmI>

17. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$

VER VIDEO <https://youtu.be/7Lapw72vFiY>
