1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones y dibuja su gráfica.

   a) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<1 \\ \ln x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x<1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y clasificar sus discontinuidades, caso de que las haya.

   a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x} & \text{si} \quad x\neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{|x|} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

3. Hallar a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x-ax}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \\ x^2+b & \text{si} \quad x\leq 0 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

4. Determina los valores de a y de b para que $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+b & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \operatorname{sen}(ax) & \text{si} \quad 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \text{si} \quad \pi\leq x \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

5. Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} -2x+a & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x^2-ax+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ según los valores de a.

6. Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{(x^2-2)/x} & \text{si} \quad x<0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \\ 1-\ln x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

   a) ¿Existe algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua?

   b) Hallar el límite cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$ de la función.

7. Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio.

   a) $f(x)=\begin{cases} x^2+kx & \text{si} \quad x<3 \\ \ln(x-2) & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases} kx^2-3 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ e^{x^2-4} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

8. Calcula el valor de a y b para que $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\leq x<1 \\ 2 & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$ sea continua en todo su dominio.

9. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si} \quad 0\leq x<1 \\ 4+\ln x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases} e^{1-x^2} & \text{si} \quad x\leq -1 \\ \dfrac{-1}{x} & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$; c) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-4} & \text{si} \quad x\neq -2 \\ -\dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$

10. Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

    a) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$; b) $g(x)=\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$

11. Sabiendo que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$ es continua en $(-1, +\infty)$, halla el valor de a.

12. El rendimiento físico de un deportista, durante 60 minutos, varía con el tiempo según esta función:

$$f(t)=\begin{cases} -t(t-a) & \text{si} \quad 0\leq t<15 \\ 3,5t+5 & \text{si} \quad 15\leq t<30 \\ 100-bt & \text{si} \quad 30\leq t\leq 60 \end{cases}$$

Calcula a y b (valores exactos) para que la función rendimiento sea continua.

13. Sabemos que la función $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^3+bx^2+8x-4}$ es discontinua en $x=2$. Calcula b y estudia el comportamiento de la función en las proximidades de los puntos de discontinuidad.

14. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ con $a\neq 0$, calcula los valores de a y b para que la función pase por el punto $(2,3)$ y se cumpla que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-4$.

15. Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas. ¿Alguna es continua en todo $\mathbb{R}$?

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ \ln k & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ 2^k & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

16. Halla el valor de b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+b & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

17. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{e^x-1}-\dfrac{k}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$.

18. ¿Existe algún valor de k para el que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} & \text{si} \quad x<0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$?

19. Determina dónde son continuas las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x-2)}$; b) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-x-6}}$; c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$; d) $i(x)=\dfrac{1}{1-\cos^2 x}$

20. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} 3-mx^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ según los distintos valores de m.

21. Calcula el valor de a para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-a\operatorname{sen} x}{x^2}$ sea finito. Halla el límite para ese valor de a.

22. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{1}{2-|x|}$ y clasifica sus discontinuidades.

23. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

24. Halla el valor de t para que la función $f(x)=\begin{cases} |x-1|-t & \text{si} \quad x\le 2 \\ x-5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ sea continua en $x=2$. Represéntala en el caso $t=2$ y di qué tipo de discontinuidad tiene.

25. Estudia la continuidad en $x=0$ de la función $f(x)=2x+\dfrac{|x|}{x}$. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

26. Se define la función f del modo siguiente: $f(x)=\begin{cases} \ln x-1 & \text{si} \quad x>1 \\ 2x^2+ax+b & \text{si} \quad x\le 1 \end{cases}$. Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

27. Al estudiar el tamaño de una bacteria, los investigadores han comprobado que su diámetro (en micras) varía con el tiempo según esta función:

$$D(t)=\begin{cases} \sqrt{t+a} & \text{si} \quad t<8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3+\sqrt{3t-15}}{t-8} & \text{si} \quad t>8 \text{ horas} \end{cases}$$

a) Analiza si es posible encontrar un valor de a para el cual el crecimiento se mantenga continuo.
b) Estudia cuál será el diámetro de una bacteria si la observamos al cabo de varias semanas.

28. El precio de compra de un producto varía según el número de unidades encargadas y esto queda reflejado en la siguiente función:

$$C(x)=\begin{cases} 5x & \text{si} \quad 0<x\le 10 \\ \sqrt{ax^2+500} & \text{si} \quad x>10 \end{cases}$$

a) Halla a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compra un número muy grande de unidades?

29. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{4} & \text{si} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si} \quad \dfrac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$ observamos que f está definida en $[0,1]$ y que verifica $f(0)=-1<0$ y $f(1)=e^{-1}>0$, pero no existe ningún $c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

30. Utiliza el teorema de Bolzano para demostrar que las gráficas de $f(x)=x^3+x^2$ y $g(x)=3+\cos x$ se cortan en algún punto.

31. Sea la función $f(x)=x^2+1$. ¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo $[1,5]$? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

32. Si $f(x)$ es continua en $[1,9]$, $f(1)=-5$ y $f(9)>0$, ¿podemos asegurar que la función $g(x)=f(x)+3$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1,9]$?

33. De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado $[0,\,1]$ y que para $0<x\le 1$ es $g(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$ ¿Cuánto vale $g(0)$?

34. Estudia los valores que pueden tomar a y b para que la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2-2x}$ tenga una discontinuidad evitable.

35. Determina a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-x-a}{b\,\mathrm{sen}\,x^2} & \text{si} \quad x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x=0\end{cases}$ sea continua en $x=0$.

36. Dada la función $f(x)=\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi x}{4}$, demuestra que existe un $c\in(0,\,4)$ tal que $f(c)=f(c+1)$.

37. Sea la función $f(x)=x+e^{-x}$. Demuestra que existe algún número real c tal que $c+e^{-c}=4$.

38. Dada la función $f(x)=e^{-x^2}$, comprueba que existe un número real c para el cual la función toma el valor $\dfrac{1}{2}$.

39. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, ¿se puede asegurar que no existe ningún punto en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{3},\,\dfrac{1}{2}\right]$ en el que la función tome el valor 1?

40. ***Teorema del punto fijo***: sea f una función continua en el intervalo $[a,\,b]$ verificando que para cualquier punto x del intervalo $[a,\,b]$, su imagen pertenece también al intervalo $[a,\,b]$. Demostrar que existe un punto c de dicho intervalo donde $f(c)=c$.

Importante.

Antes de mirar las soluciones que se encuentran a partir de la página siguiente, es conveniente intentar hacer cada uno de los ejercicios hasta el final. Se recomienda también comprobar las representaciones gráficas que se proponen en algunos ejercicios con la aplicación desmos: https://www.desmos.com/calculator. Aunque no se pide en la mayoría de los ejercicios, la visualización gráfica de las funciones usando la aplicación anterior es de gran utilidad para comprender completamente cada uno de ellos.

Soluciones

1. a) f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x=1$, en el que hay una discontinuidad de salto finito.

   b) f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x=0$, punto en el que hay una discontinuidad de salto infinito o asintótica.

2. a) f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x=0$ (donde hay una discontinuidad de salto infinito o asintótica), y en $x=-2$ (en el que hay una discontinuidad evitable).

   b) f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x=0$, donde hay una discontinuidad de salto finito.

3. $a=1$, $b=0$.

4. $a=\dfrac{1}{2}$, $b=0$.

5. Si $a=4$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$. Si $a\neq 4$, $f(x)$ no es continua en $x=1$ (hay una discontinuidad de salto finito).

6. a) No. b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

7. a) $k=-3$. b) $k=1$.

8. $a=3$, $b=-1$.

9. a) f es continua en todo $\mathbb{R}$.

   b) f es continua en todo $\mathbb{R}-\{0\}$.

   c) f es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x=2$, en el que hay una discontinuidad asintótica o de salto infinito.

10. a) f es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x=-1$, en el que hay una discontinuidad asintótica o de salto infinito; y en $x=2$, en el que hay una discontinuidad evitable.

    b) f es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en $x=-2$, en el que hay una discontinuidad asintótica o de salto infinito; y en $x=3$, en el que hay una discontinuidad evitable.

11. $a=3$.

12. $a=\dfrac{113}{6}$, $b=-\dfrac{1}{3}$.

13. La función no es continua en $x=2$ si $b=-5$. Para este valor de b, f tampoco es continua en $x=1$. Tanto en $x=2$ como en $x=1$ hay discontinuidades inevitables de carácter asintótico. Es decir, en las cercanías de $x=2$ y de $x=1$, la función presenta ramas infinitas. De hecho, $x=2$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

14. $a=4$, $b=-10$.

15. a) $k=e^3$. b) $k=-1$.

16. $b=\dfrac{1}{2}$.

17. $k=2$.

18. No existe ningún valor de k para el que f sea continua en $x=0$. En este punto, sea quien sea k, siempre hay una discontinuidad de salto finito.

19. a) f es continua en $(2,+\infty)-\{3\}$, o lo que es lo mismo, en $(2,3)\cup(3,+\infty)$.

    b) g es continua en el intervalo $(2,+\infty)$.

    c) h es continua en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

    d) i es continua en $\mathbb{R}-\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.

20. f es continua si $m=1$ o $m=2$. Ahora bien, si $m\neq 1$ y $m\neq 2$, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x=1$, punto en el que se presenta una discontinuidad de salto finito.
21. Para que el límite sea finito debe ser $a=1$. Para este valor de a se tiene que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^2}=0$.
22. f es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en los puntos $x=-2$ y $x=2$, puntos en los que hay sendas discontinuidades inevitables de salto infinito o asintóticas. De hecho, las rectas $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales de f.
23. f es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en el punto $x=1$, en el que hay una discontinuidad de salto finito.
24. Para que f sea continua en $x=2$ ha de ser $t=4$. Si $t=2$, f presenta una discontinuidad de salto finito en $x=2$.
25. f no es continua en $x=0$. En este punto la función presenta una discontinuidad de salto finito.
26. $a=-3$, $b=0$.
27. a) Para que el crecimiento se mantenga continuo ha de ser $a=-31/4$.
    b) El diámetro de la bacteria al cabo de varias semanas tiende a cero, es decir, la bacteria tiende a desaparecer.
28. a) $a=20$. b) El precio de una unidad tiende a $\sqrt{20}\cong 4,47$ euros.
29. No se contradice el teorema de Bolzano porque f no es continua en $x=1/2$ (¡compruébese!).
30. La respuesta a este ejercicio es bastante abierta y admite distintas soluciones válidas. Por ejemplo, puesto que $f(0)<g(0)$ y $f(\pi)>g(\pi)$, seguro que las gráficas se cortan en un punto c del intervalo $(0,\pi)$.
31. Puesto que f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica, $f(0)=1$ y $f(2)=5$, el teorema de los valores intermedios asegura que f tomará todos los valores comprendidos entre $f(0)$ y $f(2)$, es decir todos los valores del intervalo $[1,5]$. De hecho, como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, se tiene que $\operatorname{Im} f=[1,+\infty)$, es decir, f toma todos los valores mayores que 1.
32. La función g sí que tiene algún cero en el intervalo $[1,9]$, ya que es continua (es suma de continuas) y además es fácil comprobar que $g(1)<0$ y $g(9)>0$. Ahora basta aplicar el teorema de Bolzano.
33. $g(0)=1$.
34. Si $b=0$ y a es cualquier número real, entonces f presenta una discontinuidad evitable en $x=0$.
    Si $b\neq 0$, la función sólo puede tener una discontinuidad evitable en $x=2$, y esto ocurre además solamente cuando $a=-b/2$.
35. Para que f sea continua en $x=0$ debe de ser $a=1$ y $b=1$.
36. Basta aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,4]$ a la función $g(x)=f(x+1)-f(x)$.
37. Basta aplicar el teorema de Bolzano en, por ejemplo, el intervalo $[3,5]$ a la función $g(x)=x+e^{-x}-4$.
38. f es continua en todo $\mathbb{R}$. Puesto que $f(0)=1$ y $f(1)=1/e$, por el teorema de los valores intermedios la función toma, en el intervalo $[0,1]$, todos los valores comprendidos entre $1/e$ y 1. En particular, como $1/e<1/2<1$, existe $c\in(0,1)$ tal que $f(c)=1/2$.
39. No se puede asegurar que no exista ningún punto del intervalo $[-1/3,1/2]$ en el que la función valga 1 pues en este intervalo no se cumple alguna de las hipótesis del teorema de los valores intermedios. Aunque eso no significa que exista tal punto. De hecho, $f(0)=1$.
40. Se trata de un ejercicio teórico. Una pista para resolverlo es usar una función auxiliar g definida en el intervalo $[a,b]$ de la siguiente forma: $g(x)=f(x)-x$.