Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 kg de café tipo C y 800 kg de café tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de 2 partes de café de tipo C y una parte de café de tipo K y en la que gana 2,2 euros por kg; y la de tipo B con una parte de café tipo C y dos partes de café tipo K y en la que gana 2,6 euros por kg.

Halla la cantidad de mezcla que la casa empacadora debe hacer de cada tipo para que la ganancia sea máxima.

En este tipo de ejercicios es conveniente hacer un cuadro donde se vean todos los datos de que se disponen y que nos permiten escribir las restricciones y la función objetivo. Sean $\begin{cases} x = \text{kilos de mezcla A} \\ y = \text{kilos de mezcla B} \end{cases}$ entonces:

Factores \ Productos	A	B	Recursos
C	$\frac{2}{3}x$	$\frac{1}{3}y$	700
K	$\frac{1}{3}x$	$\frac{2}{3}y$	800
Productos	x	y	
Beneficios	$2{,}2\,x$	$2{,}6\,y$	

Las restricciones son:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \le 700 \to 2x + y \le 2100$$
$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \le 800 \to x + 2y \le 2400$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

Queremos que el beneficio sea máximo, por tanto la función objetivo es: $z = 2{,}2x + 2{,}6y$ Máx.

Hallamos la región factible:

Tenemos una región factible ACOTADA, y los vértices son los puntos:

$A\,(0,0)$, $B\,(1050,0)$, $C\,(600,900)$, $D\,(0,1200)$.

El siguiente paso es ver qué valores toma la función objetivo en cada uno de los vértices, para saber donde es óptima (máxima):

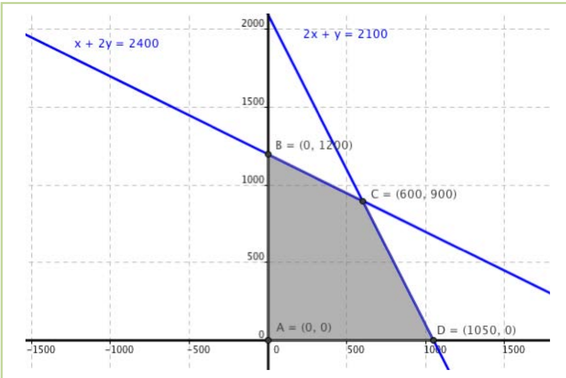
$A: z = 2{,}2 \cdot 0 + 2{,}6 \cdot 0 = 0$

$B: z = 2{,}2 \cdot 1050 + 2{,}6 \cdot 0 = 2310$

$C: z = 2{,}2 \cdot 600 + 2{,}6 \cdot 900 = \mathbf{3660}$ es el máximo

$D: z = 2{,}2 \cdot 0 + 2{,}6 \cdot 1200 = 3120$

Por tanto deben producirse 600 kg de la mezcla tipo A y 900 kg de la de tipo B para que el beneficio sea máximo e igual a 3660 euros.



Problemas de dietas

Son típicos problemas de programación lineal en los que lo que se quiere es preparar una dieta (mezcla) que reúna una serie de condiciones a partir de unos productos determinados que se encuentran en el mercado. Se trata de saber que cantidades (x e y) debemos mezclar de dichos productos.

Actividad resuelta

Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de 24 unidades del pienso A y un mínimo de 25 unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos C_1 y C_2, elaborados con ambos piensos. El paquete de C_1 contiene 1 unidad de A y 5 de B, siendo su precio de 1 euro, y el de C_2 contiene 4 unidades de A y 1 de B, siendo su precio 3 euros.

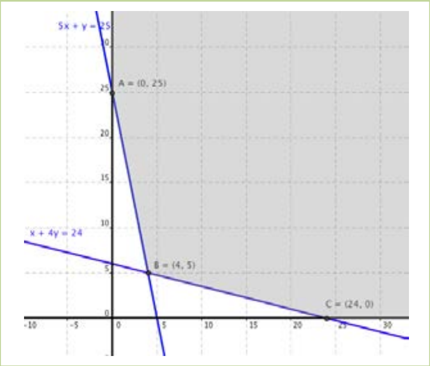
¿Qué cantidades de C_1 y C_2 deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?

Piensos \ Mercado	C_1	C_2	Unidades
A	1	4	24
B	5	1	25
Cantidad	x	y	
Coste	$1 \cdot x$	$3 \cdot y$	

Función Objetivo: $z = x + 3y$ debe ser mínima.

Restricciones: $\begin{cases} x + 4y \ge 24 \\ 5x + y \ge 25 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Hallamos la región factible:



Se trata de una región factible no acotada.
Determinamos con exactitud los vértices:

$$A:\begin{cases} x=0 \\ 5x+y=25 \end{cases} \rightarrow A:(0,25) \quad B:\begin{cases} x+4y=24 \\ 5x+y=25 \end{cases} \rightarrow B:(4,5)$$

$$C:\begin{cases} y=0 \\ x+4y=24 \end{cases} \rightarrow C:(24,0)$$

Hallamos el valor que toma la función objetivo en cada uno de los vértices:

$z = x + 3y \quad z_A = 0+3\cdot 25 = 75 \quad z_B = 4+3\cdot 5 = 19 \quad z_C = 24+3\cdot 0 = 24$

El óptimo, en este caso mínimo, se encuentra en el vértice *B*, por lo que se deben mezclar 4 paquetes de C_1 y 5 paquetes de C_2, con un coste de 19 euros.

Problemas de transporte

En estos casos se trata de resolver problemas de logística, es decir, transportar mercancías desde varios orígenes (ofertas o disponibilidades) hasta varios destinos (demandas o necesidades), con un coste mínimo, teniendo en cuenta las cantidades de que se dispone en los orígenes y las cantidades demandadas en los destinos, así como el coste de transporte entre cada origen y cada destino.

Actividad resuelta

- *Para abastecer de madera a tres aserraderos A_1, A_2 y A_3, hay dos bosques B_1 y B_2, que producen 26 y 30 toneladas respectivamente. Las necesidades de cada aserradero son 20, 22 y 14 toneladas respectivamente. Si los precios de coste de transporte por tonelada de los bosques a los aserraderos son en euros los que se indican en la tabla adjunta, proponer el transporte con el precio mínimo.*

	A_1	A_2	A_3
B_1	10	30	10
B_2	20	10	10

Tenemos dos orígenes que son los bosques B_1 y B_2 con sus ofertas (26 y 30 toneladas respectivamente) y tres destinos que son los aserraderos A_1, A_2 y A_3 con sus demandas.

La mayor dificultad consiste en manejar correctamente la información y plantear adecuadamente todo en función de las incógnitas elegidas. Sean:

$$\begin{cases} x = \text{toneladas de madera desde } B_1 \text{ a } A_1 \\ y = \text{toneladas de madera desde } B_1 \text{ a } A_2 \end{cases}$$

Con ellas, las expresiones correspondientes a las toneladas desplazadas entre los demás bosques y aserraderos se recogen en la siguiente tabla:

Destinos / Orígenes	A_1	A_2	A_3	Ofertas
B_1	x	y	$26-(x+y)$	26
B_2	$20-x$	$22-y$	$14-[26-(x+y)]$	30
Demandas	20	22	14	
Costes	$10x+20(20-x)$	$30y+10(22-y)$	$10[26-(x+y)]+10(-12+x+y)$	z

La función objetivo viene dada por la suma de todos los costes y ha de ser mínima:

$$z = 10x+20(20-x)+30y+10(22-y)+10[26-(x+y)]+10(-12+x+y) = -10x+20y+760$$

$$z = -10x+20y+760$$

Las restricciones son las que se deducen de tener en cuenta que todas las cantidades transportadas deben ser mayores o iguales a cero:

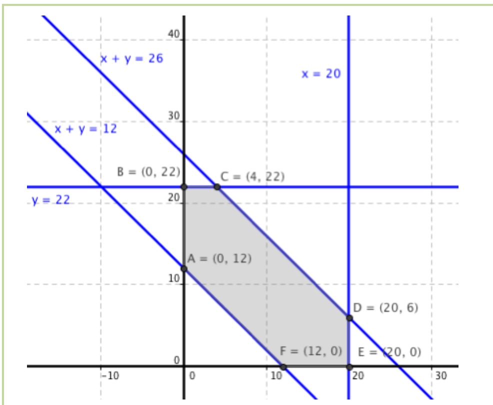
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 26-(x+y) \geq 0 \rightarrow x+y \leq 26 \\ 20-x \geq 0 \rightarrow x \leq 20 \\ 22-y \geq 0 \rightarrow y \leq 22 \\ -12+x+y \geq 0 \rightarrow x+y \geq 12 \end{cases}$$

Por tanto, el problema queda planteado como:

$$\text{f.o. } f(x,y) = -10\cdot x + 20\cdot y + 760 = \text{mín}$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x+y \leq 26 \\ x+y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 22 \end{cases}$$

Construimos la región factible:



Determinamos exactamente los vértices:

$A\,(12,0)$; $B\,(20,0)$; $C\,(20,6)$; $D\,(4,22)$; $E\,(0,22)$; $F\,(0,12)$

Hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$z_A = -10\cdot 12 + 20\cdot 0 + 760 = 640$

$z_B = -10\cdot 20 + 20\cdot 0 + 760 = \mathbf{560}$

$z_C = -10\cdot 20 + 20\cdot 6 + 760 = 680$

$z_D = -10\cdot 4 + 20\cdot 22 + 760 = 1160$

$z_E = -10\cdot 0 + 20\cdot 22 + 760 = 1200$

$z_F = -10\cdot 0 + 20\cdot 12 + 760 = 1000$

Por tanto, desde el bosque B_1 se deben llevar 20 toneladas al aserradero A_1, ninguna al A_2 y 6 toneladas al A_3 y desde el bosque B_2 se transportarán 22 toneladas al aserradero A_2 y 8 al A_3.

El coste de transporte será de 560 euros.