

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	1 kg	1,5 kg
B	1,5 kg	1 kg

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.
- Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.
- Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

A 3 (hasta 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos tales que, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

- La probabilidad de que ocurra el suceso A , condicionada a que se ha producido el suceso B .
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
- La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B .
- La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

A 4 (hasta 2 puntos)

En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

- Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.
- Interpretar los resultados obtenidos.

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

- Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
- Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

B 2 (hasta 3 puntos)

- Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto $(0, 0)$, y tiene un máximo en el punto $(1, 1)$.
- Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas OX.

B 3 (hasta 2 puntos)

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

B 4 (hasta 2 puntos)

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

- Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.
- ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

OPCIÓN A

A 1 Problema de programación lineal con dos variables.

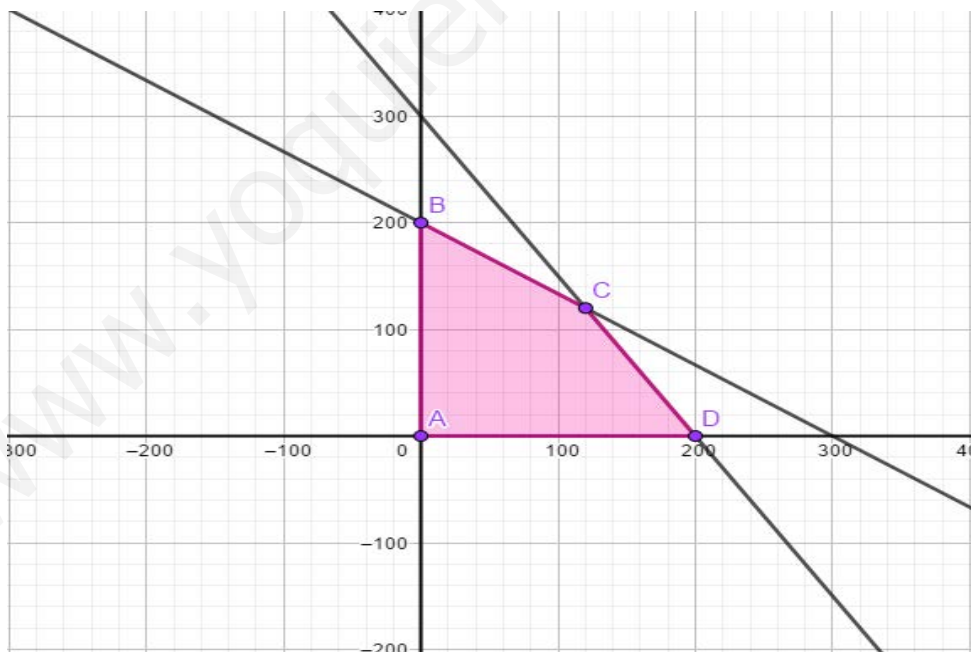
	Masa	Chocolate	Precio (€)	¿Cuánto?
A	1 kg	1,5 kg	24€	x
B	1,5 kg	1 kg	30€	y

✚ Maximizar la función objetivo $f(x, y) = 24x + 30y$,

✚ Teniendo las siguientes restricciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 1,5y &\leq 300 \\ 1,5x + y &\leq 300 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

✚ En el plano XY la región factible es:



✚ Los vértices son: $A(0, 0)$, $B(0, 200)$, $C(120, 120)$, eta $D(200, 0)$.

✚ **El máximo** de la función está en el punto $C(120, 120)$, siendo el valor de la función en ese punto $f(120, 120) = 6480$.

Por lo tanto, para conseguir **el ingreso máximo se deberían hacer 120 tartas de cada tipo.**

A 2 Problema de análisis de una función. Cálculo de máximos, mínimos, puntos de inflexión y representación gráfica.

a) Estudiamos el signo de la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

	0	2	4
$(x-1)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$(x-1)(x-3)$	+	-	+

Por lo tanto, es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 3)$

b) Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión

▪ Máximos y mínimos relativos

✓ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$ puntos singulares

✓ $f''(x) = 6x - 12$

$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$; $f(1) = 4 \rightarrow (1, 4)$ **Máximo relativo**

$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$; $f(3) = 0 \rightarrow (3, 0)$ **Mínimo relativo**

▪ Puntos de inflexión:

✓ $f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

✓ $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$. Entonces, $x = 2$

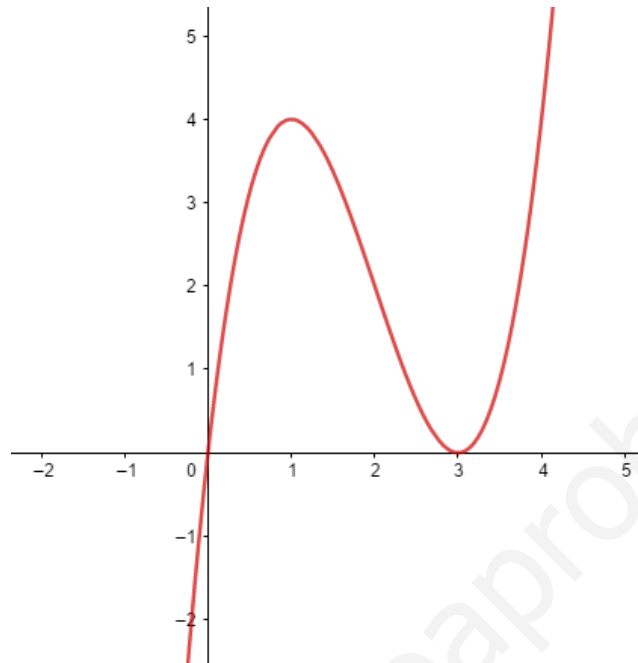
$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow (2, 2)$ **Punto de inflexión**

c) Puntos de corte de la curva y el eje OX:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, x = 3 \Rightarrow$$

los puntos $(0, 0)$ y $(3, 0)$ son los puntos de corte de la curva con el eje OX.

- Representación gráfica:

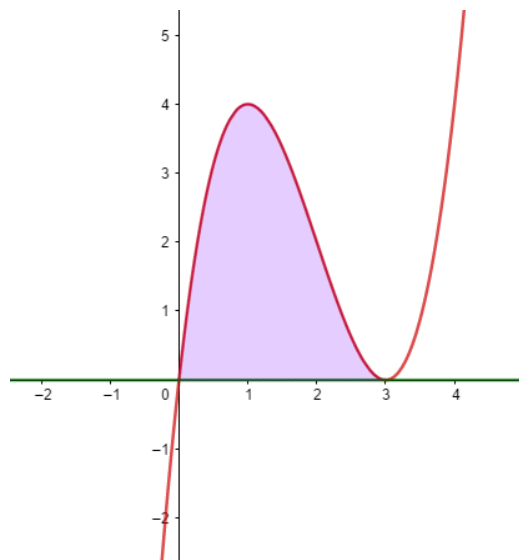


- d) Área de la superficie comprendida entre la curva y el eje de abscisas:

$$A = \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 9x) - 0] dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + 9 \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{4} u^2$$

Esto es: $A = \frac{27}{4} u^2$



A 3 Problema de cálculo de probabilidades que puede resolverse con tabla de contingencia y probabilidades condicionadas.

Datos: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

a) Probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B , es decir, $P(A|B)$:

- $P(A \cap B)$?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

- Entonces, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{1}{4}$

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos: $P(\bar{A} \cap \bar{B})$:

- Formamos la tabla de contingencia o doble entrada, sabiendo $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

	A	\bar{A}	
B	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
\bar{B}	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

En la tabla vemos: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$

- **Otra forma:**

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B : $P(A \cap \bar{B})$.

- En la tabla vemos: $P(A \cap \bar{B}) = \frac{5}{12}$

- **Otra forma:**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

d) La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos, esto es,

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B).$$

- En la tabla vemos: $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$
- Otra forma:

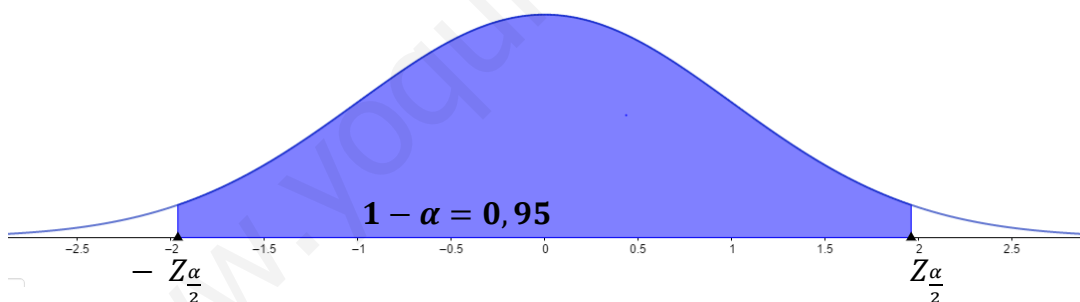
$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) &= 1 - [P(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup P(A \cap B)] = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

A 4 Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y del error.

a) Estimar el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte:

- El tamaño de la muestra es $n = 500$
- $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$ proporción de aficionados de la muestra.
- $\hat{q} = 1 - 0,7 = 0,3$

✚ Intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 95 %:



- Nivel de confianza: $n_c = 0,95$

$$n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$\left\{ \begin{aligned} P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) &= 0,025 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,025 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \end{aligned} \right.$$

- Intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

$$\left(0,7 - 1,96 \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}}, 0,7 + 1,96 \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} \right) = (0,7 - 0,04 ; 0,7 + 0,04) =$$

$$= (0,66 ; 0,74)$$

Por lo tanto, el porcentaje de personas de la población aficionadas al deporte está entre el 66 % y el 74 % con un nivel de confianza del 95 %.

✚ Error máximo con un nivel de confianza del 95 %.

El error máximo para la proporción es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es,

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$e_m = 1,96 \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} = 0,04, \text{ es decir, el } 4\%.$$

b) Explicación de los resultados obtenidos:

Se puede decir con un nivel de confianza del 95 %, que el porcentaje de la población que es aficionada al deporte en esa población es mayor que el 66 % y menor que el 74 %, lo que supone un error máximo del 4 %.

OPCIÓN B

B 1 Problema de cálculo matricial. Sistema matricial.

a) Determinar $(I + B)^{-1}$

✚ A la matriz $I + B$ le llamamos D :

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = D$$

$$\text{✚ } (I + B)^{-1} = D^{-1} = \frac{1}{|D|} (\text{Adj } D)^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Calcular las matrices X e Y que verifican:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

$$\text{✚ } \begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \Rightarrow Y + BY = C \Rightarrow IY + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DY = C \Rightarrow D^{-1}DY = D^{-1}C \Rightarrow Y = D^{-1}C$$

✚ Por lo tanto:

$$Y = D^{-1}C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

✚ Para determinar X :

$$AX = Y \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \Rightarrow X = A^{-1}Y$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

B 2 Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas.

a) Determinar a, b, c siendo $f(x) = ax^2 + bx + c$

- La función pasa por el punto $(0, 0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Por lo tanto: $f(x) = ax^2 + bx$

- Máximo relativo en el punto $(1, 1) \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = 2a + b = 0 \\ \blacksquare \text{Es un punto de la función} \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = a + b = 1 \end{array} \right.$$

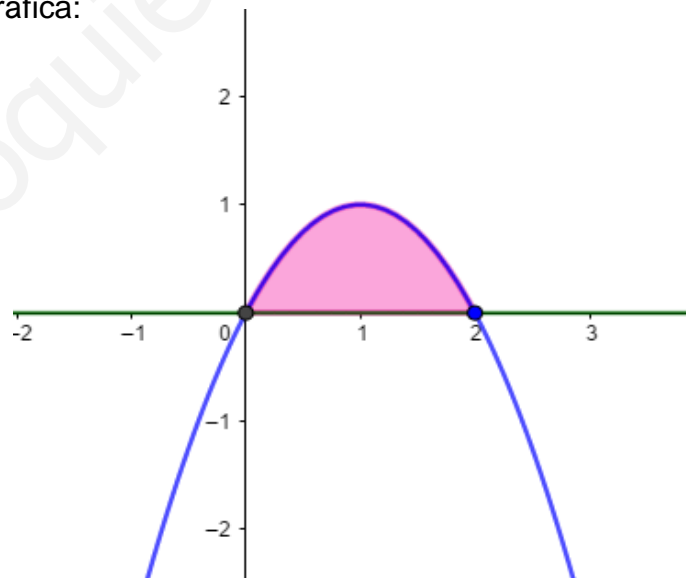
Por lo tanto: $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ y } b = 2$ Esto es, $f(x) = -x^2 + 2x$

b) La superficie del recinto determinado por la función y el eje de abscisas OX:

✚ Determinamos los puntos de corte entre la curva y el eje OX:

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow (0, 0) \text{ y } (2, 0) \text{ puntos de corte}$$

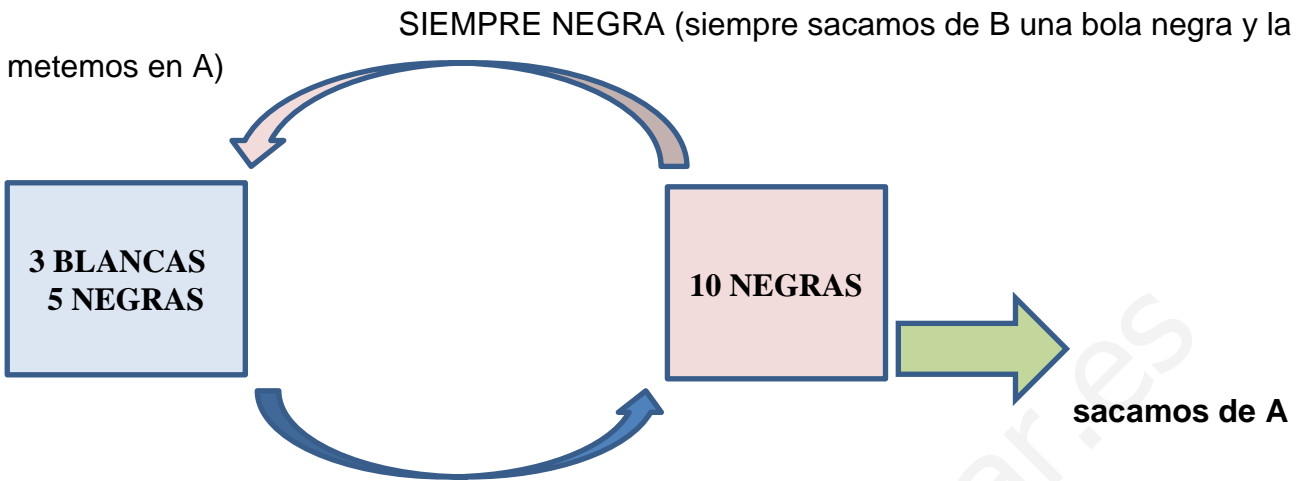
✚ Representación gráfica:



✚ Para determinar el área calculamos la integral definida:

$$A = \int_0^2 [-x^2 + 2x] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

B 3 Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol (o a través de la fórmula de la probabilidad total)



Sacamos de A N_A o B_A , esto es, N_A = sacamos una bola negra de A y la metemos en B

B_A = sacamos una bola blanca de A y la metemos en B

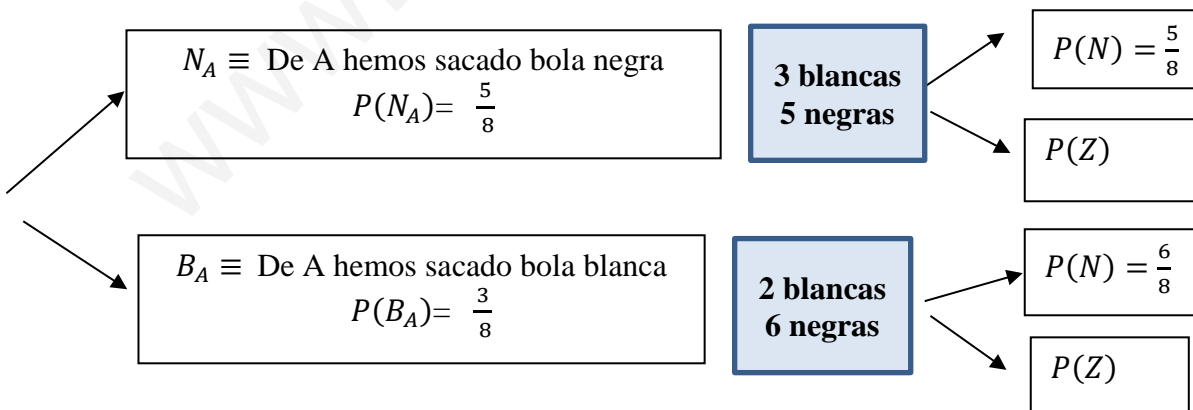
Calculamos la probabilidad de extraer una bola negra $\equiv P(N)$

✚ **Un modo:** Probabilidad Total:

$$P(N) = P(N_A) \cdot P(N | N_A) + P(B_A) \cdot P(N | B_A)$$

$$\Rightarrow P(N) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{43}{64} = 0,672, \text{ esto es } 67,2 \%$$

✚ **Otro modo:** A través de un diagrama de árbol:



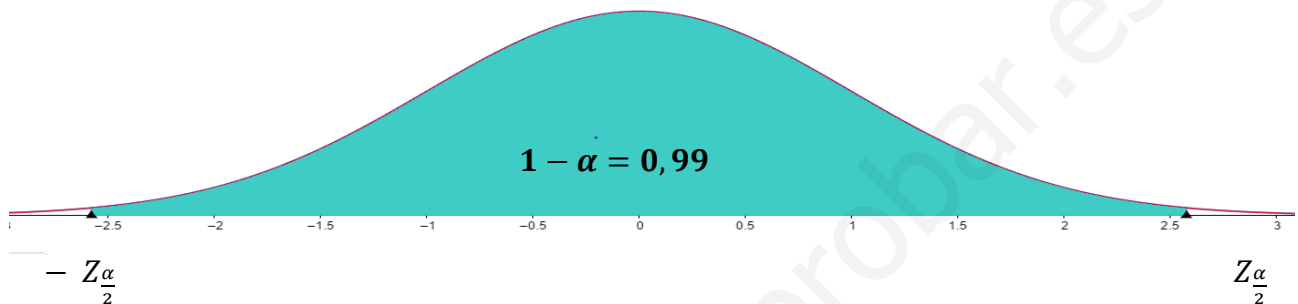
$$\Rightarrow P(N) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{43}{64} = 0,672$$

B 4. Cálculo del intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal. Tamaño de la muestra.

Los datos son:

- La media aritmética de la población μ y la desviación típica $\sigma = 75$
- El tamaño de la muestra es: $n = 100$
- La media de la muestra es: $\bar{x} = 250$

a) Para la media del gasto el intervalo de confianza del 99 %:



- El nivel de confianza es: $n_c = 0,99$

$$n_c = 0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,005 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,005 \Rightarrow \\ \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575 \end{array} \right.$$

- El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow \left(250 - 2,575 \frac{75}{\sqrt{100}} ; 250 + 2,575 \frac{75}{\sqrt{100}} \right) = (250 - 19,3125 ; 250 + 19,3125)$$

$$\Rightarrow (230,6875 ; 269,3125)$$

b) El tamaño de la muestra con un nivel de confianza del 99 % para que el error máximo sea de 10 euros:

El error máximo para la media es: $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, esto es, la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 2,575 \frac{75}{10} = 19,3125 \Rightarrow n = 372,97 \Rightarrow n = 373$$

Por lo tanto, **se tendría que tomar una muestra de 373 personas.**