

A 1 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

A 2 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

- [[0,75 puntos]]** Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, -5)$.
- [[0,75 puntos]]** Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.
- [[1 punto]]** Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

A 3 *[[hasta 2,5 puntos]]*

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

- [[1 punto]]** Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?
- [[0,75 puntos]]** ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?
- [[0,75 puntos]]** Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

A 4 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.

Se elige un estudiante al azar. Calcula:

- [[1 punto]]** La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
- [[0,75 puntos]]** La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.
- [[0,75 puntos]]** Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de "sobresaliente", ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

B 1 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- [[1,25 puntos]]** Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.
- [[0,75 puntos]]** ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?
- [[0,5 puntos]]** Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \quad y \quad A^t \cdot B$$

B 2 *[[hasta 2,5 puntos]]*

- [[0,5 puntos]]** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.
- [[0,75 puntos]]** Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- [[1,25 puntos]]** Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

B 3 *[[hasta 2,5 puntos]]*

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

- [[1,5 puntos]]** Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?
- [[1 punto]]** Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

B 4 *[[hasta 2,5 puntos]]*

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

- [[1 punto]]** Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?
- [[0,75 puntos]]** Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?
- [[0,75 puntos]]** ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

SOLUCIONES

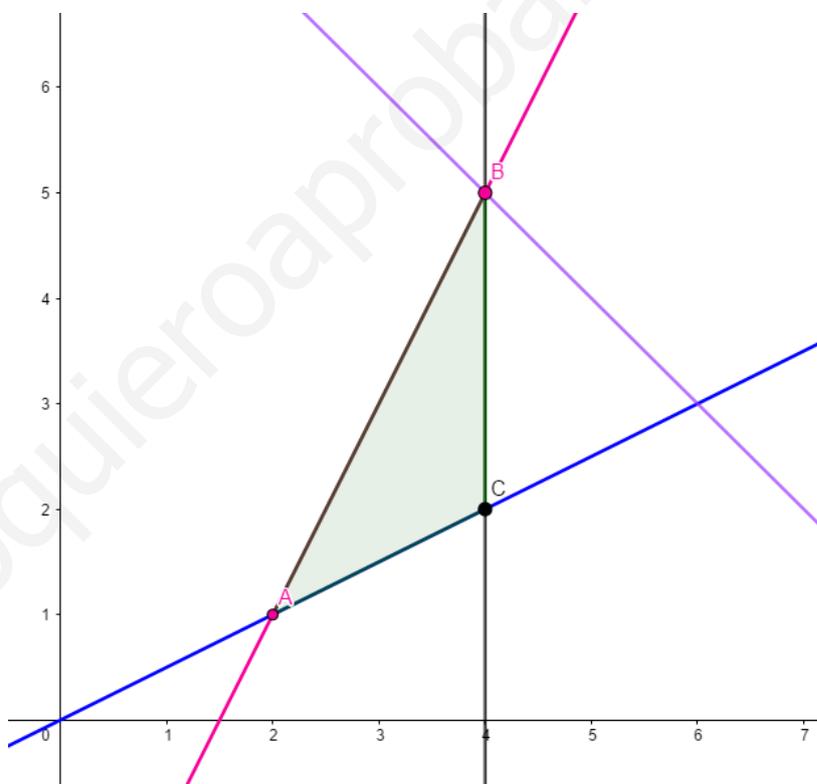
A 1 Problema de programación lineal con dos variables:

✚ La función objetivo a maximizar es: $F(x, y) = 5x + 4y$

✚ Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

✚ En el plano XY la región factible es:



✚ Por lo tanto, los vértices son:

$A(2,1)$, $B(4,5)$ y $C(4,2)$.

✚ $F(A) = F(2,1) = 14$

$$F(B) = F(4,5) = 40$$

$$F(C) = F(4,2) = 28$$

Por lo tanto, el máximo de la función se consigue en el punto $B(4,5)$, y el valor máximo es 40.

A 2 Representación gráfica de una función. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con otra función.

a) Encontrar los parámetros a y b , $f(x) = ax^3 + bx + 1$

✚ En el punto $(1, -5)$ hay un extremo relativo $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = -5 & (1) \\ f'(1) = 0 & (2) \end{cases}$

✚ $f'(x) = 3ax^2 + b$

✚ (1) $f(1) = -5 \Rightarrow a + b + 1 = -5 \Rightarrow a + b = -6$

✚ (2) $f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

✚ Por lo tanto: $\begin{cases} a + b = -6 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -9 \Rightarrow f(x) = 3x^3 - 9x + 1$

b) Determinar los puntos singulares de $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

✚ Máximos y mínimos relativos $\Rightarrow f'(x) = 0$

▪ $f'(x) = 6x^2 - 6$

$\Rightarrow f'(x) = 0 = 6x^2 - 6 \Rightarrow$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

▪ $f''(x) = 12x$

$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ mínimo} \\ f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow x = -1 \text{ máximo} \end{cases}$

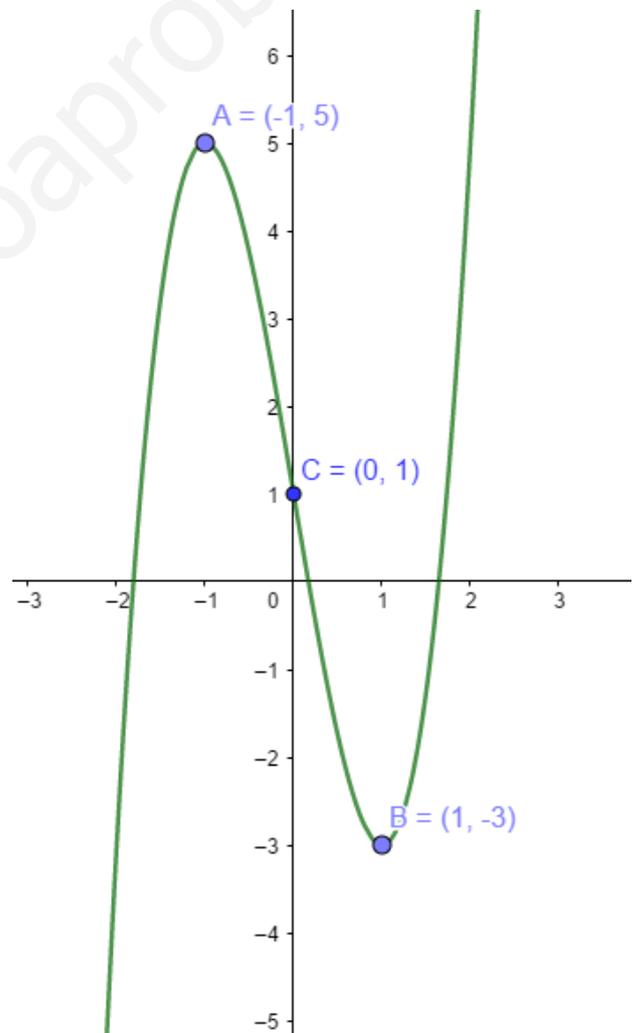
▪ $f(1) = -3 \Rightarrow (1, -3)$ **mínimo**

▪ $f(-1) = 5 \Rightarrow (-1, 5)$ **máximo**

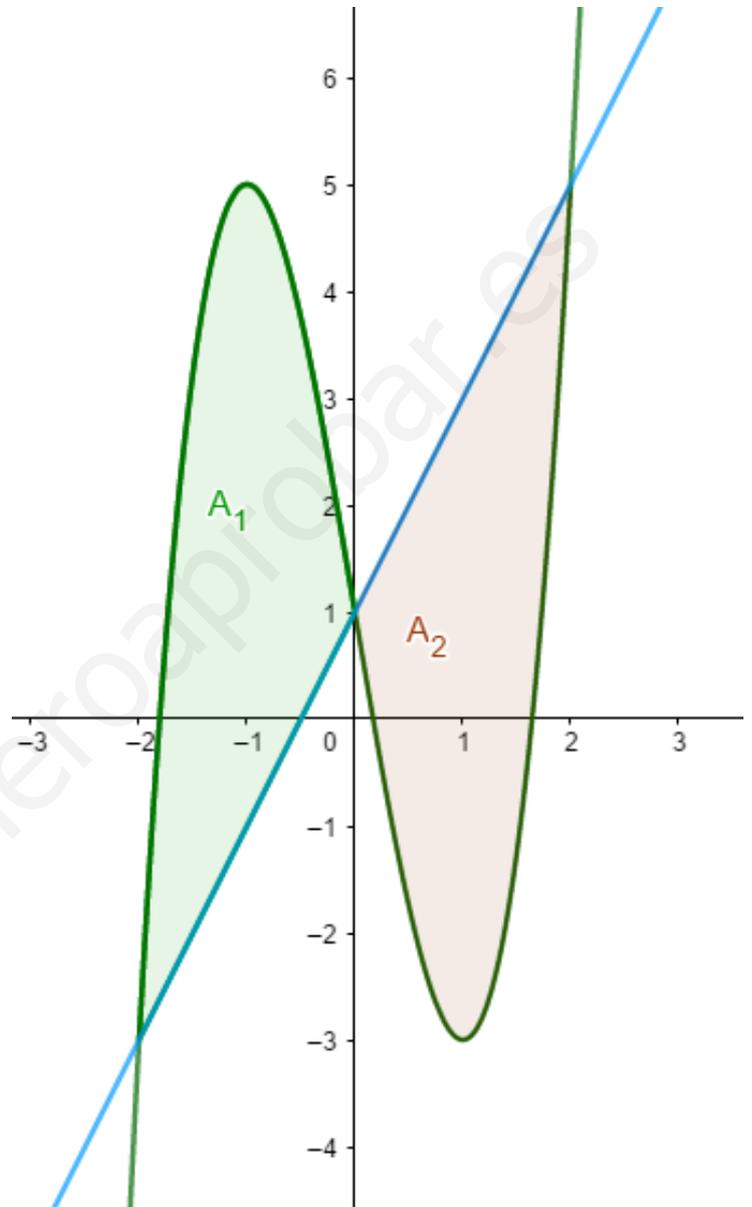
✚ Puntos de inflexión $\Rightarrow f''(x) = 0$

▪ $f''(x) = 12x \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$

▪ $f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ **punto de inflexión**



c) Área delimitada por $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ y $y = 2x + 1$



$f(x)$ es simétrico respecto de la recta
entonces $A_1 = A_2$

Por lo tanto:

$$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot A_2 =$$

$$= 2 \int_0^2 [(2x + 1) - (2x^3 - 6x + 1)] dx = 2 \left[\left(2 \frac{x^2}{2} + x \right) - \left(\frac{2x^4}{4} - 6 \frac{x^2}{2} + x \right) \right]_0^2 =$$

$$= 2 \left[x^2 + x - \frac{x^4}{2} + 3x^2 - x \right]_0^2 = 2 \left[4x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^2 = 2(16 - 8) = \mathbf{16 \text{ u}^2}$$

A 3 Problema sobre cálculo de probabilidades. Probabilidad condicionada.

	Nacidas en la ciudad	No nacidas en la ciudad	
CHICAS	0,54	0,04	0,58
CHICOS	0,36	0,06	0,42
	0,9	0,1	1

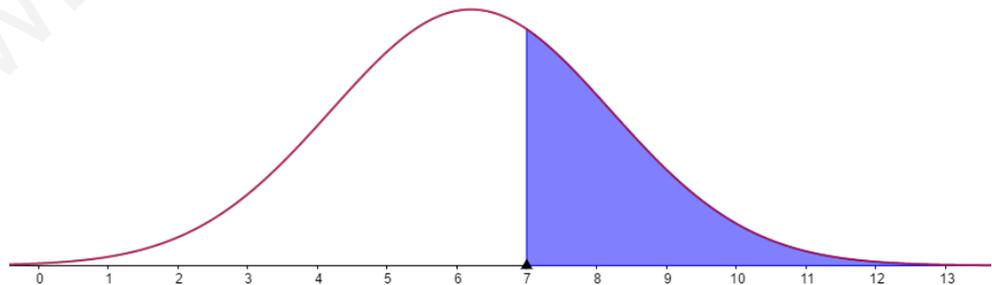
- a) Probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto
 $P(\text{no nacida en la ciudad}) = \mathbf{0,1}$
- b) Probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad
 $P(\text{chica} \cap \text{no nacida en la ciudad}) = \mathbf{0,04}$
- c) Se toma una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad, probabilidad de que sea chico

$$P(\text{chico} | \text{nacida en la ciudad}) = \frac{P(\text{chico} \cap \text{nacida en la ciudad})}{P(\text{nacida en la ciudad})} = \frac{0,36}{0,90} = \mathbf{0,4}$$

A 4 Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.

a) $X \equiv N(\mu = 6,2, \sigma = 2)$

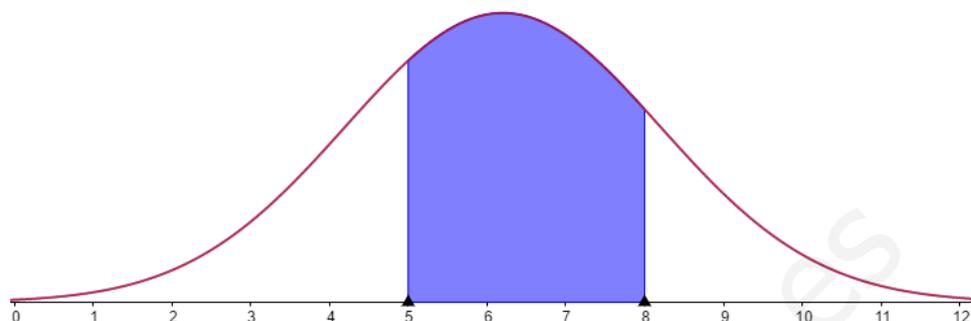
$P(X > 7) = ?$



$$P\left(\frac{X - 6,2}{2} > \frac{7 - 6,2}{2}\right) = P(Z > 0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - F(0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(X > 7) = 0,3446}$$

b) $P(5 \leq X \leq 8) = ?$

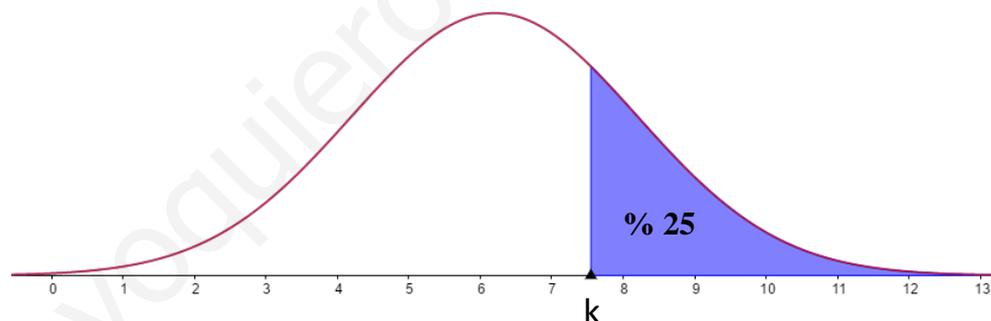


$$P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{5 - 6,2}{2} \leq \frac{X - 6,2}{2} \leq \frac{8 - 6,2}{2}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 0,9) = F(0,9) - F(-0,6) =$$

$$= F(0,9) - (1 - F(0,6)) = 0,8159 - (1 - 0,7257) = 0,5416$$

$$\Rightarrow P(5 \leq X \leq 8) = 0,5416$$

c) k tal que $P(X > k) = 0,25$.



$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X - 6,2}{2} \leq \frac{k - 6,2}{2}\right) = 0,75$$

Entonces,

$$\frac{k - 6,2}{2} = 0,675 \Rightarrow k = 7,55$$

Por lo tanto, el 25 % de los alumnos y alumnas ha sacado más de **7,55 puntos** en el examen, y por lo tanto la nota mínima para obtener la calificación de sobresaliente en el examen es 7,55.

B 1 Dimensión de una matriz. Cálculo matricial. Matriz inversa de una matriz.

a) $(A \cdot A^t)^{-1} = ?$

$$\star (A \cdot A^t) = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\star (A \cdot A^t)^{-1} = C^{-1}$$

$$\star \text{Adj}(C^t) = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\star |C| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 6$$

Entonces;

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^t)}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = (A \cdot A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

b) ¿La matriz $(A^t \cdot A)$ tiene inversa?

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Por lo tanto, no existe la matriz inversa.}$$

c) Calcular $A \cdot B$ y $A^t \cdot B$

$\star A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$ y $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ por lo tanto no existe $A \cdot B$.

$$\star A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

B 2 Análisis de las características de una función. Representación gráfica. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas.

a) Análisis de la función $y = 4 - x^2$.

\star Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$f(x)$ es creciente si $f'(x) > 0$

$f'(x) = -2x \Rightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow$ Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.

\star Máximos y mínimos relativos.

- $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , en el intervalo $(-\infty, 0)$ creciente y en el intervalo $(0, \infty)$ decreciente, por lo tanto, la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisas $x = 0$.
- $f(0) = 4 \Rightarrow (0, 4)$ es un máximo relativo.

OTRA MANERA:

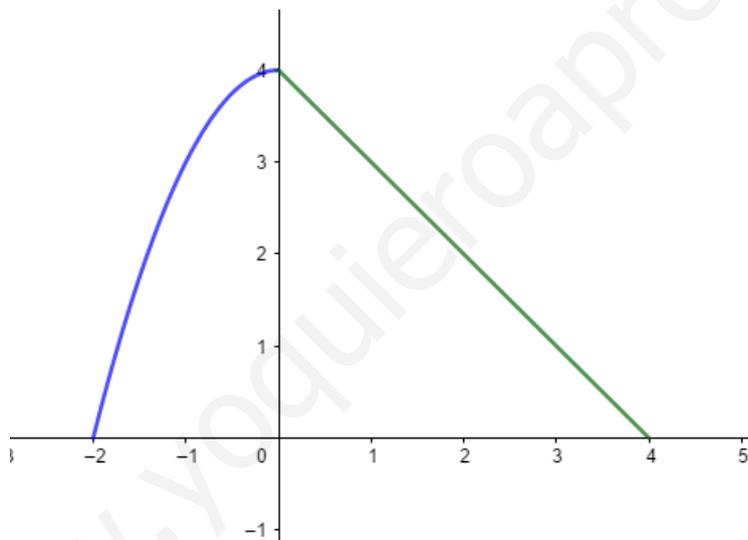
- $f'(x) = -2x \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ En el punto de abscisas $x = 0$ hay un máximo relativo.

Por lo tanto, $(0, 4)$ es un máximo relativo.

b) Representación gráfica

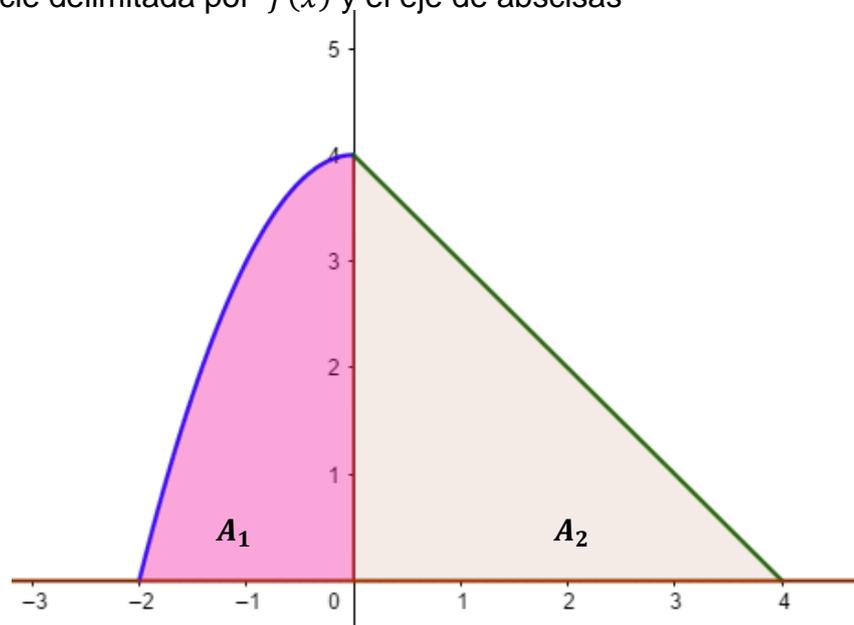
$f(x) =$

$$\begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



c) Área de la superficie delimitada por $f(x)$ y el eje de abscisas

$$A = A_1 + A_2$$

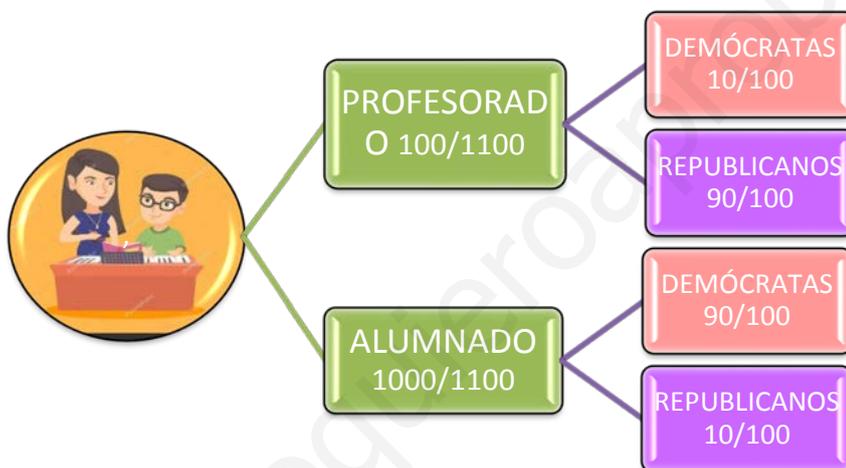


$$A_1 = \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 = - \left(-8 - \frac{-8}{3} \right) = \frac{16}{3} u^2$$

$$A_2 = \int_0^4 (4 - x) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = (16 - 8) = 8 u^2$$

Por lo tanto: $A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3} \Rightarrow A = 40/3 u^2$

B 3 Cálculo de probabilidades; probabilidad total y probabilidad a posteriori.



a) A través de la probabilidad total:

$$P(\text{repub.}) = P(\text{profesor}) \cdot P(\text{repub.} | \text{profesor}) + P(\text{alumno}) \cdot P(\text{repub.} | \text{alumno}) =$$

$$= \frac{100}{1100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100} = 0,1727$$

b) Probabilidad "a posteriori"

$$P(\text{alumno} | \text{republicano}) = \frac{P(\text{alumno} \cap \text{repub.})}{P(\text{republicano})} = \frac{P(\text{alumno}) \cdot P(\text{repub.} | \text{alumno})}{0,1727} = \frac{\frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100}}{0,1727} =$$

$$= \frac{0,0909}{0,1727} = 0,5263$$

OTRA MANERA (tabla de contingencia)

	DEMÓCRATAS	REPUBLICANOS	
ALUMNADO	900	100	1000

PROFESORADO	10	90	100
	910	190	1100

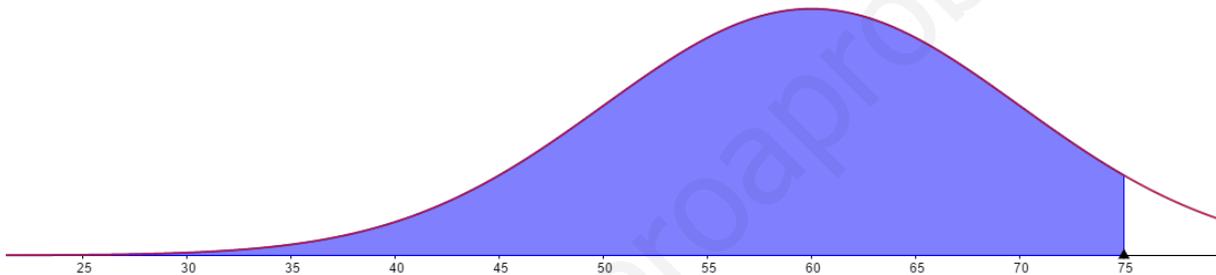
$$P(\text{republicano}) = \frac{190}{1100} = \mathbf{0,1727}$$

$$P(\text{alumno}|\text{republicano}) = \frac{P(\text{alumno} \cap \text{repub.})}{P(\text{republicano})} = \frac{100}{190} = \mathbf{0,5263}$$

B 4 *Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

$$X \equiv N(\mu = 60, \sigma = 10)$$

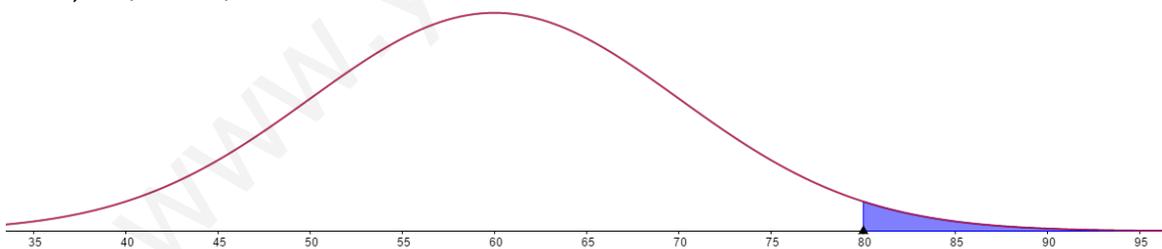
a) $P(X \leq 75) = ?$



$$P(X \leq 75) = P\left(\frac{X - 60}{10} \leq \frac{75 - 60}{10}\right) = P(Z \leq 1,5) = F(1,5) = 0,9332 \Rightarrow \mathbf{P(X \leq 75) = 0,9332}$$

Por lo tanto, el **93,32 %** del alumnado terminará a tiempo el examen.

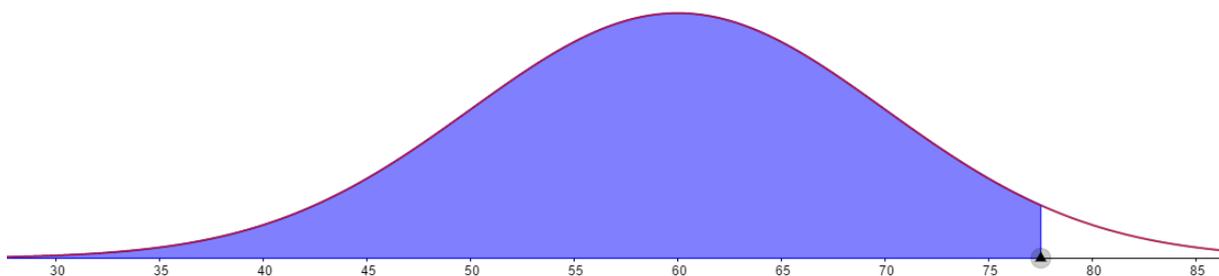
b) $P(X \geq 80) = ?$



$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X - 60}{10} \geq \frac{80 - 60}{10}\right) = 1 - P\left(\frac{X - 60}{10} \leq \frac{80 - 60}{10}\right) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,9772 = \mathbf{0,0228}$$

Esto es, el **2,28 %** del alumnado no terminará a tiempo el examen.

c) k tal que $P(X \leq k) = 0,96$.



% 96

$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{k-60}{10}\right) = 0,96 \Rightarrow \frac{k-60}{10} = 1,75 \Rightarrow \mathbf{k = 77,5}$$

Esto es, se tienen que dar **77,5 minutos** si se quiere que el 96 % del alumnado acabe el examen a tiempo.

www.yoquieroaprobar.es