Ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

1º Resuelve:

a) $2\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}=2$

b) $12x^4-7x^3-31x^2-8x+4=0$

c) $\log_3(x+1)-2\log_3(1-x)=1$

d) $3^{-x+1}+9=3^{x-1}$ (redondea la solución a la 2ª cifra decimal)

e) $\dfrac{1-2x}{x^2+3x}\leq 0$

2º Estudia el número de soluciones de la ecuación $x^2+mx+2m-3=0$ según los valores de **m**.

La puntuación máxima de cada uno de los ejercicios será 10 puntos el 1º y 2 puntos el 2º.

1º

a) $\boxed{2\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}=2}$

$$2\sqrt{x+4}=2+\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \ (2\sqrt{x+4})^2=(2+\sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow 4(x+4)=4+4\sqrt{3x+1}+3x+1$$

$$\Leftrightarrow x+11=4\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (x+11)^2=(4\sqrt{3x+1})^2$$

$\Leftrightarrow x^2+22x+121=16(3x+1) \Leftrightarrow x^2-26x+105=0$, resolviendo $x=5, x=21$.

Comprobación:

$x=5 \Rightarrow 2\sqrt{5+4}-\sqrt{3\cdot 5+1}=2$, válida

$x=21 \Rightarrow 2\sqrt{21+4}-\sqrt{3\cdot 21+1}=2$, válida

b) $\boxed{12x^4-7x^3-31x^2-8x+4=0}$

Se descompone el polinomio $P(x)=12x^4-7x^3-31x^2-8x+4$, las raíces del polinomio serán las soluciones de la ecuación

Los divisores del término independiente $4:\pm 1, \pm 2, \pm 4$, aplicando el teorema del resto se encuentran dos raíces enteras:

$P(-1)=12(-1)^4-7(-1)^3-31(-1)^2-8(-1)+4=0$

$P(2)=12(2)^4-7(-2)^3-31(2)^2-8(2)+4=0$

-1 y 2 son raíces de P(x), dividiendo mediante la regla de Rufino se obtiene

$P(x)=(x+1)(x-2)(12x^2+5x-2)$

La solución de la ecuación de 2º grado $12x^2+5x-2=0$ proporciona el resto de raíces:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{24-4\cdot 12\cdot(-2)}}{24}=\begin{cases}\dfrac{-5+11}{24}=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{-5-11}{24}=\dfrac{-3}{4}\end{cases}$$

Descomposición: $P(x)=12(x+1)(x-2)(x-1/4)(x+3/4)$

Soluciones: −1, 2, 1/4 y −3/4.

c) $\boxed{\log_3(x+1)-2\log_3(1-x)=1}$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{(x+1)}{(1-x)^2}=\log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)}{(1-x)^2}=3 \Leftrightarrow x+1=3(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-7x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\begin{cases}2\\ 1/3\end{cases}$$

Comprobación de las soluciones en la ecuación problema:

$x=2\Rightarrow \log_3(2+1)-2\log_3(1-2)=2$, tenemos el logaritmo de un número negativo, por lo que **<u>no es válida</u>** la solución

$x=1/3\Rightarrow \log_3(1/3+1)-2\log_3(1-1/3)=\log_3(4/3)-2\log_3(2/3)=\log_3(4/3)-\log_3(4/9)$

$=\log_3\dfrac{4/3}{4/9}=\log_3 3=1\Rightarrow$

solución válida.

d) $\boxed{3^{-x+1}+9=3^{x-1}}$

Se define una nueva variable $3^x=y\Leftrightarrow x=\log_3 y$

$$\frac{3}{3^x}+9=\frac{3^x}{3}\Leftrightarrow \frac{3}{y}+9=\frac{y}{3}\Leftrightarrow \frac{3+9y}{y}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow y^2=9+27y\Leftrightarrow y^2-27y-9=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{27\pm\sqrt{27^2-4\cdot(-9)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{27\pm\sqrt{765}}{2}=\begin{cases}\dfrac{27+\sqrt{765}}{2} \Rightarrow 3^x=\dfrac{27+\sqrt{765}}{2}\approx 27{,}33 \Rightarrow x=\log_3 27{,}33\approx 3{,}01\\ \dfrac{27-\sqrt{765}}{2} \Rightarrow 3^x=\dfrac{27-\sqrt{765}}{2}\approx -0{,}33 \Rightarrow \text{no válida}\end{cases}$$

e) $\dfrac{1-2x}{x^2+3x} \le 0$

Se descompone en factores el numerador y el denominador; se estudia el signo de cada factor y el signo de la fracción.

Numerador: $(1-2x) = 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$, raíz: x=1/2.

Denominador: $x^2+3x = x\cdot(x+3)$, raíces: x=0, x=−3.

	$x\in(-\infty,-3)$	$x=-3$	$x\in(-3,0)$	$x=0$	$x\in(0,\frac{1}{2})$	$x=\frac{1}{2}$	$x\in(\frac{1}{2},\infty)$
$1-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{1-2x}{x^2+3x}$	**+**	**No existe**	**−**	**No existe**	**+**	**0**	**−**

La solución será $x\in(-3,0)\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

2º El número de soluciones de una ecuación de 2º grado depende del signo del discriminante.

Soluciones $x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-4(2m-3)}}{2}$, siendo $\boxed{\Delta = m^2-4(2m-3)}$ el discriminante.

$\Delta<0 \Rightarrow 0$ soluciones reales

$\Delta=0 \Rightarrow 1$ solución real (doble)

$\Delta>0 \Rightarrow 2$ soluciones reales

El problema se reduce a estudiar el signo de $\boxed{m^2-4(2m-3)}$

$\Leftrightarrow m^2-8m+12$, resolviendo la ecuación de 2º grado $m^2-8m+12=0$,

$$m=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 12}}{2}=\begin{cases}6\\2\end{cases}\Rightarrow,\ m^2-4(2m-3)=(m-2)(m-6)$$

El signo del discriminante viene dado por la siguiente tabla, junto con la interpretación del número de soluciones de la ecuación problema.

	$m\in(-\infty,2)$	$m=2$	$m\in(2,6)$	$m=6$	$m\in(6,+\infty)$
$(m-2)$	$-$	0	$+$	4	$+$
$(m-6)$	$-$	-4	$-$	0	$+$
$(m-2)(m-6)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Interpretación (número de soluciones reales)	**2**	**1**	**0**	**1**	**2**