

GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Dadas las rectas: $r \equiv (y = -2x + 4)$; $s \equiv \left(\frac{x+1}{3} = y - 2\right)$ y $t \equiv (4x + 2y - 5 = 0)$. Halla:

1.1. Distancia entre las rectas r y s .

(Razonamiento 1/2 punto. Resolución 1/2 punto).

1.2. Distancia entre las rectas r y t .

" " " " " "

1.3. Ángulo que forman las rectas r y s .

" " " " " "

1.4. Ángulo que forman las rectas r y t .

" " " " " "

1.5. Los vectores unitarios paralelos a la recta r .

" " " " " "

1.6. Pendiente de los vectores perpendiculares a la recta s .

" " " " " "

1.7. Ecuación segmentaria de la recta t .

" " " " " "

2. Halla analíticamente la ecuación general de la recta respecto a la que $P(-2, 4)$ y $Q(3, -1)$ son puntos simétricos.

(Razonamiento 1 punto. Resolución 2 puntos).

1.1. La distancia entre r y s es 0 puesto que estas rectas son secantes. La pendiente de r es $m_r = -2$ y la de s es $m_s = 1/3$ por lo tanto r y s son secantes ya que tienen distinta dirección.

La distancia entre las rectas r y s es: $d(r, s) = 0$

1.2. La distancia entre r y t la hallaremos expresando sus ecuaciones en la forma general con iguales coeficientes de las incógnitas:

$$t \equiv (4x + 2y - 5 = 0) \quad y$$

$$r \equiv (y = -2x + 4) \Leftrightarrow r \equiv (2x + y - 4 = 0) \Leftrightarrow r \equiv (4x + 2y - 8 = 0)$$

Aplicando la fórmula de distancia entre rectas paralelas: $d(r, t) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ en este caso: $A = 4$, $B = 2$,

$$C = -8 \text{ y } C' = -5 \text{ por lo que } d(r, t) = \frac{|-8 - (-5)|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{20}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

La distancia entre las rectas r y t es: $d(r, t) = \frac{3\sqrt{5}}{10} \text{ u.l.}$

1.3. Vectores directores de r y s son, respectivamente; $\vec{u}_r = (1, -2)$ y $\vec{u}_s = (3, 1)$ obtenidos a partir de las ecuaciones de las rectas. Por lo tanto:

$$\cos(\hat{r}, \hat{s}) = \left| \cos(\vec{u}_r, \vec{u}_s) \right| = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{|(1, -2) \cdot (3, 1)|}{(\sqrt{1^2 + (-2)^2})(\sqrt{3^2 + 1^2})} = \frac{1}{\sqrt{50}} \Rightarrow (\hat{r}, \hat{s}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{50}} = 81'87^\circ$$

El ángulo que forman las rectas r y s es: $(\hat{r}, \hat{s}) = 81'87^\circ$

1.4. Como las rectas r y t tienen la misma dirección, el ángulo que forman es de 0° .

El ángulo que forman las rectas r y t es: $(\hat{r}, \hat{t}) = 0^\circ$

- 1.5. $\vec{u}_r = (1, -2)$ y $|\vec{u}_r| = \sqrt{5}$ por lo tanto los vectores unitarios, es decir, de módulo 1, que tengan la dirección de r son: $\vec{u}_{0r} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) = \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \mp \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$

Los vectores unitarios paralelos a la recta r son:

$$\vec{u}_{01r} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \text{ y } \vec{u}_{02r} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$$

- 1.6. Las rectas perpendiculares y , por lo tanto, también los vectores que sean perpendiculares tienen sus pendientes opuestas e inversas.

Como la pendiente de s es $m_s = 1/3$, la de los vectores perpendiculares es $m_{\perp s} = -3$

La pendiente de los vectores perpendiculares a la recta s es: $m_{\perp s} = -3$

- 1.7. $4x + 2y - 5 = 0 \xrightarrow{+5} 4x + 2y = 5 \xrightarrow{:5} \frac{4x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{5}{5} \Rightarrow t \equiv \left(\frac{x}{5/4} + \frac{y}{5/2} = 1 \right)$

La ecuación segmentaria de la recta t es: $\frac{x}{5/4} + \frac{y}{5/2} = 1$

2. La recta respecto a la que $P(-2, 4)$ y $Q(3, -1)$ son simétricos, pasa por el punto medio del segmento PQ y tiene la dirección perpendicular al vector \overrightarrow{PQ} .

El punto medio del segmento PQ es: $M\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{4-1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Por otro lado $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (3, -1) - (-2, 4) = (5, -5)$ un vector perpendicular a \overrightarrow{PQ} es, por ejemplo, $\vec{v} = (1, 1)$ (podemos comprobar que el producto escalar $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}$ vale 0)

La ecuación de la recta que pasa por el punto $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (1, 1)$ es,

en la forma continua: $\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1}$ que en la forma general o implícita es $x - y + 1 = 0$

Los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(3, -1)$ son simétricos respecto a la recta:

$$x - y + 1 = 0$$