PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) **(0,5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

EJERCICIO 2

a) **(1,75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices.

$$x+2y\leq 13 \qquad x-y\leq 4 \qquad x-2y\geq -7 \qquad x+y\geq 5$$

b) **(0,75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=x+y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0 \\ a+be^{x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Calcule los valores a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) **(0,75 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) **(0,5 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de *f*, si existen.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x \le 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2 < x < 4 \\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x \ge 4 \end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en su dominio.

b) **(0,75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

c) **(0,5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

EJERCICIO 6

Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elige al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bobilla elegida no sea defectuosa.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1,5 puntos)** Dada la población *P = (2, 4, 6)*, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

EJERCICIO 8

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9,2 10 8,5 12 9 11,3 7 8,5 8,3 7,6 9 9,4 10,5 8,9 6,8

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1,5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97,5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0,3 minutos.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) **(0,5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

a) En cada fila aparece los precios de cada agencia (individual doble triple)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{individuales} & \text{dobles} & \text{triples} \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Agencia 1} \\ \rightarrow \text{Agencia 2} \end{array} \end{array}$$

En cada columna aparece la demanda de cada centro:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{centro1} & \text{centro2} & \text{centro3} \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \end{array} \\ D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{nº habitaciones individuales} \\ \rightarrow \text{nº habitaciones dobles} \\ \rightarrow \text{nº habitaciones triples} \end{array} \end{array}$$

b) Calculamos A · D.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 65\cdot 3+85\cdot 15+104\cdot 2 & 65\cdot 2+85\cdot 12+104\cdot 5 & 65\cdot 1+85\cdot 16+104\cdot 7 \\ 78\cdot 3+83\cdot 15+106\cdot 2 & 78\cdot 2+83\cdot 12+106\cdot 5 & 78\cdot 1+83\cdot 16+106\cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{centro1} & \text{centro2} & \text{centro3} \\ \searrow & \downarrow & \swarrow \end{array} \\ A \cdot D = \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Agencia 1} \\ \rightarrow \text{Agencia 2} \end{array} \end{array}$$

En cada fila aparece el precio total de la cada agencia para el instituto 1, 2 y 3.

En cada columna aparece el precio total para cada centro de la agencia primera y segunda.

Al primer instituto le interesa la primera agencia (1678 € < 1691 €)

Al segundo instituto le interesa la primera agencia (1670 € < 1682 €)

Al tercer instituto le interesa la segunda agencia (2148 € < 2153 €)

c) La matriz A no es cuadrada y no existe inversa.
La matriz D es cuadrada y puede existir su inversa si su determinante es no nulo.

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 252 + 64 + 75 - 24 - 210 - 240 = -83 \neq 0$$. Existe la inversa de la matriz D.

EJERCICIO 2

a) **(1,75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices.

$$x+2y\le 13 \qquad x-y\le 4 \qquad x-2y\ge -7 \qquad x+y\ge 5$$

b) **(0,75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=x+y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=13$

x	$y=\dfrac{13-x}{2}$
1	6
11	1

$x-y=4$

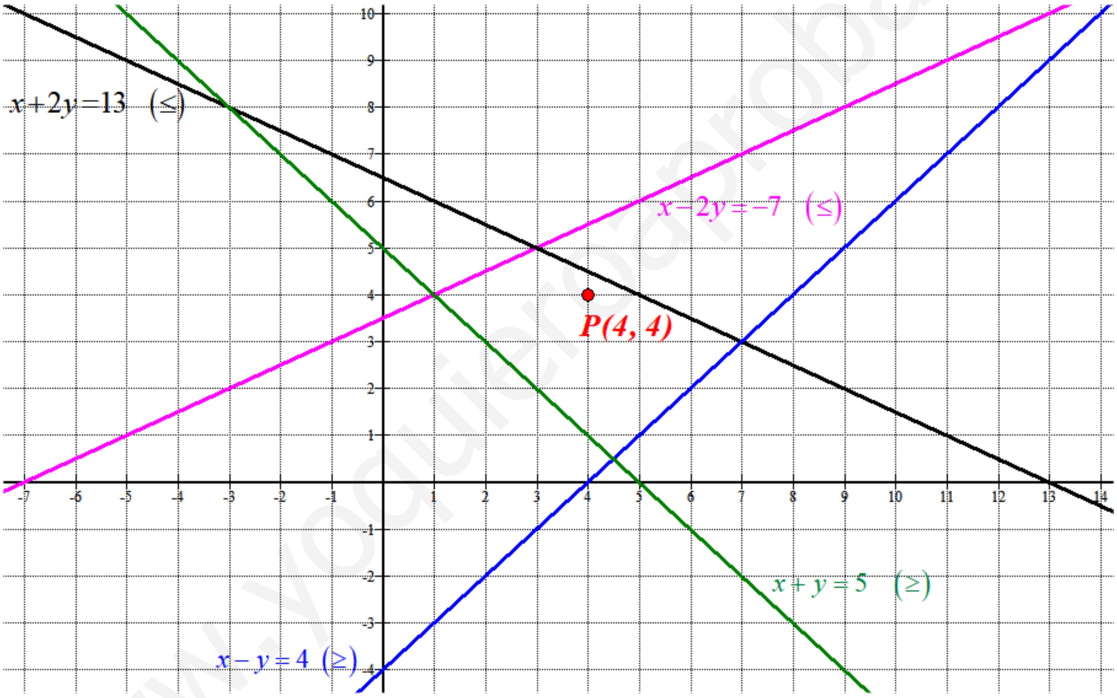
x	$y=x-4$
4	0
0	-4

$x-2y=-7$

x	$y=\dfrac{x+7}{2}$
1	4
3	5

$x+y=5$

x	$y=5-x$
0	5
5	0

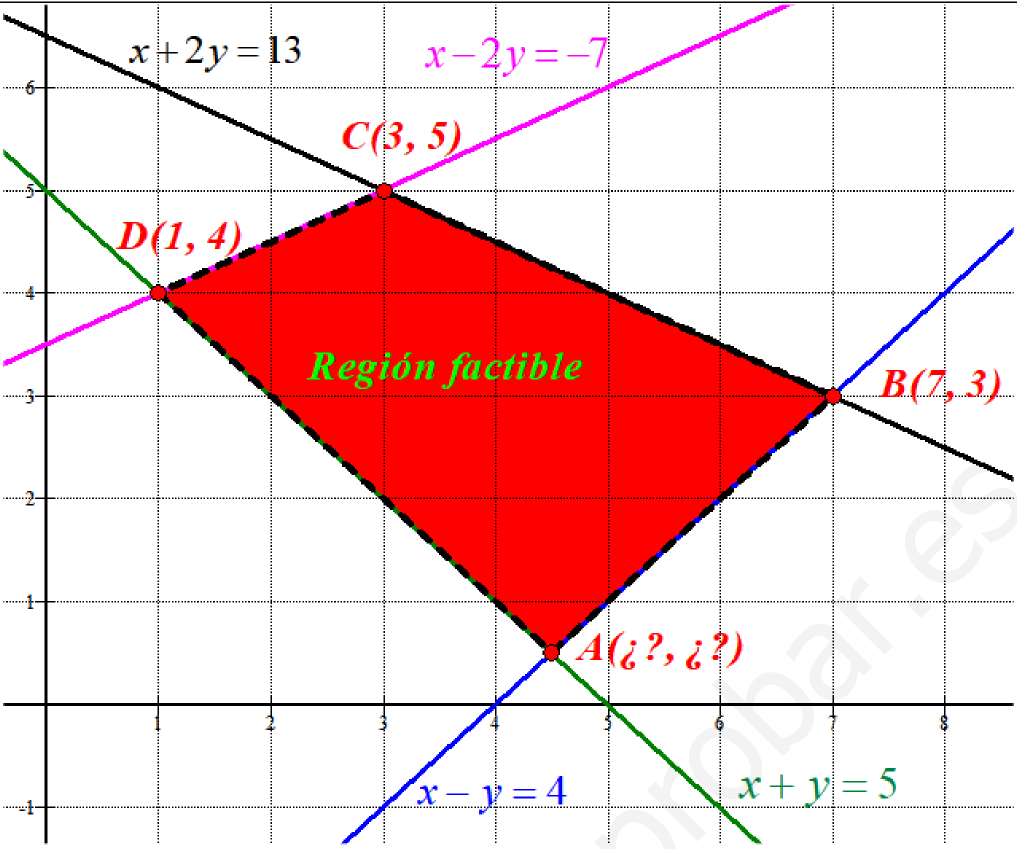


Comprobamos si el punto P(4, 4) cumple las restricciones del problema:

$$¿4+2\cdot 4\le 13 \qquad 4-4\le 4 \qquad 4-2\cdot 4\ge -7 \qquad 4+4\ge 5?$$

$$¿12\le 13 \qquad 0\le 4 \qquad -4\ge -7 \qquad 8\ge 5?$$

Se cumplen todas las restricciones por lo que la región factible es la región del plano en la que se sitúa el punto P y delimitada por las rectas de colores. La coloreamos de rojo en la figura.



Los vértices los determinamos a la vista de la cuadricula y las intersecciones de las rectas. Solo falta el vértice A que determinamos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ x+y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ x+y=5 \end{array}\right\}$$

$$\overline{2x \qquad} = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4.5 \Rightarrow 4.5 - y = 4 \Rightarrow y = 0.5$$

El vértice A tiene coordenadas A(4.5, 0.5).
El resto de vértices tienen coordenadas B(7,3), C(3, 5) y D(1, 4)

b) Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices.

A(4.5, 0.5) → $F(4.5, 0.5) = 4.5 + 0.5 = 5$
B(7,3) → $F(7,3) = 7 + 3 = 10$
C(3, 5) → $F(3,5) = 3 + 5 = 8$
D(1, 4) → $F(1,4) = 1 + 4 = 5$

El máximo valor de la función es 10 y se alcanza en el vértice B(7, 3).
El valor mínimo es 5 y se alcanza en los vértices A y D. Por lo que el valor mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento AD: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), etc.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0 \\ a+be^x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Calcule los valores a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.
b) **(0,75 puntos)** Para $a=2$ y $b=-2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.
c) **(0,5 puntos)** Para $a=2$ y $b=-2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de *f*, si existen.

a) Debe ser continúa en $x = 0$ y deben coincidir el valor de la función y los limites laterales en dicho punto.

- $f(0)=a+be^0=a+b$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2+\dfrac{a}{x-1}=2+\dfrac{a}{-1}=2-a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a+be^x=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=2-a \Rightarrow b=2-2a$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=2-a$

La función es continua si $b = 2 - 2a$.

Nuestra función queda $f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0 \\ a+(2-2a)e^x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ y la derivada de la función es:

$$f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{a}{x-1} & si \quad x<0 \\ a+(2-2a)e^x & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ (2-2a)e^x & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben de coincidir sus derivadas laterales.

$$f'(0)=\left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{-a}{1}=-a \\ f'(0^+)=(2-2a)e^0=2-2a \end{array}\right\} \Rightarrow 2-2a=-a \Rightarrow \boxed{2=a}$$

Y sustituyendo tenemos que b = 2 – 4 = –2.

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -2$.

b) La función es $f(x)=\begin{cases} 2+\dfrac{2}{x-1} & si \quad x<0 \\ 2-2e^x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ y la derivada $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{(x-1)^2} & si \quad x<0 \\ -2e^x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

En $(-\infty,0)$ la derivada es $f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$. Por lo que siempre decrece.

En $\left(0,+\infty\right)$ la derivada es $f\,'(x)=-2e^{x}<0$, pues la exponencial es siempre positiva, luego la función decrece en toda la semirrecta.

Conclusión: La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R}$ y no presenta extremos.

c) La función tiene la expresión $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{2}{x-1} & si \quad x<0\\ 2-2e^{x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$.

Asíntota vertical. $x=a$

El dominio es todo $\mathbb{R}$ y no presenta asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2+\frac{2}{x-1}=2+\frac{2}{+\infty}=2+0=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2-2e^{x}=2-2e^{+\infty}=2-\infty=-\infty$$

La asíntota horizontal en $-\infty$ es $y=2$

No tiene asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Veamos si tiene asíntota oblicua en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-2e^{x}}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2e^{x}}{1}=-\infty$$

No tiene asíntota oblicua en $+\infty$.

No tiene asíntota oblicua en $-\infty$ pues tiene asíntota horizontal

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -x+2 & si \quad x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2<x<4 \\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

a) **(1,25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en su dominio.
b) **(0,75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.
c) **(0,5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$

a) La función es continua en $(-\infty,2)$ pues es un polinomio. Al igual que en (2, 4). En $(4,+\infty)$ la función es racional y no es continua en *x = 0* pero no pertenece a su dominio de definición. La función es continua en $(4,+\infty)$.

Estudiemos la continuidad en los cambios de definición.

¿En *x = 2* es continua?

- Existe $f(2)=-2+2=0$
- Existe $\lim_{x\to 2} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} -x+2=0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} -x^2+6x-8=-2^2+12-8=0 \end{array}\right\}=0$
- Son iguales $f(2)=0=\lim_{x\to 2} f(x)$

Es continua en *x = 2*

¿En *x = 4* es continua?

- Existe $f(4)=\dfrac{4-3}{4}=\dfrac{1}{4}$
- Existe $\lim_{x\to 4} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-} -x^2+6x-8=-4^2+24-8=0 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+} \dfrac{x-3}{x}=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$ No son iguales y no existe el límite.

Es discontinua en *x = 4*

Conclusión: La función es continua en $\mathbb{R}-\{4\}$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{2, 4\}$ y la derivada vale:

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & si \quad x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2<x<4 \\ \dfrac{x-3}{x} & si \quad x\ge 4 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<2 \\ -2x+6 & si \quad 2<x<4 \\ \dfrac{x-(x-3)}{x^2}=\dfrac{3}{x^2} & si \quad x>4 \end{cases}$$

Al no ser continua en *x = 4* tampoco es derivable.

Estudiemos la derivabilidad en $x = 2$. Comprobando si sus derivadas laterales coinciden.

$$f\,'(2) = \left\{ \begin{array}{l} f\,'(2^-) = -1 \\ f\,'(2^+) = -4 + 6 = 2 \end{array} \right\}$$ No coinciden, luego no es derivable en $x = 2$.

Conclusión: La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2, 4\}$

b) Observando la derivada:

$$f\,'(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 2 \\ -2x+6 & si \quad 2 < x < 4 \\ \dfrac{3}{x^2} & si \quad x > 4 \end{cases}$$

En $(-\infty, 2)$ la derivada es siempre negativa, por lo que la función decrece en este intervalo.

En (2, 4) la derivada es $-2x+6$ que se anula para $x = 3$.

Para $x = 1,5$ la derivada vale $f\,'(1,5) = -3 + 6 = 3 > 0 \rightarrow$ la función crece en (2, 3).

Para $x = 3,5$ la derivada vale $f\,'(3,5) = -7 + 6 = -1 < 0 \rightarrow$ la función decrece en $(3,\ 4)$.

En $(4, +\infty)$ la derivada de la función es $f\,'(x) = \dfrac{3}{x^2}$ que es siempre positiva. La función crece en $(4, +\infty)$.

Conclusión: La función decrece en $(-\infty, 2)$, crece en (2, 3), decrece en $(3,\ 4)$ y crece en $(4, +\infty)$.

c) La función en el intervalo (2,3) es $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 -x^2 + 6x - 8dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 8x \right]_2^3 = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_2^3 =$$

$$= \left[-\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 - 24 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - 16 \right] = -9 + 27 - 24 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{8}{3} - 2 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

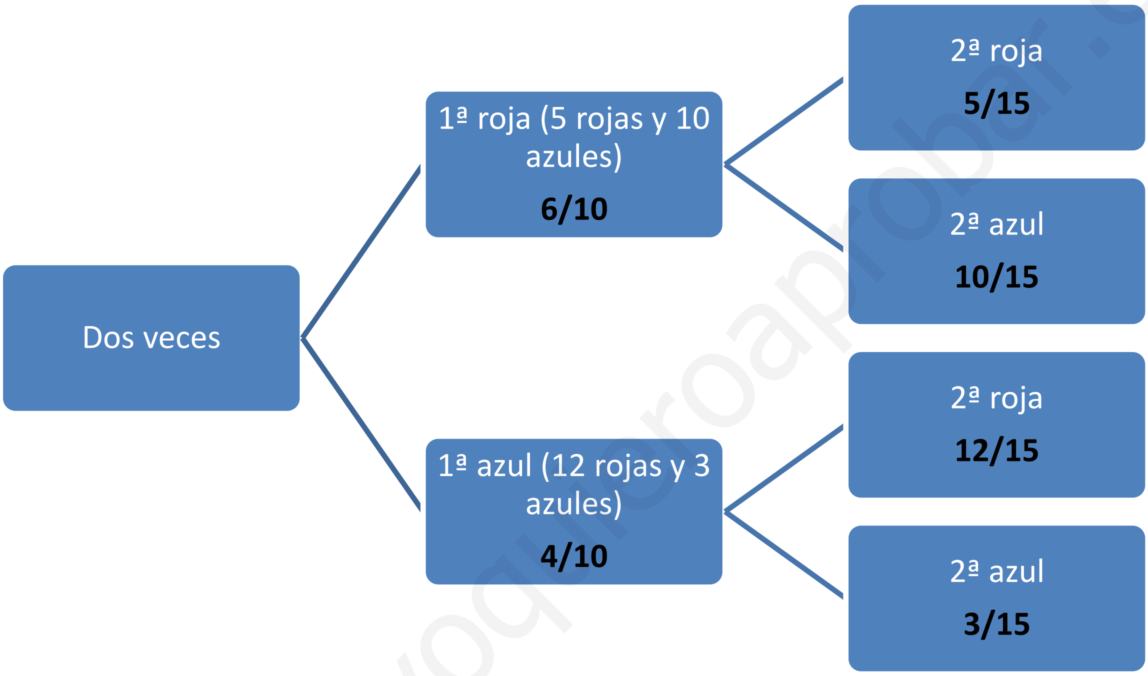
a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

Realizamos un diagrama de árbol.

En la primera extracción si saco una bola roja, no la devuelvo y en su lugar introduzco 6 bolas azules, por lo que en la urna pasan a haber 5 rojas (1 menos) y 10 azules (6 más).

Si en la primera extracción saco una bola azul, no la devuelvo y en su lugar introduzco 6 bolas rojas, por lo que en la urna pasan a haber 12 rojas (6 más) y 3 azules (1 menos).



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(2^{a}\text{ bola roja}\right)=P\left(1^{a}\text{ bola roja}\right)P\left(2^{a}\text{ bola roja / }1^{a}\text{ bola roja}\right)+$$
$$+P\left(1^{a}\text{ bola azul}\right)P\left(2^{a}\text{ bola roja / }1^{a}\text{ bola azul}\right)=$$
$$=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{15}+\frac{4}{10}\cdot\frac{12}{15}=\frac{78}{150}=\boxed{\frac{13}{25}=0.52}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(1^{a}\text{ bola azul / }2^{a}\text{ bola azul}\right)=\frac{P\left(1^{a}\text{ bola azul }\cap\ 2^{a}\text{ bola azul}\right)}{P\left(2^{a}\text{ bola azul}\right)}=$$
$$=\frac{P\left(1^{a}\text{ bola azul}\right)P\left(2^{a}\text{ bola azul /}1^{a}\text{ bola azul}\right)}{1-P\left(2^{a}\text{ bola roja}\right)}=\frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{15}}{1-\frac{13}{25}}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{12}{25}}=\boxed{\frac{1}{6}=0,167}$$

EJERCICIO 6

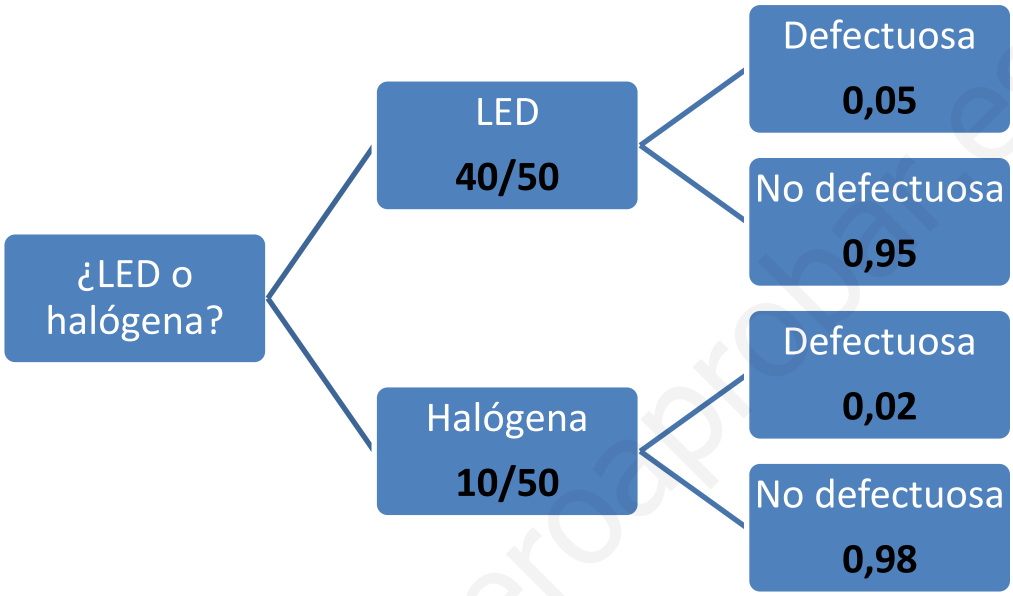
Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elige al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1,5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bobilla elegida no sea defectuosa.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

Realizamos un diagrama de árbol.

La caja contiene 50 bombillas, siendo la proporción de LED de 40/50 y de halógenas de 10/50.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Bombilla no defectuosa}) =$$
$$= P(\text{Elegir LED})P(\text{Bombilla no defectuosa/Siendo LED}) +$$
$$+P(\text{Elegir halógena})P(\text{Bombilla no defectuosa/Siendo halógena}) =$$
$$= \frac{4}{5}\cdot 0,95 + \frac{1}{5}\cdot 0,98 = \boxed{\frac{239}{250} = 0,956}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizo el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea LED /Es defectuosa}) = \frac{P(\text{Sea LED } \cap \text{ Es defectuosa})}{P(\text{Es defectuosa})} =$$

$$= \frac{P(\text{Elegir LED})P(\text{Sea defectuosa / Es LED})}{P(\text{Es defectuosa})} = \frac{\frac{4}{5}\cdot 0,05}{1-0,956} = \frac{\frac{0,2}{5}}{0,044} = \boxed{\frac{10}{11} = 0,909}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1,5 puntos)** Dada la población *P = (2, 4, 6)*, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

a) Llamamos n al tamaño total de la muestra y n_1 al tamaño de la muestra en el estrato de 15000 personas, n_2 al tamaño de la muestra en el estrato de 5000 personas y n_4 al tamaño de la muestra en el estrato de 2000 personas.

$$\frac{n}{25000}=\frac{n_1}{15000}=\frac{n_2}{5000}=\frac{36}{3000}=\frac{n_4}{2000}$$

De esta expresión vamos separando por parejas y determinando el tamaño total de la muestra y el tamaño correspondiente a cada estrato.

$$\frac{n}{25000}=\frac{36}{3000}\Rightarrow n=\frac{36\cdot 25000}{3000}=300$$

$$\frac{n_1}{15000}=\frac{36}{3000}\Rightarrow n_1=\frac{36\cdot 15000}{3000}=180$$

$$\frac{n_2}{5000}=\frac{36}{3000}\Rightarrow n_2=\frac{36\cdot 5000}{3000}=60$$

$$\frac{36}{3000}=\frac{n_4}{2000}\Rightarrow n_4=\frac{36\cdot 2000}{3000}=24$$

El tamaño de la muestra total es de 300 personas. Del estrato 1 se eligen 180, del estrato 2 son 60 y del 4 son 24.

b) Las muestras posibles mediante muestreo aleatorio simple son:

M1 = [2,4} M2 = {2,6} y M3 = {4,6}

Las medias muestrales de cada una son:

$$\overline{x_1}=\frac{2+4}{2}=3\ ;\ \overline{x_2}=\frac{2+6}{2}=4\ ;\ \overline{x_3}=\frac{4+6}{2}=5$$

La media de las medias muestrales es $\overline{x}=\frac{\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}}{3}=\frac{3+4+5}{3}=4$

$$\text{Varianza}=\frac{\left(\overline{x_1}-\overline{x}\right)^2+\left(\overline{x_2}-\overline{x}\right)^2+\left(\overline{x_3}-\overline{x}\right)^2}{3}=\frac{(-1)^2+0^2+1^2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{Desviación típica}=\sqrt{Varianza}=\sqrt{\frac{2}{3}}=0.816}$$

EJERCICIO 8

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9,2 10 8,5 12 9 11,3 7 8,5 8,3 7,6 9 9,4 10,5 8,9 6,8

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1,5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97,5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0,3 minutos.

X = Tiempo de espera en la consulta de un especialista

Varianza = 4 → $\sigma = \sqrt{4} = 2$

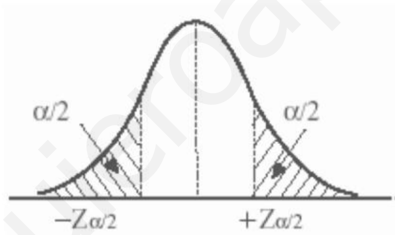
X = N(μ, 2)

n = 16. Calculamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{8+9.2+10+8.5+12+9+11.3+7+8.5+8.3+7.6+9+9.4+10.5+8.9+6.8}{16} = 9$$

a) Con un nivel de confianza del 97.5% tenemos

$1 - \alpha = 0{,}975 \rightarrow \alpha = 0{,}025 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}24}$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}} = 1.12$$

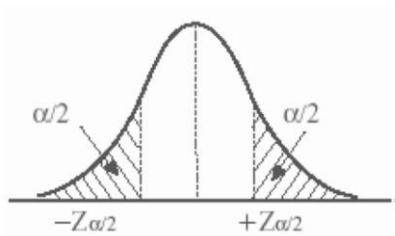
El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(9 - 1.12, 9 + 1.12\right) = \left(7.88, 10.12\right)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 90% tenemos

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}645}$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.3 \Rightarrow 3.29 = 0.3\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{3.29}{0.3} = 10.967 \Rightarrow n = 120{,}268$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 121 pacientes.