Propuesta A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función **f(x) = x^{15} + x + 1** corta al eje **OX** al menos una vez en el intervalo **[-1 , 1]**. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje **OX** cuando **x** recorre toda la recta real. (1 punto)

a) Teorema de Bolzano
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)],** entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

Como **f(x)** es continua en el intervalo **[-1 , 1]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\begin{cases} f(1)=1^{15}+1+1=3 \\ f(-1)=(-1)^{15}+(-1)+1=-1 \end{cases}$ tal que **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]** entonces existe, al menos, un punto $c\in(-1\ ,1)$ tal que **f(c) = 0**

b) Como $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^{15}+x+1\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{15}+x+1\right)=\infty \end{cases}$ y $f'(x)=15x^{14}+1\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 15x^{14}+1=0\Rightarrow$

$15x^{14}=-1\Rightarrow x^{14}=-\dfrac{1}{15}\Rightarrow x=\sqrt[14]{-\dfrac{1}{15}}\Rightarrow Sin\ soluci\acute{o}n$, no hay máximos ni mínimos relativos, por lo tanto la función es siempre creciente, por lo que **solo habrá un punto de corte**

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$a)\ \int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\,dx \qquad b)\ \int\frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

a)

$$\int\left(x^2-1\right)\cos x\ dx=sen\ x\cdot\left(x^2-1\right)-\int sen\ x\cdot 2x\ dx=\left(x^2-1\right)sen\ x-2\int x\ sen\ x\ dx$$

$$\begin{cases} \left(x^2-1\right)=u\Rightarrow du=2\ xdx \\ \cos x\ dx=dv\Rightarrow v=\int\cos x\ dx=sen\ x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u\Rightarrow du=dx \\ sen\ x\ dx=dv\Rightarrow v=\int sen\ x\ dx=-\cos x \end{cases}$$

$$\int\left(x^2-1\right)\cos x\ dx=\left(x^2-1\right)sen\ x-2\left[x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\ dx\right]=$$

$$\int\left(x^2-1\right)\cos x\ dx=\left(x^2-1\right)sen\ x+2x\cos x-2\int\cos x\ dx=\left(x^2-1\right)sen\ x+2x\cos x-2\ sen\ x+K$$

$$\int\left(x^2-1\right)\cos x\ dx=\left(x^2+1\right)sen\ x+2x\cos x+K$$

$$\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\ dx=\left[\left(x^2+1\right)sen\ x+2x\cos x\right]_0^{\pi}=\left[\left(\pi^2+1\right)sen\ \pi+2\pi\cos\pi\right]-\left[\left(0^2+1\right)sen\ 0+2\pi\cos 0\right]$$

$$\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\ dx=\left[\left(\pi^2+1\right)\cdot 0+2\pi\,(-1)\right]-\left[1\cdot 0+2\pi\cdot 1\right]=-2\pi-2\pi=-4\pi$$

Continuación del Problema 2A de la Propuesta A

$$b)\quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx=\int \frac{dt}{t^2+t-2} \qquad t^2+t-2=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9 \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt$$

$$t^2+t-2=(t-1)(t+2) \Rightarrow \frac{1}{t^2+t-2}=\frac{1}{(t-1)(t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2}=\frac{A\,(t+2)+B\,(t-1)}{(t-1)(t+2)} \Rightarrow$$

$$A\,(t+2)+B\,(t-1)=1 \Rightarrow \begin{cases} Si\ x=-2 \Rightarrow A\,(-2+2)+B\,(-2-1)=1 \Rightarrow -3B=1 \Rightarrow B=-\dfrac{1}{3} \\ Si\ x=1 \Rightarrow A\,(1+2)+B\,(1-1)=1 \Rightarrow 3A=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{t^2+t-2}=\frac{\frac{1}{3}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{t+2} \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2+t-2}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1}-\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+2}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}-\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v}=\frac{1}{3}\ln u-\frac{1}{3}\ln v=\frac{1}{3}\ln\frac{u}{v}$$

$$\begin{cases} t-1=u \Rightarrow dt=du \\ t+2=v \Rightarrow dt=dv \end{cases}$$

$$\int \frac{dt}{t^2+t-2}=\frac{1}{3}\ln\sqrt[3]{\frac{t-1}{t+2}}=\frac{1}{3}\ln\sqrt[3]{\frac{e^x-1}{e^x+2}}+K$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \Re$

$$\begin{cases} x+3y-az=4 \\ x+ay+z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor **a = 2**. **(1 punto)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ 0 & a-3 & 1+a \\ 0 & 1 & a-5 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} a-3 & 1+a \\ 1 & a-5 \end{vmatrix}=(a-5)(a-3)-(a+1)=a^2-5a-3a+15-a-1$$

$$|A|=a^2-9a+14 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow a^2-9a+14=0 \Rightarrow \Delta=(-9)^2-4\cdot 1\cdot 14=81-56=25 \Rightarrow a=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}\begin{cases} a=7 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\forall x \in \Re-\{2\,,7\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

Continuación del Problema 3A de la Propuesta A

$Si\ a=7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-7&4\\1&7&1&2\\1&4&-5&6\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-7&4\\0&4&8&-2\\0&1&2&2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-7&4\\0&0&0&-10\\0&1&2&2\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$b)$

$Si\ a=2\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&4\\0&-1&3&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow -y+3z=-2\Rightarrow y=2+3z\Rightarrow x+3\cdot(2+3z)-2z=4\Rightarrow x+6+9z-2z=4$$

$x=-2-7z\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-2-7\lambda\ ,\ 2+3z\ ,\ \lambda)$

4A. Dado el plano $\alpha\equiv 4x+2y+4z-15=0$ el punto **A(2 , -3 , 1)**

a) Calcula la distancia del punto **A** al plano α. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto **A** al plano α. **(1,5 puntos)**

$a)$

$$d(A\ ,\ \alpha)=\frac{|4\cdot 2+2\cdot(-3)+4\cdot 1-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}=\frac{|8-6+4-15|}{\sqrt{36}}=\frac{|-9|}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\ u$$ Las rectas **r** y **s** se cruzan

b) Sea el punto **P(x , y , z)**

$$d(A\ ,\ \alpha)=d(P\ ,\ \alpha)\Rightarrow\frac{|4x+2y+4z-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{|4x+2y+4z-15|}{\sqrt{36}}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{|4x+2y+4z-15|}{6}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$|4x+2y+4z-15|=9\Rightarrow|4x+2y+4z-15|=\pm 9\Rightarrow\begin{cases}4x+2y+4z-15=9\Rightarrow 4x+2y+4z-24=0\\4x+2y+4z-15=-9\Rightarrow 4x+2y+4z-6=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$Dos\ planos\Rightarrow\begin{cases}2x+y+2z-12=0\\2x+y+2z-3=0\end{cases}$$

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina **A** produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina **B** produce 700 con un 4% de defectuosos y la **C** produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea **X** la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. (0,5 puntos)

a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina **A** produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina **B** produce 700 con un 4% de defectuosos y la **C** produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

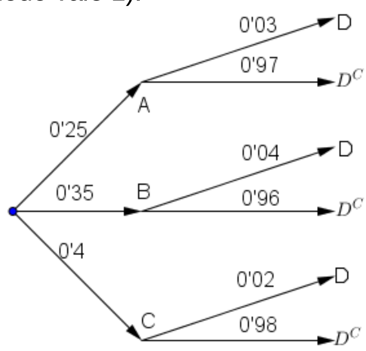
a1)

Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso.

Llamemos A, B, C, D y D^C, a los sucesos siguientes, “maquina A”, “maquina B”, “maquina C”, "condensador defectuoso" y "condensador no defectuoso", respectivamente.

Datos del problema: Total condensadores diarios = 500 + 700 + 800 = 2000; p(A) = 500/2000 = 0’25; p(B) = 700/2000 = 0’35; p(C) = 800/2000 = 0’4; p(D/A) = 3% = 0’03; p(D/B) = 4% = 0’04, p(D/C) = 2% = 0’02.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(D)** = p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) + p(C).p(D/C) =
= (0’25)·(0’03) + (0’35)·(0’04) + (0’4)·(0’02) **= 59/2000 = 0’0295**.
a2)
Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

Me piden **p(A/D)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/D) =} \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A)\cdot p(D/A)}{p(D)} = \frac{0'25\cdot 0'03}{0'0295} \mathbf{= 15/59 \cong 0'25424}.$$

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea **X** la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".
b1)
Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X.

Vemos que nuestra variable X sigue una binomial B(n,p) donde n es el nº de veces que se realiza el experimento, en nuestro caso n = 5, p la probabilidad de éxito que es salir nº múltiplo de 3, en nuestro caso p = 2/6 = 1/3. Luego q = 1 – p = 1 – 1/3 = 2/3
Tenemos B(n,p) = B(5, 1/3)

Sabemos que la probabilidad de obtener k éxitos, que es su función de probabilidad, viene dada por:

$$p(X = k) = (n \text{ sobre } k).p^k.q^{(n-k)} = \binom{n}{k}.p^k.q^{(n-k)}.$$

En nuestro caso $p(X = k) = \binom{5}{k}.(1/3)^k.(2/3)^{5-k}$. No tendremos que hacer uso de ella porque nos han dado la tabla de la binomial, y tomaremos como P = 1/3 = 0’33

También sabemos que en una binomial B(n,p) su media, viene dada por $\bar{x}$ = n.p, y su desviación típica, σ, viene dada por σ = √(n.p.q).

En nuestro caso **la media es** $\bar{x}$ = n.p **= 5·(1/3) = 5/3 ≅ 1’66667**, y **la desviación típica es σ =** √(n.p.q) =
= √(5·(1/3)·(2/3)) = √(10/9) ≅ 1’ 0541.
b2)
Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres.

Me están pidiendo **p(X ≥ 4) =** p(X = 4) + p(X = 5) = {mirando en la tabla de la binomial} =
= 0’0412 + 0’0041 = 0’0453.

Propuesta B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función **f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a** cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo **[1 , 3]. (0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto **(1 , 3)** cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica **f(x) = x^3 - 5x^2 +7x** donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta **y = 4x + 2. (1 punto)**

a)
Teorema de Rolle
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f'(c) = 0**

Sea **x^3 - 5x^2 + 7x + a** una función continua en **[1 , 3],** derivable en **(1 , 3)** y que verifica que

$$\begin{cases} f(1) = 1^3 - 5\cdot 1^2 + 7\cdot 1 + a = 3 + a \\ f(3) = 3^3 - 5\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + a = 3 + a \end{cases} \Rightarrow$$

f(1) = f(3); entonces existe, al menos, un punto $c \in (1, 3)$ tal que

f'(c) = 0 $\Rightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0$

$b)$

$$3c^2 - 10c + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot 7 = 100 - 84 = 16 \geq 0 \Rightarrow c = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2\cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{10+4}{6} = \frac{7}{3} \in (1, 3) \\ c = \frac{10-4}{6} = 1 \notin (1, 3) \end{cases}$$

$c)$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Rightarrow f'(x) = 4 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 4 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 64 \geq 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2\cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10+8}{6} = 3 \Rightarrow f(3) = 3^3 - 5\cdot 3^2 + 7\cdot 3 = 27 - 45 + 21 = 3 \\ x = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + \frac{7}{3} = \frac{1 - 15 + 63}{27} = \frac{49}{27} \end{cases}$$

2B. Dadas las funciones **f(x) = 2x e^{-x}** y **g(x) = x^2 e^{-x}**, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{e^x} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2x}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$1 \in (0, 2) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{2\cdot 1}{e^1} = \frac{2}{e} > 0 \\ g(1) = \frac{1^2}{e^1} = \frac{1}{e} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{e} > \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$I = \int 2xe^{-x}\,dx - \int x^2 e^{-x}\,dx = \int (2x - x^2) e^{-x}\,dx = -(2x - x^2)e^{-x} - \int -e^{-x}\cdot 2\cdot(1-x)\,dx = -(2x-x^2)e^{x} + 2\int e^{-x}(1-x)\,dx =$$

$$\begin{cases} 2x - x^2 = u \Rightarrow (2 - 2x)\,dx = du \\ e^{-x}\,dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x}\,dx = \int e^t\,(-dt) = -\int e^t\,dt = -e^t = -e^x \\ -x = t \Rightarrow -dx = dt \Rightarrow dx = -dt \end{cases}$$

Continuación del Problema 2B de la Propuesta B

$$I=\int 2xe^{-x}\,dx-\int x^2e^{-x}\,dx=\left(2x-x^2\right)e^{-x}+2\int e^{-x}(1-x)\,dx=\left(2x-x^2\right)e^{-x}+2\left[-(1-x)e^{-x}-\int\left(-e^{-x}\right)(-dx)\right]$$

$$\begin{cases} 1-x=u\Rightarrow -dx=du \\ e^{-x}\,dx=dv\Rightarrow v=\int e^{-x}\,dx=\int e^{t}\,(-dt)=-\int e^{t}\,dt=-e^{t}=-e^{x} \end{cases}$$

$$I=\int 2xe^{-x}\,dx-\int x^2e^{-x}\,dx=\left(2x-x^2\right)e^{-x}-2\,(1-x)e^{-x}-2\int e^{-x}\,dx=\left(2x-x^2-2+2x\right)e^{-x}+2e^{-x}$$

$$I=\int 2xe^{-x}\,dx-\int x^2e^{-x}\,dx=\left(4x-x^2+2x\right)e^{-x}+K$$

$$A=\int_0^2 2xe^{-x}\,dx-\int_0^2 x^2e^{-x}\,dx=\left[\left(4x-x^2\right)e^{-x}\right]_0^2=\left(4\cdot 2-2^2\right)e^{-2}-\left(4\cdot 0-0^2\right)e^{-0}=4\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}u^2$$

3B. a) Encuentra los valores del parámetro a∈ R para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para **a = 2** calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**

c) Para **a = 0** calcula razonadamente el valor de los determinantes $\left|A^{-1}\right|\ y\ \left|2A\right|$. (0,5 puntos)

a) Para que una matriz tenga inversa debe de cumplirse que su determinante no sea nulo

$$A=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a-1 & a-1 & 0 \\ a-2a+2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} a-1 & a-1 \\ 2-a & -2 \end{vmatrix}=-[-2\cdot(a-1)-(2-a)\cdot(a-1)]$$

$$A=-[-(2+2-a)\cdot(a-1)]=(4-a)\cdot(a-1)\Rightarrow A=0\Rightarrow(4-a)\cdot(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases} 4-a=0\Rightarrow a=4 \\ a-1=0\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{1\,,\,4\}\Rightarrow A\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$b)$

$$a=2\Rightarrow A=(4-2)\cdot(2-1)=2\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A^t=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I\Rightarrow Comprobado$$

Continuación del Problema 2B de la Propuesta B

$c)$

$$a = 0 \Rightarrow A = (0-2)\cdot(0-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 2^3 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,-1)$ y $\vec{w} = (2,0,3)$

a) Determina el valor de $\lambda \in \Re$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto **P(2 , 0 , 2)** y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

a) Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{u-\lambda v} = (0,1,1) - \lambda(1,1,-1) = (0,1,1) - (\lambda,\lambda,-\lambda) = (-\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda) \\ \vec{w} = (2,0,3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u-\lambda v} \perp \vec{w} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{u-\lambda v}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow (-\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)\cdot(2,0,3) = 0 \Rightarrow -2\lambda + 3 + 3\lambda = 0 \Rightarrow 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

$b)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \textit{Son linealmente independientes}$$

c) La recta r tendrá como vector director al que resulta de hallar el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{v_r} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - \vec{i} = \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{v_r} = (0,1,-1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

5B. a) El 60% del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30% vota a A, el 50% a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencia son: el 10% vota a A, el 60% a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. (0,75 puntos)

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. (0,5 puntos)

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuantos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. (0,75 puntos)

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. (0,5 puntos)

a)

El 60% del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30% vota a A, el 50% a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencia son: el 10% vota a A, el 60% a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1)
Ser hombre y votante de C. (0,75 puntos)

Llamemos A, B, C, H y M, a los sucesos siguientes, “Votar partido A”, “Votar partido B”, “Votar partido C”, “Hombre" y "Mujer", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	A = partido A	B = partido B	C = partido C	Total
Hombre = H	10% de 0'4	60% de 0'4	**30% de 0'4**	**40% = 0'4**
Mujer = M	30% de 0'6	50% de 0'6	**20% de 0'6**	60% = 0'6
Total				100% = 1

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	A = partido A	B = partido B	C = partido C	Total
Hombre = H	0'1·0'4 = 0'04	0'6·0'4 = 0'24	**0'3·0'4 = 0'12**	**40% = 0'4**
Mujer = M	0'3·0'6 = 0'18	0'5·0'6 = 0'3	**0'2·0'6 = 0'12**	60% = 0'6
Total	**0'22**	**0'54**	**0'24**	100% = 1

Piden la probabilidad de ser hombre y votante de C.

p(hombre y votante de C) = $p(H\cap C) = \dfrac{\text{Total hombre y votante de C en \%}}{\text{Total de personas en \%}}$ **= 0'12/1= 0'12**.

a2)
Si resultó ser votante de B, que sea mujer.

Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **p(M/B)** = $\dfrac{p(M\cap B)}{p(B)} =$

$= \dfrac{\text{Total mujer y votante de B en \%}}{\text{Total votantes de B en \%}}$ **= 0'3/0'54 = 5/9 ≅ 0'555556.**

b)
Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

¿Cuantos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. (0,75 puntos)

Tenemos 1000 opositores siguiendo una normal $N(\mu,\sigma) = N(4'05,\ 2'5)$

Me piden opositores que han superado el 5 = **nº opositores·(probabilidad de superar el 5) =**

= 1000·p(X ≥ 5) = {tipificamos} = $1000\cdot p\left(Z \geq \dfrac{5 - 4'05}{2'5}\right)$ = 1000·p(Z ≥ 0'38) = 1000·[1 - p(Z ≥ 0'38)] =

= {miro en la tabla} = 1000·(1 – 0'648) **= 1000·0'352 = 352 opositores han superado el 5.**

b2)
Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. (0,5 puntos)

Seas k = aprobar, si se adjudican 330 plazas tenemos que p(Z ≥ k) = 330/1000 = 0'33.
Sabemos que p(Z ≤ k) = 1 - p(Z ≤ k) = 1 – 0'33 = 0'67, y mirando en la N(0,1) vemos que k = 0'44.

Tipificando tenemos $0'44 = \dfrac{X - 4'05}{2'5}$, de donde **X =** 0'44·2'5 + 4'05 **= 5'15, que es la nota de corte para adjudicar 330 plazas.**