Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(1)
	Convocatoria:

Instrucciones:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN A

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima. (2,5 ptos)

2. Dadas las matrices:
$A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2

   a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$ (0,5 ptos)
   b) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$ (1,5 ptos)
   c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$ (0,5 ptos)

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:

   a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,\ 2,\ 3)$ (1,5 ptos)
   b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:

   a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses. (0,75 ptos)

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años? (0,75 ptos)

   c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años? (1 pto)

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función f, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x)=\begin{cases} a-x & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{b}{x}-\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio.
Escribir la función resultante. (2,5 ptos)

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: (2,5 ptos)

$$\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

3. Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4,17,0)$ (1,25 ptos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1.25 ptos)

4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

   a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas. (0,5 ptos)

   b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos. (1 pto)

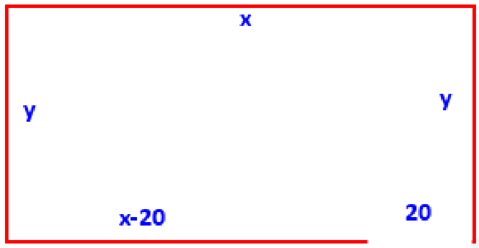
   c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B? (1 pto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima. (2,5 ptos)

Dado el terreno de forma:



Su perímetro de valla es 100 metros, luego:

$100 = 2y + x + x - 20 \Rightarrow 120 = 2x + 2y \Rightarrow 60 = x + y \Rightarrow y = 60 - x$

El área del terreno es $Área = x \cdot y = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2$

La función a maximizar es $A(x) = 60x - x^2$

Calculemos su derivada: $A'(x) = 60 - 2x$

Igualamos a cero y hallamos sus posibles máximos:

$A'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 2x = 0 \Rightarrow 60 = 2x \Rightarrow x = 30\ metros$

Como $A''(x) = -2 < 0$, el valor de 30 metros es un máximo de la función área y su valor es $A(30) = 60 \cdot 30 - 30^2 = 1800 - 900 = 900\ m^2$. Las dimensiones son de 30 y 30 m.

2. Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$ (0,5 ptos)

b) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$ (1,5 ptos)

c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$ (0,5 ptos)

a) $B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$

Quedando el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = x \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ x + 1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1$$

b) Calculemos la inversa de B:

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^{T}\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}+1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

La ecuación que hay que resolver queda:

$$A-I_2=B^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x-1 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}x-1=-1\\ 1=1\\ 1=1\\ x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=0$$

c) $$A\cdot B=I_2\Rightarrow\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & x+1\\ x+1 & 1+x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}1=1\\ x+1=0\\ x+1=0\\ x+2=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=-1$$

3. Dados los planos $\pi_1\equiv x-y+3=0$ y $\pi_2\equiv 2x+y-z=0$, calcular:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,\ 2,\ 3)$ (1,5 ptos)

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

a) La recta paralela a los planos π_1 y π_2 debe tener su vector director perpendicular a los vectores normales de ambos planos y por tanto será el producto vectorial de dichos vectores normales. Calculemos dicho producto vectorial:

$$\left.\begin{matrix}\pi_1\equiv x-y+3=0\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(1,-1,0)\\ \pi_2\equiv 2x+y-z=0\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(2,1,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_s}=i+k-(-2k-j)=i+j+3k=(1,1,3)$$

La ecuación de la recta se obtiene:

$$\left.\begin{matrix}\text{Pasa por el punto } B(2,\ 2,\ 3)\\ \text{vector director } \overrightarrow{v_s}=(1,1,3)\end{matrix}\right\}\Rightarrow s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$$

La ecuación continua de la recta es $s\equiv x-2=y-2=\dfrac{z-3}{3}$

b) Antes de calcular l ángulo formado por los planos determinemos su posición relativa:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-y+3=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,-1,0) \\ \pi_2 \equiv 2x+y-z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(2,1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-1}$$

Los planos son secantes y el ángulo que forman depende del ángulo que forman sus vectores normales:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-y+3=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,-1,0) \\ \pi_2 \equiv 2x+y-z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(2,1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{(1,-1,0)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=$$

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{2-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow \left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\text{arc cos}\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)=73,2^{\circ}$$

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es $73,2^{\circ}$

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:

   a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses. (0,75 ptos)
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años? (0,75 ptos)
   c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años? (1 pto)

a) Si llamamos X=Número de meses en devolución de un préstamo de 18000 €. X=N(60, 8).

$$P(X<70)=P\left(\frac{X-60}{8}<\frac{70-60}{8}\right)=P(Z<1,25)=0,8944$$

b) 4 años son 48 meses.

$$P(X>48)=P\left(\frac{X-60}{8}>\frac{48-60}{8}\right)=P(Z>-1,5)=P(Z<1,5)=0,9332$$

c) 4 años son 48 meses y 6 años son 72 meses.

$$P(48<X<72)=P\left(\frac{48-60}{8}<\frac{X-60}{8}<\frac{72-60}{8}\right)=P(-1,5<Z<1,5)=$$

$$=P(Z<1,5)-P(Z<-1,5)=0,9332-(1-P(Z<1,5))=$$

$$=0,9332-0,0668=0,8664$$

Como piden el porcentaje, será un 86,64% de los préstamos son devueltos entre los 4 y los 6 años.

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función f, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x)=\begin{cases} a-x & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{b}{x}-\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio.
Escribir la función resultante. (2,5 ptos)

Para ser derivable debe ser continua y debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x}-\ln x=\frac{b}{1}-\ln 1=b \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} a-x=a-1 \\ f(1)=\mathrm{a}-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a-1=b$$

La derivada de la función en x≠1 es:

$$f\,'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<1 \\ -\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

La derivada por la izquierda en 1 es $f\,'\left(1^-\right)=-1$

La derivada por la derecha en 1 es $f\,'\left(1^+\right)=-\dfrac{b}{1^2}-\dfrac{1}{1}=-b-1$

Para que la función sea derivable en x=1 deben ser iguales las derivadas laterales:
$-1=-b-1 \Rightarrow b=0$

Y sustituyendo en la igualdad $a-1=b \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$

Los valores pedidos son a = 1 y b = 0

La función resultante es:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & si \quad x\le 1 \\ -\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: (2,5 ptos)

$$\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema multiplicamos por –2 la segunda ecuación y sumamos las 2 ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ -2X+4Y=\begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 7Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$7Y = \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación inicial:

$$X - 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r
   a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4,17,0)$ (1,25 ptos)

   b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1.25 ptos)

a) Determinemos la recta r y su vector director:

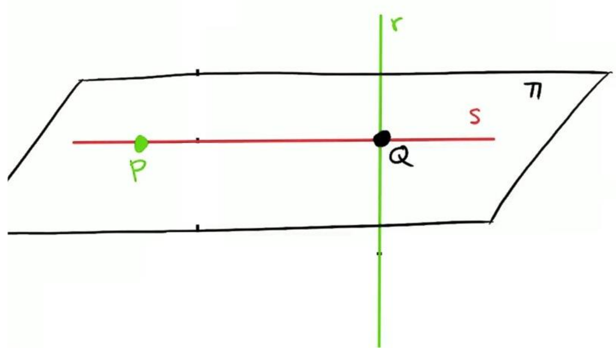
$$\left.\begin{array}{l} A(2,-1,1) \\ B(-2,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (-2,3,1)-(2,-1,1) = (-4,4,0)$$

El vector director de la r lo podemos simplificar dividiendo por 4 y tomar $\overrightarrow{v_r} = (-1,1,0)$

Así la ecuación de la recta r es:

$$r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = -1+t \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Determinemos el plano π perpendicular a la recta r y luego hallemos el punto Q de corte de plano π y recta r. La recta perpendicular pedida será la que pase por los puntos P y Q.



Π tiene como vector normal el director de la recta $\overrightarrow{v_r} = (-1,1,0)$, el plano tendrá la ecuación: $-x+y+D=0$. Como además pasa por $P(-4,17,0)$ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+D=0 \\ P(-4,17,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 4+17+D=0 \Rightarrow D=-21$$

El plano es $\pi \equiv -x+y-21=0$

El punto de corte del plano y recta se obtiene de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -x+y-21=0 \\ x=2-t \\ y=-1+t \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -(2-t)-1+t-21=0 \Rightarrow 2t-24=0 \Rightarrow t=\frac{24}{2}=12$$

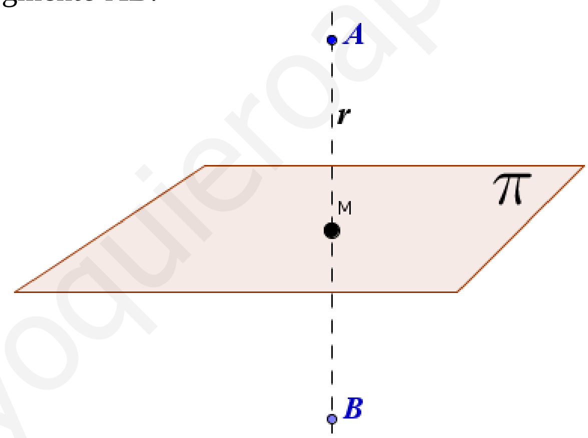
$$\left.\begin{array}{l} x=2-12 \\ y=-1+12 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-10 \\ y=11 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

El punto Q tiene coordenadas (–10, 11, 1)

La recta que buscamos tiene como vector director:
$\vec{v_s}=\overrightarrow{PQ}=(-10,11,1)-(-4,17,0)=(-6,-6,1)$

Y la recta tiene ecuación: $s \equiv \left.\begin{array}{l} x=-4-6t \\ y=17-6t \\ z=t \end{array}\right\}$

b) El plano pedido es un plano perpendicular a la recta r que contiene a los dos puntos y que pasa por el punto medio del segmento AB.



El plano pasa por el punto $M=\frac{A+B}{2}=\frac{(2,-1,1)+(-2,3,1)}{2}=(0,1,1)$ y su vector normal es el director de la recta r → $\vec{n}=\vec{v_r}=(-1,1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pasa por } M=(0,1,1) \\ \vec{n}=(-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Pasa por } M=(0,1,1) \\ -x+y+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0+1+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \pi: -x+y-1=0$$

El plano pedido tiene ecuación $\pi: -x+y-1=0$

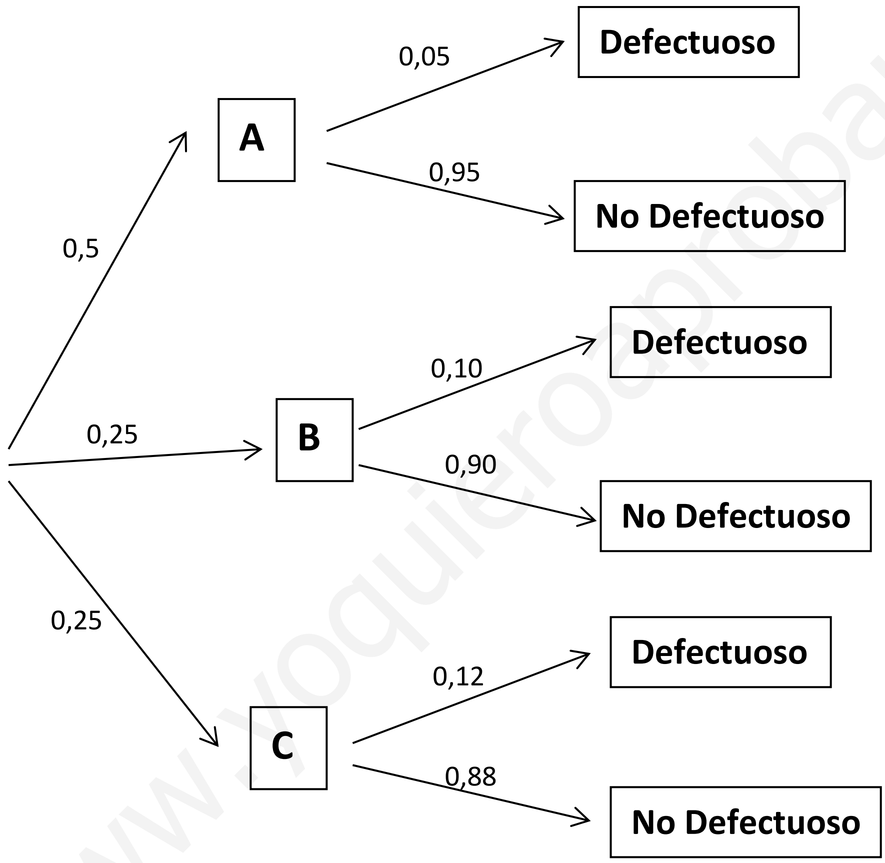
4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

   a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas. (0,5 ptos)

   b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos. (1 pto)

   c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B? (1 pto)

a)



b)

$$P(Defectuoso) = P(\text{Venga de A y sea defectuoso}) + P(\text{Venga de B y sea defectuoso}) +$$

$$+P(\text{Venga de C y sea defectuoso}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,12 = 0,025 + 0,025 + 0,03 = 0,08$$

c) $$P(\text{Sea de B / No defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea de B y no defectuoso})}{P(\text{No defectuoso})} = \frac{0,25 \cdot 0,9}{1-0,08} = 0,24$$