Modelo 3

<u>Nota sobre la puntuación de las preguntas:</u> Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

OPCIÓN A

1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela y cada cuadrado con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm?

Criterios

Plantear la función objetivo $Coste = C(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ **(0.5 ptos)**

Plantear la ecuación de la suma de los perímetros

$P(x,y) = 4x + 4y = 100\ cm \ \rightarrow y = 25 - x$ **(0.5 ptos)**

Sustituir y en la función de Coste

$C(x,y) = 2x^2 + 3y^2 \rightarrow C(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2 = 5x^{2\prime}150x + 1875$ **(0.5 ptos)**

Hallar la primera derivada, igualar a 0 y despejar x

$C'(x) = 10x - 150 = 0 \rightarrow x = \dfrac{150}{10} = 15\,cm \ \rightarrow y = 10\ cm$ **(0.5 ptos)**

Hallar la segunda derivada

$C''(x) = 10 > 0 \rightarrow$ existe un mínimo en $x = 15$ **(0.5 ptos)**

2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación $AB - CX = I$

siendo las matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Criterios

Despejar la matriz $X = C^{-1}(AB - I)$ **(0.5 ptos)**

Hallar la matriz inversa $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(0.75 ptos)**

Hallar la matriz $AB=\begin{pmatrix}0 & 15\\ 6 & -13\end{pmatrix}$ y $AB-I=\begin{pmatrix}-1 & 15\\ 6 & -14\end{pmatrix}$ **(0.5 ptos)**

Hacer operaciones y obtener $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 15\\ 11 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{15}{2}\\ \frac{11}{2} & \frac{-13}{2}\end{pmatrix}$ **(0.75 ptos)**

3.- Estudiar la posición relativa de los planos

$\alpha: 2x+3y-5z+7=0$

$\beta: 3x+2y+3z-1=0$

$\gamma: 7x+8y-7z+13=0$

Criterios

Discutir el rango de la matriz C de coeficientes y de la matriz ampliada A

[OJO: 3ª fila =(1ª fila)·2 + 2ª fila]

$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 3 & 2 & 3\\ 7 & 8 & -7\end{pmatrix}$ $\det C=0$ $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5\neq 0\rightarrow rgC=2$ **(1 pto)**

$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 7\\ 3 & 2 & 3 & -1\\ 7 & 8 & -7 & 13\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}2 & 3 & 7\\ 3 & 2 & -1\\ 7 & 8 & 13\end{vmatrix}=0\rightarrow rgA=2$ **(1 pto)**

$rgC=rgA=2$, los tres planos se cortan en una recta **(0.5 ptos)**

4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben, que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y 10% de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, cual es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica *C*?

Criterios

Definimos los sucesos: **(0.25 ptos)**

A = "el motor se produce en la fábrica A"

B = "el motor se produce en la fábrica B"

C = "el motor se produce en la fábrica C"

D = "el motor es defectuoso"

Diagrama de árbol

$$\begin{array}{l} \qquad\ \ 0.05 \\ 0.3\ A \ \rightarrow\ D \\ \nearrow \\ 0.2 \quad\ 0.2 \\ \rightarrow\ B \rightarrow D \\ \searrow \\ 0.5 \quad\ 0.1 \\ \qquad C \rightarrow D \end{array}$$

a) La probabilidad de que un motor elegido al azar esté defectuoso es,

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$
$$P(D) = (0.3)(0.05) + (0.2)(0.2) + (0.5)(0.1) = 0.105$$

(1 pto)

b) La probabilidad de que el motor defectuoso no haya sido producido por la fábrica C es,

$$1 - P(C/D) = 1 - \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = 1 - \frac{(0.5)(0.1)}{0.105} = 0.5238$$

(1.25 ptos)

Modelo 3

OPCIÓN B

1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x)=a\sqrt{3x+3}+b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto (2,8)

Criterios

Si f tiene un punto de inflexión en (2,8) entonces, **(0.5 ptos)**

$f(2)=3a+b=8$

$f''(2)=0$

Hallamos la segunda derivada,

$$f'(x)=\frac{3a}{2\sqrt{3x+3}}+\frac{b}{2\sqrt{x-1}}$$ **(0.5 ptos)**

$$f''(x)=\frac{-9a}{4(3x+3)\sqrt{3x+3}}-\frac{b}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$ **(0.5 ptos)**

$$f''(2)=\frac{-a}{12}-\frac{b}{4}=0\rightarrow a+3b=0$$ **(0.5 ptos)**

Planteamos y resolvemos el sistema,

$$\left.\begin{array}{l}3a+b=8\\a+3b=0\end{array}\right\}\qquad a=3;\ b=-1$$ **(0. 5 ptos)**

2.- Considerar el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\2x+ky+z=2\\x+y+kz=k-1\end{array}\right\}$

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k

b) Resolver el sistema para $k = 1$

Criterios

a) Matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&k&1\\1&1&k\end{pmatrix}$

Matriz ampliada $A/b=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&k&1&2\\1&1&k&k-1\end{pmatrix}$ **(0.25 ptos)**

$\det(A)=k^2-3k+2$; de donde $\det(A)=0$ si $k=1$ o $k=2$ **(0.25 ptos)**

Discusión según los valores del parámetro k (Teorema de Rouche Frobenius)

$k \neq \{1,2\}$ rg A = 3 = rg (A/b) = número de incógnitas. Sistema compatible determinado **(0.25 ptos)**

- Para $k = 1$

Para la matriz ampliada se tiene,

$$A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow rg(A/b) = 2$$ [1ª fila = 3ª fila] **(0.25 ptos)**

$rgA = 2 = rg(A/b) <$ nº de incógnitas $= 3$ Sistema compatible indeterminado **(0.25 ptos)**

- Para $k = 2$

$$A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow rg(A/b) = 3$$

$rgA = 2 \neq 3 = rg(A/b)$ Sistema incompatible **(0.25 ptos)**

b) Para k = 1, el sistema es compatible indeterminado, hallamos la solución en función de un parámetro (existen varias soluciones)

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x+y-z \\ 2x+y=2-z \end{matrix}\right\} \rightarrow x = 2; \;\; y = -2-z$$ **(1 pto)**

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{3}$, se pide

a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias.

b) Hallar la ecuación del plano que determinan.

Criterios

Vector director de $r_1 : v_1 = (1,-1,2)$, Punto A de $r_1, A(1,1,-2)$ **(0.25 ptos)**

Vector director de $r_2 : v_2 = (4,-2,3)$, Punto B de $r_2, B(-5,3,-4)$ **(0.25 ptos)**

Vector $\overrightarrow{AB} = (-6,2,-2)$ **(0.25 ptos)**

Si r_1 y r_2 son coplanarias, entonces v_1, v_2 y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes. En efecto, **(0.25 ptos)**

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \overline{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4+18+16-24-6-8=0 \quad \textbf{(0.5 ptos)}$$

b) La ecuación del plano que determinan viene dada por,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x+5y+2z-2=0 \qquad \textbf{(1 pto)}$$

4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas, estuvieran viendo el programa.

a) Tres o menos personas.

b) Ninguna de las 10 personas.

Criterios

Se define la variable X: "número de personas que reciben llamada desde el concurso"

"éxito"= Que una persona reciba la llamada del concurso $p=0.3 \;\; q=0.7$

$X \sim B(n,p) = B(10,0.3)$ **(0.5 ptos)**

a) Que 3 o menos personas reciban la llamada

$P(X \leq 3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) =$ **(0.5 ptos)**

$$=\binom{10}{0}p^0q^{10}+\binom{10}{1}pq^9+\binom{10}{2}p^2q^8+\binom{10}{3}p^3q^7=$$

$$=\frac{10!}{0!(10-0)!}(0.3)^0(0.7)^{10}+\frac{10!}{1!(10-1)!}(0.3)^1(0.7)^9+\frac{10!}{2!(10-2)!}(0.3)^2(0.7)^8+\frac{10!}{3!(10-3)!}(0.3)^3(0.7)^7=$$

$= 0.6496$ **(0.5 ptos)**

b) Ninguna de las 10 personas reciba la llamada

$$P(X=0)=\binom{10}{0}p^0q^{10}=\frac{10!}{0!(10-0)!}(0.3)^0(0.7)^{10}=0.0282 \qquad \textbf{(1 pto)}$$