

REGLA DE L'HOPITAL: Indeterminaciones $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ Se aplica directamente

Otras indeterminaciones, es necesario operar.

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot (\pm\infty), \infty - \infty, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0, 0^0$$

Para aplicarla a Indeterminaciones 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞ tomar $\ln$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

Indeterminación de la forma $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1 \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x}e - 1)$

Indeterminación de la forma $\{\infty \cdot 0\}$. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x}e - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$

Indeterminación de la forma $\{\infty - \infty\}$. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \cdot \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (x)^x$

Indeterminación de la forma 0^0 . Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x)^x = k \Rightarrow \ln k = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x)^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left((x)^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

Por lo tanto: $\ln k = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$$\ln k = 0 \Rightarrow k = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x)^x = 1$$

46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Enunciar previamente la regla.

47. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{1}{e}$

48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x} = -2$

49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

50. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

51. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = -\frac{1}{4}$

53. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$

54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

55. (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = -2$

56. (S) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln^3 x + 2x} = \frac{1}{2}$

57. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$

58. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x = 0$

59. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \tan \frac{\pi x}{2} = -\frac{4}{\pi}$

60. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}$

61. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$

62. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = \infty$

63. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1$

76. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

77. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\ln(\cos x)} = 0$

78. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - (2+x)}{x^2} = 0$

79. (S) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

80. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\sqrt{x}} = 0$

81. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + e^x)^{1/x} = e^2$

82. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x} = 1$

Resolución

81) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = A$ Indeterminación 0^0 Tomamos $\ln$, $\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$
(propiedades de límites funciones y propiedades de logaritmos)

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(x + e^x) \quad \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(x + e^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + e^x)}{x} \left(\frac{0}{0} \right) \text{ L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^x}{x+e^x} = 2 \quad \text{Por tanto } \ln A = 2 \Rightarrow A = e^2$$

Resolución

81) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x} = A$ Indeterminación ∞^0 Tomamos $\ln$

(propiedades de límites funciones y propiedades de logaritmos)

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x} \quad \ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x}$$

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \left(\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x (\ln 1 - \ln x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \ln x}{\frac{1}{\sin x}} \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ L'Hopital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{\frac{x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin^2 x}{x \cos x} \left(\frac{0}{0} \text{ L'Hôpital} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = 0 \quad \text{Por tanto } \ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1$$