Ejercicio 1.

Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B - C = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$X \in M_{3\times 2}$ *. La mejor forma de resolver esta ecuación matricial, dado que las matrices que intervienen en el producto tienen pocos ceros, es la siguiente:*

$$A \cdot X \cdot B - C = D \Rightarrow A \cdot X \cdot B = D + C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D+C) \cdot B^{-1}$$

$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot (D+C) \cdot B^{-1}$ *, entonces calculamos las inversas de A y B*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 12 - 3 = -2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2$$

$$\begin{matrix} B_{11} = 1 & B_{21} = -(-3) = 3 \\ B_{12} = -1 & B_{22} = -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 4 \\ 19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}_{F_1=F_1+F_2+F_3} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix}_{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1}} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Ejercicio 3.

Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y halla A^{-1} para x =3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x^2+6-1 = 5-x^2$$

$$A^{-1} \text{ existe} \Leftrightarrow |A| \neq 0\,;\; 5-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \Rightarrow A \text{ admite inversa si } x \neq \sqrt{5} \text{ y } x \neq -\sqrt{5}$$

$$\text{para } x=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \;;\; |A| = -4$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 18 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \quad \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Ejercicio 4.

Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}_{\substack{C_1=C_1-C_5 \\ C_2=C_2-C_5 \\ C_3=C_3-C_5 \\ C_4=C_4-C_5}} = \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 1-a \end{vmatrix}_{F_5=F_5+F_1+F_2+F_3+F_4} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+3a \end{vmatrix} = (1-2a)^4 \cdot (1+3a)$$