

Límites. Regla de L'Hôpital

1. Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

(Septiembre 1999)

Solución:

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Llamemos $f(x) = \operatorname{tg} x - 8$ y

$g(x) = \sec x + 10 = \frac{1}{\cos x} + 10$. Entonces f y g son derivables en su dominio de definición

(en particular en $\frac{\pi}{2}$ y en un entorno suyo):

$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ y } g'(x) = \frac{-1}{\cos^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$\text{De este modo, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Al ser f y g son derivables en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se

$$\text{tiene que } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10} = 1. \dagger$$

2. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

Solución:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Llamemos $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ y

$g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$. Entonces f y g son derivables en su dominio de definición (en particular en 0 y en un entorno suyo):

$$f'(x) = 1 - \cos x \text{ y } g'(x) = \sec^2 x - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{1 - \cos^3 x} \quad \mathbf{(1)}$$
, que vuelve a ser una

indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Llamemos $\cos x = z$. Entonces $1 - \cos^3 x = 1 - z^3$. Pero, aplicando la regla de Ruffini, $1 - z^3 = -z^3 + 1 = (z - 1)(-z^2 - z - 1) = (1 - z)(z^2 + z + 1)$. Por tanto se tiene que $1 - \cos^3 x = (1 - \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)$. Luego la expresión **(1)** es igual a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(\cos^2 x + \cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \cos x + 1} = \frac{1}{3}.$$

Como f y g son derivables en un entorno de 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital y se

$$\text{tiene que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3}$$

Se puede aplicar otra vez la regla de L'Hôpital pues la derivada de $f(x)$, $f'(x) = \cos^2 x (1 - \cos x) = \cos^2 x - \cos^3 x$, y la derivada de $g(x)$, $g'(x) = 1 - \cos^3 x$, vuelven a ser derivables en un entorno de 0:

$$f''(x) = 2 \cos x (-\operatorname{sen} x) - 3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x (3 \cos^2 x - 2 \cos x)$$

$$g''(x) = -3 \cos^2 x (-\operatorname{sen} x) = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x$$

$$\text{Entonces } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (3 \cos^2 x - 2 \cos x)}{3 \operatorname{sen} x \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x - 2 \cos x}{3 \cos^2 x} = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3}.$$

3. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = [\text{Indeterminación del tipo } \frac{0}{0}]. \text{ Procediendo como en los dos ejercicios}$$

anteriores, aplicamos la regla de L'Hôpital, pues tanto $f(x) = 1 - \cos x$ como $g(x) = (e^x - 1)^2$ son funciones derivable en todo \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2(e^{2x} - e^x)}, \text{ que vuelve a ser una indeterminación del}$$

tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos pues la regla de L'Hôpital a $f'(x)$ y a $g'(x)$, que son también derivables

$$\text{en todo } \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(2e^{2x} - e^x)} = \frac{1}{2(2 - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{2}.$$

4. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$

Solución:

Regla de L'Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_0 , verificando:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0$ en cualquier $x \neq x_0$ del intervalo
- Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)}$ [Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$]. Tanto $f(x) = 4(x - \ln(1+x))$ como

$g(x) = x \ln(1+x)$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (que en ambos casos es $(-1, +\infty)$, pues el logaritmo está definido para todo $x > -1$), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$f'(x) = 4 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) = 4 \left(\frac{x}{1+x} \right) = \frac{4x}{1+x}$$

$$g'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{(1+x)\ln(1+x) + x}, \text{ que vuelve a ser}$$

una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $f'(x)$

y $g'(x)$, pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

$$f''(x) = 4$$

$$g''(x) = \ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} + 1 = \ln(1+x) + 2$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\ln(1+x) + 2} = \frac{4}{0+2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)} = 2. \dagger$$

5. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$
(L = logaritmo neperiano)

Solución:

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio anterior.

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Operando tenemos

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - L(1+x)}{x \cdot L(1+x)}$, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Llamemos

$f(x) = x - L(1+x)$ y $g(x) = x \cdot L(1+x)$, que son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (en ambos casos es $(-1, +\infty)$, pues el logaritmo está definido para todo $x > 0$), y en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de

L'Hôpital tendremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \quad g'(x) = L(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x) \cdot L(1+x) + x}{1+x}$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x) \cdot L(1+x) + x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x) \cdot L(1+x) + x}$, que vuelve a

ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$, pues estas vuelven a ser derivables en un entorno de cero, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$f''(x) = 1$$

$$g''(x) = L(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} + 1 = L(1+x) + 2$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{L(1+x) + 2} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(x - \ln(1+x))}{x \ln(1+x)} = \frac{1}{2}$$

6. Enuncia la regla de L'Hôpital. Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

Solución:

El enunciado de la regla de L'Hôpital se encuentra en el ejercicio 4.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$ [Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$]. Tanto $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ como

$g(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ son funciones derivables en sus respectivos dominios de definición (f es derivable en todo \mathbb{R} y g es derivable en $\mathbb{R} - \{ \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$), en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad g'(x) = \sec^2 x - \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{1 - \cos^3 x}$, que vuelve a ser una

indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos ahora la regla de L'Hôpital a las funciones

$f'(x)$ y $g'(x)$, pues estas son también derivables en un entorno de cero, con lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$$f''(x) = 2 \cos x (-\sin x) - 3 \cos^2 x (-\sin x) = 3 \cos^2 x \cdot \sin x - 2 \cos x \cdot \sin x$$

$$g''(x) = 3 \cos^2 x (-\sin x) = -3 \cos^2 x \cdot \sin x$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x - 2 \cos x \cdot \sin x}{-3 \cos^2 x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{2}{3 \cos x} \right) = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} = -\frac{1}{3} \cdot \dagger$$

7. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} \quad ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ [Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$]. Tanto $f(x) = x^3 - 8x^2 + 7x$ como $g(x) = x^2 - x$ son funciones derivables en todo \mathbb{R} , en particular son derivables en un entorno de cero. Aplicando la regla de L'Hôpital tendremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 7, \quad g'(x) = 2x - 1$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 16x + 7}{2x - 1} = -7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = -7$$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$ da lugar a una indeterminación del tipo 1^∞ . Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = L, \quad \text{entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] = \ln L \quad (\text{el logaritmo}$$

neperiano es una función continua, por tanto el logaritmo del límite coincide con el

$$\text{límite del logaritmo). Entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}{\cos x}$$
, que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Las funciones $f(x) = \ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)$ y $g(x) = \cos x$ son derivables en todo

i , en particular lo son en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)} \cdot \left(\frac{2}{\pi} - \operatorname{sen} x \right) = \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{2x + \pi \cos x} = \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{2x - \pi \cos x}; \quad g'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{2x - \pi \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x (2x - \pi \cos x)} = \frac{2 - \pi}{-2 \frac{\pi}{2}} = \frac{2 - \pi}{-\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} \right] = 1 - \frac{2}{\pi}.$

De este modo, $\ln L = 1 - \frac{2}{\pi} \Rightarrow L = e^{1 - \frac{2}{\pi}}$ y entonces $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{1 - \frac{2}{\pi}}.$