

Producto vectorial

Definición

El producto vectorial de dos vectores libres, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector que se designa por $\vec{u} \times \vec{v}$, se define del siguiente modo:

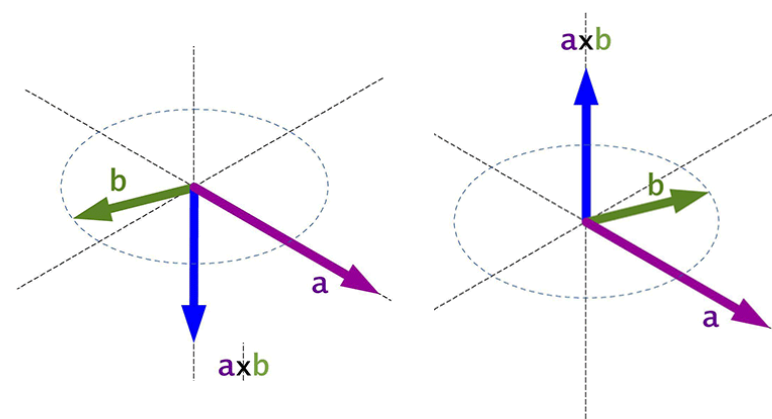
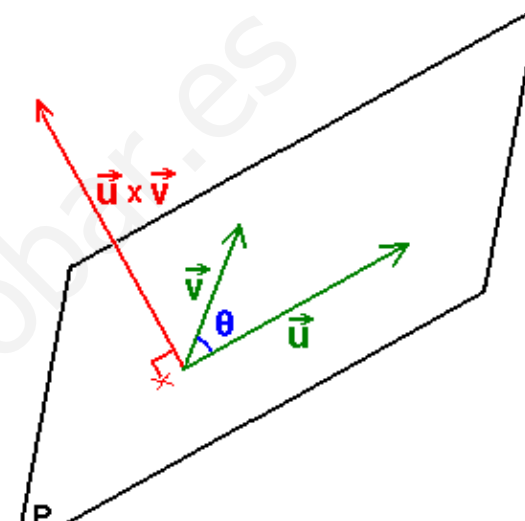
1. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulos, y no proporcionales, $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector caracterizado por: **(linealmente independientes)**

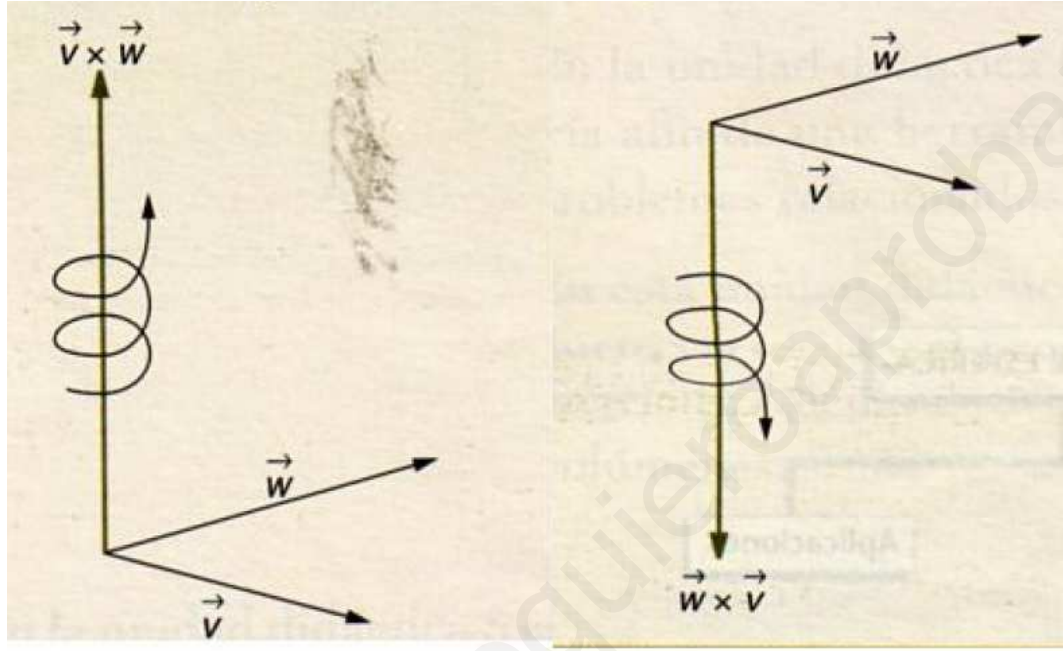
- **Módulo:** $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

- **Dirección:** La de la recta perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, [ver figura](#).

- **Sentido:** El de avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

2. $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ si:
$$\begin{cases} \vec{u} = 0 \\ \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son proporcionales. (linealmente dependientes)} \end{cases}$$





Propiedades del producto vectorial entre vectores

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

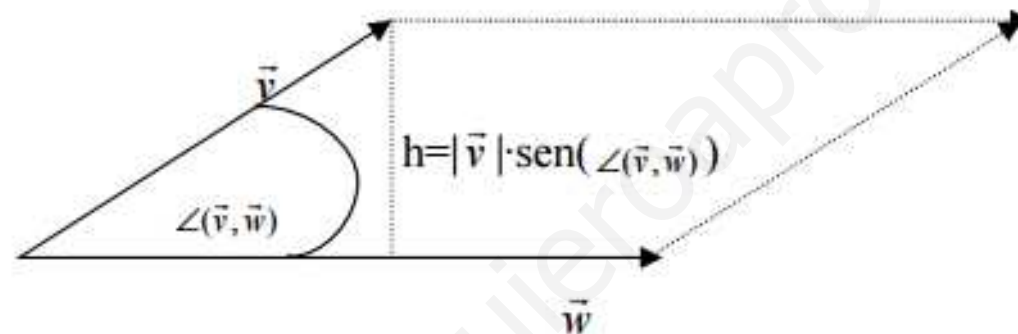
1. El producto vectorial es *anticonmutativo*: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. El producto vectorial de vectores paralelos es el vector nulo: Si $\mathbf{u} // \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. *Consecuencia propiedad (2)*: $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
4. Si uno de los vectores del producto vectorial es el vector nulo entonces el producto vectorial es el vector nulo: $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores (a derecha y a izquierda) teniendo en cuenta la anticonmutatividad de la operación:
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$
$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$$
6. Extracción de un escalar del producto vectorial: $(\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

7.-

No es asociativo : $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

2.2. Interpretación geométrica del producto vectorial

Sean dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con origen común. Si trasladamos el vector $\vec{w}$ sobre el extremo de $\vec{v}$ y el de $\vec{v}$ sobre el extremo de $\vec{w}$ se forma un paralelogramo (ver figura)

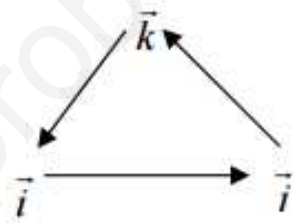
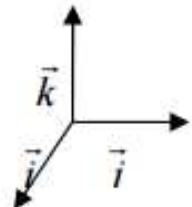


El área del paralelogramo es $|\vec{w}| \cdot h$ siendo $h = |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\angle(\vec{v}, \vec{w}))$. Así el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo forman

$$A_{\text{paralelogramos}} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\angle(\vec{v}, \vec{w})) = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

2.3. Expresión analítica del producto vectorial

Para calcular la expresión analítica del producto vectorial veamos el producto vectorial de los vectores unitarios:

$$\begin{array}{ll} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{array}$$


Componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

3. Producto Mixto de 3 vectores.

3.1. Definición

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es un valor numérico definido a partir del producto vectorial y escalar.

Definición: El producto mixto de 3 vectores, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ que se designa como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, se obtiene del producto escalar del primer vector por el vector resultante de multiplicar vectorialmente los otros dos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Propiedades del producto mixto:

- Si permutamos dos vectores del producto mixto este cambia de signo:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$$

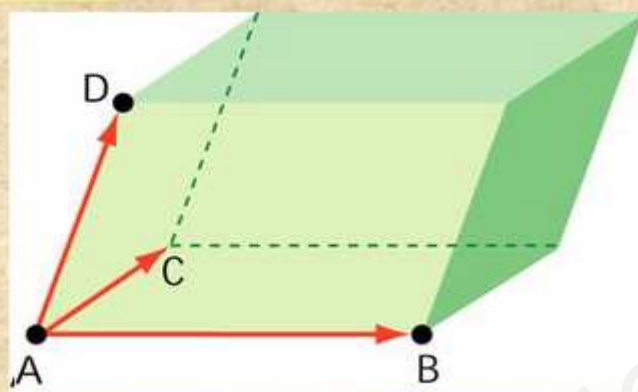
- El producto mixto es distributivo respecto a la suma de vectores:

$$[\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$$

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si algún vector es nulo o son coplanarios (linealmente dependientes).

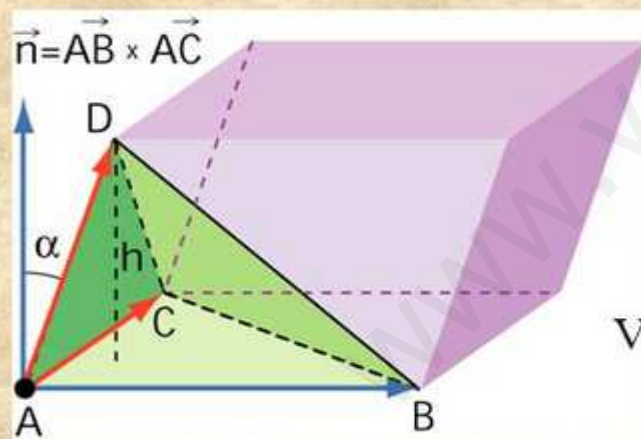
Volumen de paralelepípedos y tetraedros

Paralelepípedo



$$V = |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

Tetraedro



Por ser una pirámide: $V = (1/3) \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$

$$\text{Base} = S(ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\text{Altura} = h = |\vec{AD}| \cos(\widehat{\vec{AD}, \vec{h}}) \quad \text{Por tanto:}$$

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})| = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$