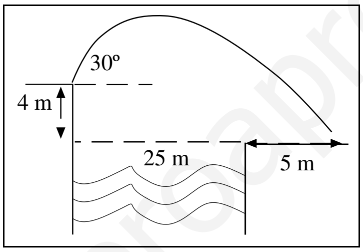
Problemas de Cinemática 1º Bachillerato

Tiro parabólico y movimiento circular

1. Hallar a qué velocidad hay que realizar un tiro parabólico para que llegue a una altura máxima de 100 m si el ángulo de tiro es de 30º.

2. Hallar a qué ángulo hay que realizar un tiro parabólico para que el alcance y la altura máxima sean iguales.

3. Un arquero quiere efectuar un tiro parabólico entre dos acantilados tal y como indica la figura. El acantilado de la izquierda se halla 4 m por arriba con respecto al de la derecha. Si el arquero sólo puede disparar con un ángulo de 30° y quiere lanzar las flechas a 5 m del acantilado de la derecha, calcula con qué velocidad mínima ha de lanzarlas. Calcula el tiempo de vuelo.



4. Un reloj de manecillas marca las 6:00 h. Hallar a qué hora se superponen las dos manecillas.

5. Si un cuerpo recorrre una circunferencia de 5 m de radio con la velocidad constante de 10 vueltas por minuto, ¿cuál es el valor del período, la frecuencia, la velocidad lineal, la velocidad angular y la aceleración normal?

6. ¿Qué velocidad angular, expresada en radianes por segundo, ha de tener una centrifugadora, para que en un punto situado a 10 cm del eje de giro produzca una aceleración normal 100 veces mayor que la de la gravedad?

7. Una rueda, puesta en movimiento por un motor, ha girado 0.5 radianes durante el primer segundo. ¿Cuántas vueltas dará la rueda en los 10 primeros segundos, suponiendo que la aceleración angular es constante durante ese tiempo? ¿Cuál será en ese instante la velocidad lineal de un punto de la llanta, si el radio de la rueda es de 50 cm? ¿Qué valor tendría la aceleración negativa de frenado, si el motor dejase de funcionar cuando la rueda gira a razón de 120 vueltas por segundo y ésta tardase 6 minutos en pararse?

8. Un motor gira a 2000 rpm y disminuye su velocidad pasando a 1000 rpm en 5 segundos. Calcular: a) La aceleración angular del motor; b) El número de revoluciones efectuadas en ese tiempo; c) la aceleración lineal de un punto de la periferia si el radio de giro es de 20 cm.

9. La velocidad angular de un motor que gira a 900 rpm desciende uniformemente hasta 300 rpm efectuando 50 revoluciones. Hallar: a) La aceleración angular; b) El tiempo necesario para realizar las 50 revoluciones.

Resolución de los problemas

Problema 1

Se trata de un tiro parabólico simple en el que el cuerpo se lanza desde el suelo y vuelve de nuevo a él. Las fórmulas en este caso son:

$$X = \frac{{v_0}^2 \ \sin 2\alpha}{-g} \qquad H_{max} = \frac{{v_0}^2 \ \sin^2\alpha}{-2g} \qquad t = \frac{2v_0 \ \sin\alpha}{-g} \tag{1}$$

Nos dicen que la altura máxima ha de ser 100 m y el ángulo de 30º, sustituyendo entonces en la fórmula de la altura máxima y despejando la velocidad inicial

$$100 = \frac{{v_0}^2 \ \sin^2 30}{-2 \cdot -9.8} \qquad {v_0}^2 = \frac{100 \cdot 2 \cdot 9.8}{0.5^2} = 7840 \qquad v_0 = \sqrt{7840} = 88.54 \text{ m/s}$$

Problema 2

La altura máxima y el alcance han de valer exactamente lo mismo. Así pues igualando la fórmula del alcance (X) con la altura máxima (H_{max}) en las ecuaciones 1 se tiene

$$\frac{{v_0}^2 \ \sin 2\alpha}{-g} = \frac{{v_0}^2 \ \sin^2\alpha}{-2g}$$

En la ecuación se cancelan las aceleraciones de la gravedad y las velocidades iniciales, por lo que el resultado al que vamos a llegar es independiente de la velocidad a la que se realiza el lanzamiento. Resulta pues la siguiente ecuación trigonométrica

$$\sin 2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{2}, \text{ y operando} \qquad 2\sin 2\alpha = \sin^2\alpha$$

Haciendo la sustitución trigonométrica del ángulo doble

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \ \cos\alpha$$

nos queda

$$2 \cdot 2 \sin\alpha\ \cos\alpha = \sin^2\alpha \tag{2}$$

Como buscamos ángulos diferentes de cero, $\alpha \neq 0$, tendremos también que $\sin\alpha \neq 0$ por lo tanto podemos cancelar un factor $\sin\alpha$ en cada miembro de la ecuación 2, que nos quedará

$$4\cos\alpha = \sin\alpha$$

$$4 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} 4 = 75.96^{\text{o}}$$

$\boxed{\text{Problema 3}}$

Se trata de un tiro parabólico, pero a diferencia de los anteriores el punto inicial y final no están a la misma altura con respecto al suelo por lo que las fórmulas 1 ya no son aplicables ahora. Hemos de plantearlo con las más generales que se deducen a partir de

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\ t + \frac{1}{2}\ \vec{g}\ t^2$$

Especificando para cada una de las componentes tenemos

$$(x, y) = (0, 4) + (v_0\ \cos 30,\ v_0\ \sin 30)\ t + \frac{1}{2}\ (0,\ -9.8)\ t^2$$

$$x = v_0 \cos 30\ t \tag{3}$$

$$y = 4 + v_0 \sin 30\ t - 4.9\ t^2 \tag{4}$$

Resulta más fácil resolver el último sistema de ecuaciones despejando v_0 de la ecuación 3 y sustituyendo en la ecuación 4. Calcularemos así el tiempo, pues resulta más fácil de resolver la ecuación que sale. Sustituyendo luego este tiempo en la ecuación 3 determinamos la velocidad. De la figura se ve que el alcance total del tiro parabólico es de 25+5=30 m. De la ecuación 3 tenemos pues según lo dicho

$$v_0 = \frac{30}{\cos 30\ t}$$

Como la flecha impacta en el suelo la altura final es cero, y la ecuación 4 nos queda

$$0 = 4 + \frac{30}{\cos 30\ t}\ \sin 30\ t - 4.9\ t^2$$

$$0 = 4 + 30\ \tan 30 - 4.9\ t^2$$

el valor de t que se obtiene de esta última ecuación es

$$t = \sqrt{\frac{4 + 30\ \tan 30}{4.9}} = 2.085 \text{ s}$$

y con la ecuación 3 calculamos la velocidad inicial

$$v_0 = \frac{30}{\cos 30\ t} = \frac{30}{\cos 30 \cdot 2.085} = 16.61 \text{ m/s}$$

El problema se podría haber resuelto directamente despejando directamente t en función de v_0 lo que ocurre es que la ecuación resultante es algo más tediosa de manipular.

Problema 4

Como las manecillas se mueven a velocidad constante se trata de un movimiento circular uniforme. Cada manecilla tendrá una velocidad angular diferente. La manecilla de las horas tarda una hora en dar una vuelta completa y la de las horas 12, por lo tanto sus velocidades angulares en radianes por segundo, vamos a llamarlas ω_m y ω_h, serán

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800} \text{ y } \omega_h = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} = \frac{\pi}{21600}$$

A las 6:00 h las dos manecillas se encuentran separadas un ángulo de 180º o π radianes, así pues en el momento de superponerse las dos, la de los minutos ha de recorrer el mismo ángulo que la de las horas más π radianes. Es decir,

$$\varphi_m = \pi + \varphi_h, \text{ por lo tanto y como } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},\ \omega_m\ t = \pi + \omega_h\ t$$

En esta última fórmula vamos a sustituir los valores de ω_m y ω_h y calcular el valor de t dejándola sola en el miembro de la izquierda

$$\omega_m\ t - \omega_h\ t = \pi,\ (\omega_m - \omega_h)\ t = \pi, \quad \left(\frac{\pi}{1800} - \frac{\pi}{21600}\right)\ t = \pi$$

Podemos sacar factor común a π y cancelarlas en ambos miembros, llegando a

$$\left(\frac{1}{1800} - \frac{1}{21600}\right)\ t = 1, \quad \frac{11}{21600}\ t = 1, \text{ luego, } t = \frac{21600}{11} = 1963.63\ s$$

Ese es el tiempo en segundos que tardan en encontrarse las dos agujas, y dividiendo por 60 para ver los minutos y luego los segundos tenemos que

$$1963.63\ s = 32 \text{ minutos } 43 \text{ segundos, aproximadamente}$$

Así pues las agujas del reloj se superponen a las 6:32:43

Problema 5

Se trata de un movimiento circular uniforme. La velocidad angular nos la dan en vueltas/min y pasándola a radianes/s será

$$\omega = \frac{10 \cdot 2\pi}{60} = \frac{20\pi}{60} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

El periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{6\pi}{\pi} = 6 \text{ s}$$

La frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{6} = 0.16 \text{ Hz}$$

La velocidad lineal es

$$v = \omega\ R = \frac{\pi}{3} \cdot 5 = \frac{5\pi}{3} = 5.235 \text{ m/s}$$

Y la aceleración normal

$$a_N = \omega^2\ R = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cdot 5 = \frac{5\pi^2}{9} = 5.483 \text{ m/s}^2$$

Problema 6

La aceleración normal es 100 veces la de la gravedad por lo tanto

$$a_N = 100\ g = 100 \cdot 9.8 = 980 \text{ m/s}^2$$

De la fórmula de la aceleración normal podemos despejar la velocidad angular, y con R=0.1 m,

$$a_N = \omega^2\ R, \qquad \omega = \sqrt{\frac{a_N}{R}} = \sqrt{\frac{980}{0.1}} = \sqrt{9800} = 98.99 \text{ rad/s}$$

Problema 7

Se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado, cuyas fórmulas son

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_0 + \omega_0\ t + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2 \\ &\omega = \omega_0 + \alpha\ t \\ &\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\ \alpha\ (\varphi - \varphi_0) \\ &a = \alpha\ R \end{aligned} \tag{5}$$

Nos dan el ángulo girado, el tiempo y la velocidad inicial, que de la lectura del problema se deduce que es nula. Hemos de obtener primero el valor de la aceleración angular. De la primera de las ecuaciones 5 tenemos pues

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\alpha\,t^2, \qquad \alpha = \frac{2\,\varphi}{t^2} = \frac{2\cdot 0.5}{1^2} = 1\ \text{rad/s}^2$$

El ángulo girado al cabo de 10 segundos será por tanto

$$\varphi = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^2 = 50\ \text{radianes}$$

y como una vuelta equivale a 2π radianes, el número de vueltas se obtendrá dividiendo por este último factor

$$\text{número de vueltas} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{50}{2\pi} = 7.95$$

Para determinar la velocidad lineal hay que conocer antes la velocidad angular final, que se obtiene con la segunda de las ecuaciones 5, que en nuestro caso al ser nula la velocidad angular inicial

$$\omega = \alpha\,t = 1\cdot 10 = 10\ \text{rad/s, y así la velocidad lineal es}$$

$$v = \omega\,R = 10\cdot 0.5 = 5\ \text{m/s}$$

La aceleración angular de frenado se puede sacar con la segunda de las ecuaciones 5

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \tag{6}$$

La velocidad angular final es nula ya que se detiene. La inicial es de 120 vueltas por segundo, que pasándolo a rad/s resulta

$$\omega = \frac{120\cdot 2\pi}{1} = 240\pi\ \text{rad/s}$$

Sustituyendo en la ecuación 6 y con el dato de los 6 minutos que tarda en detenerse

$$\alpha = \frac{0 - 240\pi}{6\cdot 60} = -\frac{240\pi}{360} = -\frac{2\pi}{3} = -2.094\ \text{rad/s}^2$$

Problema 8

Vamos a pasar las velocidades inicial y final a rad/s

$$\omega_0 = \frac{2000\cdot 2\pi}{60} = \frac{4000\pi}{60} = \frac{200\pi}{3} \qquad \omega = \frac{1000\cdot 2\pi}{60} = \frac{2000\pi}{60} = \frac{100\pi}{3}\ \text{rad/s}$$

a) La aceleración angular será entonces, con el tiempo de 5 segundos que nos dan y usando la ecuación 6

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\frac{100\pi}{3} - \frac{200\pi}{3}}{5} = \frac{-\frac{100\pi}{3}}{5} = \frac{-100\pi}{15} = -\frac{20\pi}{3} = -20.94 \text{ rad/s}^2$$

b) Para el número de vueltas, a partir de la ecuación del ángulo φ

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\, \alpha\, t^2$$

$$\varphi = 0 + \frac{200\pi}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{20\pi}{3}\right) \cdot 5^2 = \frac{1000\pi}{3} - \frac{500\pi}{6} = \frac{1000\pi}{3} - \frac{250\pi}{3} = \frac{750\pi}{3}$$

Y finalmente el número de vueltas dividiendo por 2π

$$\text{número de vueltas} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\frac{750\pi}{3}}{2\pi} = \frac{750\pi}{6\pi} = \frac{750}{6} = 125$$

c) La aceleración lineal la calculamos con la cuarta de las ecuaciones 5 y con R=0.2 m

$$a = \alpha\, R, \;\; a = -20.94 \cdot 0.2 = -4.188 \text{ m/s}^2$$

Problema 9

Primero, al igual que antes, expresamos las velocidades y revoluciones en rad/s y radianes respectivamente

$$\omega_0 = \frac{900 \cdot 2\pi}{60} = 30\pi \quad \omega = \frac{300 \cdot 2\pi}{60} = 10\pi \text{ rad/s}, \;\; \varphi = 50 \cdot 2\pi = 100\pi \text{ rad}$$

a) De la tercera de las ecuaciones 5 podemos obtener la aceleración angular

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\, \alpha\, (\varphi - \varphi_0), \;\; \alpha = \frac{\omega^2 - {\omega_0}^2}{2\, (\varphi - \varphi_0)}$$

Y sustituyendo

$$\alpha = \frac{(10\pi)^2 - (30\pi)^2}{2 \cdot 100\pi} = \frac{100\pi^2 - 900\pi^2}{200\pi} = -\frac{800\pi^2}{200\pi} = -4\pi = -12.56 \text{ rad/s}^2$$

b) Con la aceleración ya podemos hallar el tiempo empleado en dar esas revoluciones. De la segunda de las ecuaciones 5

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t, \quad t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

Sustituyendo

$$t = \frac{10\pi - 30\pi}{-4\pi} = \frac{-20\pi}{-4\pi} = 5 \text{ s}$$

FÓRMULAS USADAS EN LOS PROBLEMAS

Tiro parabólico

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \ t + \frac{1}{2} \ \vec{g} \ t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} \ t$$

$$X = \frac{{v_0}^2 \ \sin 2\alpha}{-g} \qquad H_{max} = \frac{{v_0}^2 \ \sin^2\alpha}{-2g} \qquad t = \frac{2v_0 \ \sin\alpha}{-g}$$

Movimiento circular uniforme

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v = \omega \ R, \qquad a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \ R$$

Movimiento circular uniformemente acelerado

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \ t + \frac{1}{2} \ \alpha \ t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \ t$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2 \ \alpha \ (\varphi - \varphi_0)$$

$$a = \alpha \ R$$