1. Sean los vectores $\vec{a} = -3\vec{i}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Demostrar que

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

   donde φ es el ángulo que forma el vector $\vec{b}$ con el eje X.

2. Una barca, que lleva una velocidad de 3 m/s, cruza un río perpendicularmente a la dirección del agua. El río fluye a 5 m/s y su cauce tiene 60 metros de ancho. Hallar el ángulo y la distancia desviada. Determina la velocidad resultante y el tiempo empleado en cruzar el río.

3. El vector de posición de un cuerpo viene dado por

$$\vec{r} = (t^2 + t + 1)\vec{i} + (1 - 3t)\vec{j}$$

   a) Obtener la ecuación de la trayectoria; b) La velocidad media entre los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s; c) Velocidad y aceleración instantáneas en $t = 3$ s.

4. Un avión ha de alcanzar 350 km/h para despegar partiendo desde el reposo. Si necesita una pista de 2 km para despegar, calcula cuánto tiempo le costará despegar. ¿Qué distancia recorrerá en el último segundo?

5. Desde el suelo lanzamos hacia arriba un cuerpo a 24 m/s. Calcular: a) altura máxima alcanzada y tiempo empleado en alcanzarla; b) el tiempo total de vuelo; c) Una vez en el punto más alto el cuerpo vuelve a caer y se queda encalado a 20 metros del suelo. Halla la velocidad justo antes de encalarse.

Resolución de los problemas

$\boxed{\text{Problema 1}}$ Vamos a hallarlo por partes. Como se trata de una igualdad, calcularemos primero el miembro de la izquierda y luego el de la derecha y comprobaremos que dan lo mismo.

En la parte de la izquierda tenemos $|\vec{a}+\vec{b}|^2$. Empecemos por hallar $\vec{a}+\vec{b}$ y luego su módulo

$$\vec{a}+\vec{b} = (-3,0)+(2,5) = (-1,-5) \text{ y su módulo } |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$$

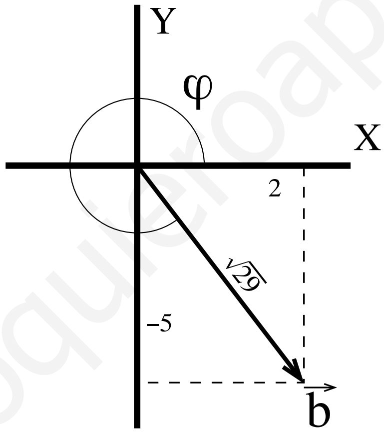
de donde

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 26 \tag{1}$$

En la parte de la derecha tenemos $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Vamos a determinar cada uno de ellos.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3 \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29} \text{ luego } |\vec{a}|^2 = 9 \quad |\vec{b}|^2 = 29$$

Ahora queda por saber lo que vale $\cos\varphi$, el ángulo que forma el vector $\vec{b}$ con el eje X. La siguiente figura muestra como hallarlo. El coseno de un ángulo es igual al cateto contiguo dividido por la hipotenusa, siendo la hipotenusa por definición $|\vec{b}|$.



Como vemos pues en la figura

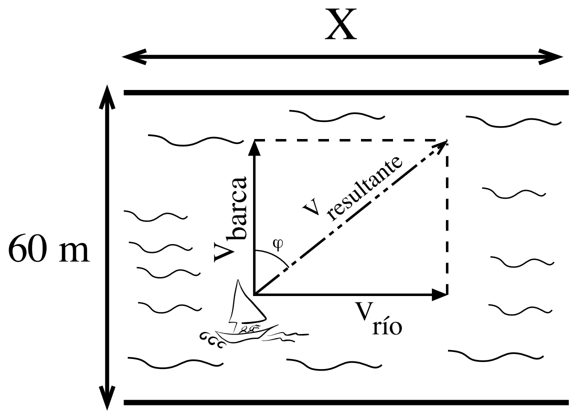
$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Ahora ya estamos en condiciones de sustituir todo en $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, quedando

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 9+29-2\cdot 3\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = 9+29-12 = 26$$

resultado que coincide con la ecuación 1.

$\boxed{\text{Problema 2}}$ Conviene hacer un dibujo para aclarar la posición del sistema de referencia o de nuestros ejes coordenados.



El origen del sistema de referencia lo tomamos en la barca. El eje X a lo largo del río y el eje Y perpendicular y según la dirección que lleva la barca. Con esta elección las componentes de los vectores velocidad es muy fácil. El vector velocidad del río forma un ángulo de 0º y el vector velocidad de la barca 90º. Las componentes las hallamos con las expresiones para el paso de componentes polares a cartesianas,

$$\vec{v} = (v_x,\ v_y) = (v_r \cdot \cos\varphi,\ v_r \cdot \sin\varphi)$$

Para el vector velocidad del río tendremos

$$\vec{v_r} = (5 \cdot \cos 0,\ 5 \cdot \sin 0) = (5 \cdot 1,\ 5 \cdot 0) = (5,\ 0) \text{ m/s}$$

Y para la barca cuya dirección forma 90º

$$\vec{v_b} = (v_b \cdot \cos\varphi,\ v_b \cdot \sin\varphi) = (3 \cdot \cos 90,\ 3 \cdot \sin 90) = (3 \cdot 0,\ 3 \cdot 1) = (0,\ 3) \text{ m/s}$$

La velocidad resultante será pues la suma vectorial de la velocidad del río y de la barca,

$$\vec{v}_{resultante} = \vec{v}_{rio} + \vec{v}_{barca} = (5,\ 0) + (0,\ 3) = (5,\ 3) \text{ m/s}$$

Y su módulo $|\vec{v}_{resultante}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5,83$ m/s.

Para calcular el ángulo desviado, si nos fijamos en el dibujo anterior, se trata de determinar el ángulo φ. A partir del triángulo que forman los vectores velocidad podemos calcular el valor de $\tan\varphi$.

$$\tan\varphi = \frac{v_{rio}}{v_{barca}} = \frac{5}{3} = 1,66.. \text{ por lo tanto } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59,03^{\text{o}}$$

Así pues el ángulo que se desvía la barca de su trayectoria inicial es 59,03º

Para saber la distancia que se desvía la barca respecto de la otra orilla, al ser las velocidades constantes tenemos

$$\vec{v} = \frac{\vec{e}}{t} \quad \text{y entonces} \quad \vec{e} = \vec{v} \cdot t$$

donde $\vec{v}$ es ahora la velocidad resultante. El vector $\vec{e}$ representa a las distancias que recorre la barca a lo largo de los ejes X e Y.

$$\vec{e} = (x,\ y) = \vec{v} \cdot t = (5,\ 3) \cdot t$$

En la ecuación anterior podemos identificar lo que valen las distancias x e y

$$x = 5 \cdot t \qquad y = 3 \cdot t$$

De acuerdo con la figura del principio del problema la distancia y la podemos identificar con la anchura del río y con ella averiguar el tiempo empleado por la barca en cruzar el río,

$$60 = 3 \cdot t \text{ y despejando el tiempo } t = \frac{60}{3} = 20 \text{ segundos}$$

La distancia desviada respecto de la otra orilla vendrá dada por x, que por lo dicho antes es

$$x = 5 \cdot t = 5 \cdot 20 = 100 \text{ metros}$$

Problema 3

a) Para la ecuación de la trayectoria hemos de identificar lo que es la componente X e Y, que a partir de lo que vale $\vec{r}$ son

$$\vec{r} = (x,\ y) = (t^2 + t + 1,\ 1 - 3t)$$

obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

en el que hay que eliminar t. Parece más fácil despejar t de la segunda de ellas y sustituir en la primera. (Recordamos que el procedimiento siempre es igual, se despeja en una de ellas y se sustituye **siempre** en la otra).

$$t = \frac{y-1}{-3} = -\frac{y-1}{3} = \frac{-y+1}{3} = \frac{1-y}{3}$$

y sustiyendo en la primera

$$x = t^2 + t + 1 = \left(\frac{1-y}{3}\right)^2 + \frac{1-y}{3} + 1 = \frac{(1-y)^2}{3^2} + \frac{1-y}{3} + 1$$

operando

$$\frac{1 + y^2 - 2y}{9} + \frac{1-y}{3} + 1 = \frac{1 + y^2 - 2y + 3(1-y) + 9}{9} = \frac{1 + y^2 - 2y + 3 - 3y + 9}{9}$$

llegamos por fin a

$$x = \frac{y^2 - 5y + 13}{9}$$

La ecuación obtenida expresa x en función de y en este caso y corresponde a la ecuación de una parábola.

b) Para la velocidad media partimos de su definición

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$$

donde $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ son los valores del vector de posición en los instantes t_1 =2 s y t_2=4 s que nos dan en el problema. Sustituyéndolos

$$\vec{r_2} = (4^2 + 4 + 1,\ 1 - 3 \cdot 4) = (21,\ -11)$$
$$\vec{r_1} = (2^2 + 2 + 1,\ 1 - 3 \cdot 2) = (7,\ -5)$$

y la velocidad media será

$$\vec{v_m} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{(21,\ -11) - (7,\ -5)}{4 - 2} = \frac{(21 - 7,\ -11 - (-5))}{2} = \frac{(14,\ -6)}{2} = (7,\ -3)$$

siendo sus unidades m/s.

c) La velocidad y aceleraciones instantáneas las hallamos haciendo las derivadas del vector de posición. Para la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + t + 1,\ 1 - 3t) = (2t + 1,\ -3)$$

y para t=3 s

$$\vec{v} = (2 \cdot 3 + 1,\ -3) = (7,\ -3)\ \ \text{m/s}$$

Por fin para la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 1,\ -3) = (2,\ 0)\ \ \text{m/s}^2$$

La aceleración obtenida es constante e independiente por tanto del tiempo.

Problema 4

Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Las fórmulas son

$$e = e_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot a \cdot (e - e_0)$$

De la lectura del problema se decuce que $v_0 = 0$ y v=350 km/h=97,2 m/s, e_0=0 y e=2 km=2000 m. Nos piden el tiempo y lo podemos calcular con la primera o segunda de las ecuaciones anteriores, pero para ello hemos de calcular la aceleración, que la despejamos de la tercera,

$$a = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2(e - e_0)} = \frac{(97,2)^2 - 0^2}{2 \cdot (2000 - 0)} = 2,36 \ \ \mathrm{m/s^2}$$

y con la segunda sabemos el tiempo

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{97,2 - 0}{2,36} = 41,15 \ \ \mathrm{s}$$

Para hallar la distancia recorrida en el último segundo, sabemos por lo hecho antes que para t=41,15 s el espacio es obviamente, e=2000 m, luego para 1 segundo antes el espacio que llevará recorrido será con el tiempo t'=41.15-1=40,15 s. Con la fórmula del espacio, la primera de las tres

$$e' = e_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot 40,15 + \frac{1}{2} \cdot 2,36 \cdot (40,15)^2 = 1902,18 \ \ \mathrm{m}$$

y en el último segundo habrá recorrido la diferencia entre e y e'

$$e - e' = 2000 - 1902,18 = 97,82 \ \ \mathrm{m}$$

Los valores numéricos pueden difererir ligeramente según los decimales que se usen en el cálculo.

$\boxed{\text{Problema 5}}$

Las fórmulas son las mismas que antes pero ahora poniendo la aceleración de la gravedad, $g = -9,8$ m/s^2, y el espacio es ahora la altura h. Del problema deducimos h_0=0, v_0=24 m/s.

$$\begin{aligned}&h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2\\&v = v_0 + g \cdot t\\&v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)\end{aligned}$$

a) En el punto más alto la velocidad final es nula, v=0, luego de la tercera ecuación podemos despejar la altura final

$$v^2 = {v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0), \qquad h - h_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}, \qquad h = h_0 + \frac{v^2 - {v_0}^2}{2g}$$

sustituyendo

$$h = 0 + \frac{0 - 24^2}{2 \cdot (-9,8)} = \frac{-576}{-19,6} = 29,38 \text{ m}$$

b) Para calcular el tiempo total de vuelo hemos de tener en cuenta que el espacio inicial y final son nulos, ya que sale y vuelve al suelo. Podemos usar la primera ecuación, con lo que nos quedará una ecuación de segundo grado para la t, ecuación fácil de resolver ya que no tiene término independiente y puede factorizarse.

$$\begin{aligned}&h = h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2\\&0 = 0 + 24 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2, \qquad 0 = 24t - 4,9t^2\\&0 = t \cdot (24 - 4,9t) \qquad \text{cuyas soluciones son}\\&t = 0 \text{ y } 0 = 24 - 4,9t, \qquad t = \frac{24}{4,9} = 4,89 \text{ s}\end{aligned}$$

c) Todo consiste en hallar la velocidad que tendrá el cuerpo a 20 m del suelo. Tomando como condiciones iniciales las del principio y usando la tercera ecuación, ahora tenemos h_0=0, h=20 m y v_0=24 m/s

$$\begin{aligned}&v^2 = 24^2 + 2 \cdot (-9,8) \cdot (20 - 0) = 576 - 392 = 184\\&v = \sqrt{184} = \pm 13,56 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Sólo basta puntualizar que de la velocidad obtenida anteriormente hemos de quedarnos con la negativa ya que el cuerpo baja.