JUNIO 2001

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

La prueba consta de dos partes. La primera parte consiste en un conjunto de cinco cuestiones de tipo teórico, conceptual o teórico-práctico, de las cuales el alumno debe responder solamente a tres. La segunda parte consiste en dos repertorios A y B, cada uno de ellos constituido por dos problemas. El alumno debe optar por uno de los dos repertorios y resolver los dos problemas del mismo.

TIEMPO: Una hora treinta minutos.

CALIFICACIÓN: Cada cuestión debidamente justificada y razonada con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos. Cada problema debidamente planteado y desarrollado con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos. En aquellas cuestiones y problemas que consten de varios apartados, la calificación será la misma para todos ellos, salvo indicación expresa en los enunciados.

Primera parte

Cuestión 1.

En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determine:

a) La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra y del radio de la órbita.

b) La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

Solución.

a. En el movimiento circular de un satélite en torno a la tierra se cumple que:

$$m_s \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2}$$

simplificando:

$$m_s \cdot v^2 = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R}$$

multiplicando por ½ toda la expresión anterior:

$$\frac{1}{2} m_s \cdot v^2 = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R}$$

por tanto

$$E_c = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} \qquad \text{-1-}$$

b. La energía mecánica de un satélite es una constante del movimiento, debido a que el campo gravitatorio es conservativo. Es igual a la suma de E cinética y E potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2} mV^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R}$$

Se puede utilizar la expresión anterior -1-, y se ve que:

$$Ec = \frac{-1}{2} Ep = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R}$$

Por tanto:

$$E_m = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} - G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} \qquad E_m = \frac{-1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} \qquad E_m = \frac{E_p}{2}$$

Cuestión 2.
Un muelle cuya constante de elasticidad es k está unido a una masa puntual de valor m. Separando la masa de la posición de equilibrio el sistema comienza a oscilar. Determine:

a) El valor del período de las oscilaciones T y su frecuencia angular ω.
b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total en función de la amplitud y de la elongación del movimiento del sistema oscilante.

Solución.
a. La masa oscila realizando un M. A. S. De ecuación:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o)$$

La frecuencia del movimiento viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La relación entre ω y T es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

por tanto:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \qquad T = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot 2\pi \text{ seg}$$

b. La Energía cinética viene expresada por $E_c = \frac{1}{2}mV^2$

Si la posición de la masa viene expresada por

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o)$$

derivando se obtiene la expresión de la velocidad de la partícula

$$v(t)\frac{d\,x(t)}{dx} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o)$$

con estas expresiones se plantea el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{-1-} & v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o) \\ \text{-2-} & x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_o) \end{array}\right\}$$

Si operamos con las ecuaciones (1) y (2) de la posición y la velocidad:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{v^2}{\omega^2} = A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi o) \\ x^2 = A^2\cos^2(\omega t + \varphi o) \end{array}\right\}$$

sumando estas ecuaciones y sacando factor común en el segundo miembro de A^2

$$\frac{v^2}{\omega^2} + x^2 = A^2$$

$$\frac{v^2}{\omega^2} = A^2 - x^2 \qquad v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

por tanto, la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

La energía Potencial viene expresada por:

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía total es la suma de ambas: $E_T = E_c + E_p$

$$E_T = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$E_T = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad E_T = \frac{1}{2}kA^2$$

Cuestión 3.

Un electrón que se mueve con una velocidad de 10^6 m/s describe una órbita circular en el seno de un campo magnético uniforme de valor 0'1 T cuya dirección es perpendicular a la velocidad.

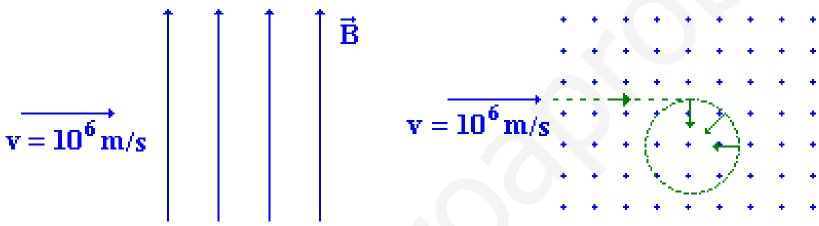
Determine:

a) El valor del radio de la órbita que realiza el electrón.
b) El número de vueltas que da el electrón en 0'001 s.

Datos: Masa del electrón m_e= $9'1\times10^{-31}$ kg

Valor absoluto de la carga del electrón e = $1'6\times10^{-19}$ C

Solución.



a. La fuerza de Lorentz que experimenta el electrón, hace que describa una trayectoria circular. Es una fuerza normal. (siempre perpendicular a la velocidad).

$$\bar{F} = q \cdot \left(\bar{V} \times \bar{B}\right)$$

El modulo de $\vec{F}$ es:

$$\left|\vec{F}\right| = q \cdot V \cdot B \operatorname{sen} 90^\circ$$

que es la fuerza centrípeta, por tanto:

$$\text{-1-} \qquad m \cdot \frac{v^2}{R} = q \cdot V \cdot B$$

de -1-, se despeja el radio de la órbita:

$$R = \frac{m \cdot v}{qB}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$R = 5'68 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

b. Se calcula el periodo(T) del movimiento circular:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad T = 3'57 \cdot 10^{-10}\ \text{seg} \quad \text{(tiempo que tarda en dar 1 vuelta)}$$

El nº de vueltas será:

$$\frac{0'001\text{seg}}{3'57 \cdot 10^{-10}\ \text{seg}/\text{revolución}} = \text{nº vueltas} : 2'8 \cdot 10^6$$

Cuestión 4.

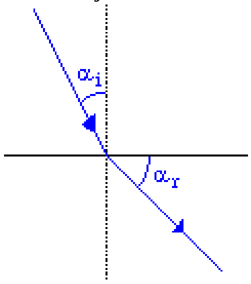
Un rayo de luz monocromática que se propaga en un medio de índice de refracción 1’58 penetra en otro medio de índice de refracción 1,23 formando un ángulo de incidencia de 15º (respecto a la normal) en la superficie de discontinuidad entre ambos medios.

a) Determine el valor del ángulo de refracción correspondiente al ángulo de incidencia anterior. Haga un dibujo esquemático.

b) Defina ángulo límite y calcule su valor para este par de medios.

Solución.

a. Puesto que $n_2 < n_1$, el rayo refractado se aleja de lo normal.



El valor concreto del ángulo de refracción lo calculamos mediante la ley de Snell.

$n_1 \text{sen}\,\varphi_i = n_2 \text{sen}\,\varphi_r$

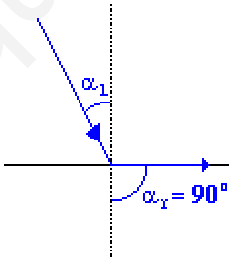
Si

$$\varphi_i = 15^o \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\varphi_r = \frac{n_1}{n_2}\text{sen}\,15^o$$

Sustituyendo valores:

$$\text{sen}\,\varphi_r = 0'33 \quad \Rightarrow \quad \varphi_r = \text{arcsen}\,0'33 = 19'42^o$$

b. Ángulo limite, es aquel ángulo de incidencia a partir del cual, el rayo no se refracta, sino que se refleja totalmente(Reflexión total).



Para este ángulo limite, se observa que $\varphi_r = 90^o$. Aplicando la ley de Snell:

$$n_1 \text{sen}\,\varphi_L = n_2 \text{sen}\,\varphi_r$$

$$\text{sen}\,\varphi_L = \frac{n_2}{n_1} \qquad \varphi_L = 51'1^o$$

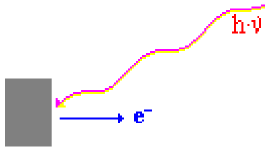
Cuestión 5.

Un haz de luz monocromática de longitud de onda en el vacío 450 nm incide sobre un metal cuya longitud de onda umbral, para el efecto fotoeléctrico, es de 612 nm. Determine:

a) La energía de extracción de los electrones del metal.
b) La energía cinética máxima de los electrones que se arrancan del metal.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3\times10^{8}$ m s^{-1}. Constante de Planck $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J s

Solución.



$$\lambda = 450\times10^{-9}\ \text{m}$$
$$\lambda_o = 612\times10^{-9}\ \text{m}$$

a. La energía de extracción o energía umbral: $h\nu = h\nu_o + \frac{1}{2}mv^2$

$$h\nu_o = h\nu - \frac{1}{2}mv^2$$

Teniendo λ_o, se halla la $E_{EXTRACCION}$, calculando previamente la frecuencia umbral

$$\nu_o = \frac{C}{\lambda_o} \qquad \nu_o = 4'9\cdot10^{14}\ \text{Hz} \qquad E = h\cdot\nu_o \qquad E = 3'25\cdot10^{19}\ \text{J}$$

b. La ecuación del balance energético es:

$$h\cdot\nu = h\cdot\nu_o + \frac{1}{2}mv^2$$

Despejando la energía cinética:

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - h\nu_o$$
$$Ec = h(\nu - \nu_o)$$

Se calcula la ν que le corresponde a la luz monocromática de $\lambda = 450\text{nm}$.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad \nu = \frac{3\cdot10^{8}}{450\cdot10^{-9}\ \text{m}} \qquad \nu = 6'67\cdot10^{14}\ \text{Hz}$$

y la energía cinética es:

$$Ec = 6'63\cdot10^{-34}\left(6'67\cdot10^{14} - 4'9\cdot10^{14}\right)$$
$$Ec = 1'171\cdot10^{-19}\ \text{J} \qquad Ec = 0'732\ \text{e V}$$

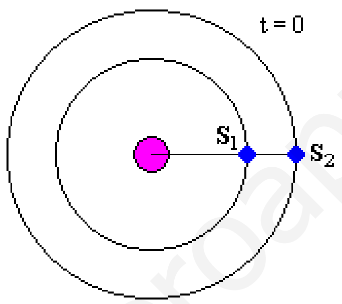
Segunda parte

REPERTORIO A

Problema 1.
Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 Y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios r_1=8000 km y r_2=9034 km respectivamente.
En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado:

a. ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?
b. ¿Qué relación existe entre los periodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado seis vueltas, desde el instante inicial?

Solución.
a.



Estableciendo que la fuerza gravitatoria es la fuerza normal del movimiento:

$$m_s \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2}$$

despejando la velocidad(v) se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

aplicando a cada uno de los satélites está ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } S_1: v_1 = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{R_1}} \quad (1) \\ \text{Para } S_2: v_2 = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{R_2}} \quad (2) \end{array}\right\}$$

dividiendo la ecuación -1- entre la ecuación -2-, se obtiene la relación pedida

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Sustituyendo los datos numéricos:

$$\frac{V_1}{V_2} = 1'13$$

b. Para hallar la relación entre los periodos orbitales se parte de la ecuaciones:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

sustituyendo en la ecuación del periodo la velocidad angular

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Aplicando la ecuación anterior para los dos satélites

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi R_1}{v_1} \\ T_2 &= \frac{2\pi R_2}{v_2} \end{aligned}\right\}]$$

la relación entre los periodos se obtiene dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2 R_1}{V_1 R_2}$$

Sustituyendo los valores numéricos y teniendo en cuenta que si $\frac{V_1}{V_2} = 1'13 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1'13}$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1'13} \cdot \frac{8 \times 10^6}{9'034 \times 10^6} = 0'78$$

Los resultados permiten concluir que el satélite más cercano a la Tierra(S_1) se mueve a mayor velocidad y completa una vuelta antes que el satélite más alejado(S_2).

Calculo de T_1:

$$T_1 = \frac{2\pi R_1}{v_1}$$

la velocidad se calcula como

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_1}} \\ R_1 &= 8000\,\text{km} \end{aligned}\right\} : \; v_1 = 7061'03 \; m/s$$

sustituyendo en el periodo

$$T_1 = 7118'7\,\text{s}$$

Después de 6 vueltas, el tiempo transcurrido será:

t_1 = nº de vueltas $\times$ T_1’ = 42712’3 seg.

Mediante la relación entre los periodos se obtiene el periodo de S_2:

T_2 = 9126’54 seg

En el tiempo que S_1 ha recorrido 6 vueltas, el S_2:

$$\text{Nº vueltas} = \frac{T_1'}{T_2} = 4'68$$

la posición de S_2 respecto de S_1 se obtiene expresando la parte decimal del cociente en forma sexagesimal

0’68 $\times$ 360 = 244º 48’

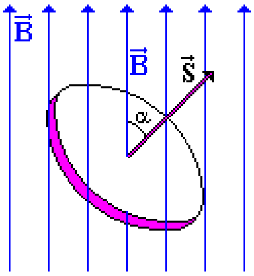
Problema 2.

Un solenoide de 200 vueltas y de sección circular de diámetro 8 cm está situado en un campo magnético uniforme de valor 0’5 T cuya dirección forma un ángulo de 60º con el eje del solenoide. Si en un tiempo de 100 ms disminuye el valor del campo magnético uniformemente a cero, determine:

a. El flujo magnético que atraviesa inicialmente el solenoide.
b. La fuerza electromotriz inducida en dicho solenoide.

Solución

a.



El flujo magnético inicial que atraviesa el solenoide es:

$$\Phi = \bar{B} \circ \bar{S} = |\bar{B}| \cdot |\bar{S}| \cdot \cos\alpha = B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

donde

$$B = 0'5T \qquad \alpha = 60º \qquad S = \pi R^2$$

Si el $d = 8cm \qquad r = 4cm \qquad r = 4 \cdot 10^{-2}\, m$

$$S = \pi\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2 \qquad S = 5'03 \cdot 10^{-3}\, m^2$$

sustituyendo en la expresión del flujo

$$\Phi_i = 0'5(T) \cdot 5'03 \times 10^{-3}\left(m^2\right) \cos 60º = 1'25 \times 10^{-3}(w)$$

b. Si el campo disminuye uniformemente de 0’5 T a 0 T, en un tiempo de $100 \cdot 10^{-3}$ seg la derivada se puede transformar en incrementos:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

sustituyendo los datos

$$E = -N \frac{(\Phi_f - \Phi i)}{1 \times 10^{-1} seg} \qquad E = -200 \frac{\left(0 - 1'26 \times 10^{-3}\right)}{0'1}$$

la f.e.m inducida es:

$$E = 2,52\ V$$

REPERTORIO B

Problema 1.
Un objeto luminoso de 3 cm de altura está situado a 20 cm de una lente divergente de potencia –10 dioptrías. Determine:

a. La distancia focal de la lente.
b. La posición de la imagen.
c. La naturaleza y el tamaño de la imagen.
d. La construcción geométrica de la imagen.

Solución.

a. Distancia focal. Si P = –10 dioptrías y sabiendo que:

$$f' = \frac{1}{p} \qquad f' = \frac{-1}{10}\,\text{m} \qquad f' = -0'1\,\text{m} \qquad f' = -10\,\text{cm}$$

b. Cálculo de S’. La ecuación constructora de la lente es :

$$\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} = \frac{1}{f'}$$

despejamos S’ y, sabiendo que S = –20 cm y f ’ = –10 cm

$$\frac{1}{S'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{S} \qquad \frac{1}{S'} = \frac{1}{-10} + \frac{1}{-20} \qquad \frac{1}{S'} = \frac{-3}{20} \qquad S' = \frac{-20}{3}\,\text{cm} = -6'67\text{cm}$$

c. Una lente divergente genera siempre imágenes virtuales y de menor tamaño que el objeto. Dichas imágenes son siempre DIRECTAS.

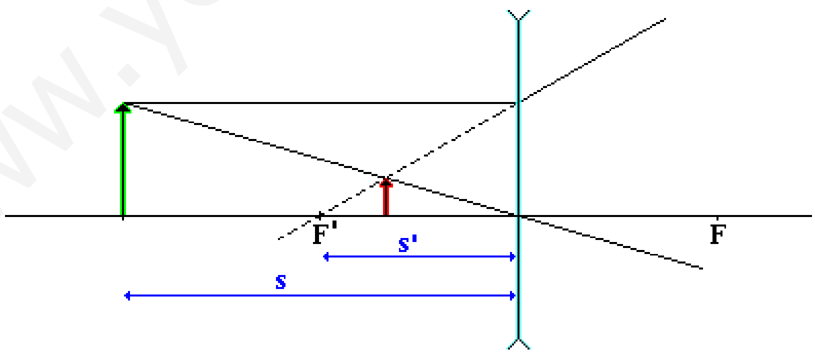
El tamaño se halla mediante la ecuación de la lente:

$$\frac{y'}{y} = \frac{S'}{S}$$

despejando y’

$$y' = y \cdot \frac{S'}{S} \qquad y' = 3 \cdot \frac{-20/3}{-20} = 1\,\text{cm}$$

d.



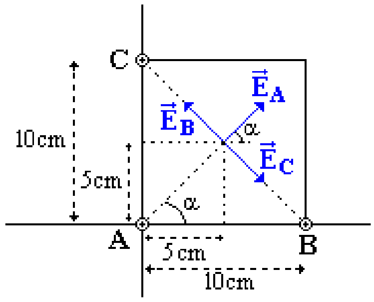
Problema 2.

Tres cargas positivas e iguales de valor q = 2 μC cada una se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de lado 10 cm.
Determine:

a. El campo eléctrico en el centro del cuadrado, efectuando un esquema gráfico en su explicación.
b. Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.

Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacío $K = 9\times10^9$ Nm^2C^2

Solución.
a.



Como se observa en la figura, el campo resultante en el centro del cuadrado es el generado por la carga A $\left(\bar{E}_A\right)$ ya que por simetría los campos generados por las carga B y C se anulan entre si.

La distancia de cualquier vértice al centro del cuadrado se calcula por teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{0'05^2 + 0'05^2} = 0'05\sqrt{2}\ \text{m}$$

Los módulos de los campos creados por B y por C son iguales ya que están creados por la misma carga y están a igual distancia del centro.

$$\left|\bar{E}_B\right| = k\cdot\frac{Q}{r^2} = 9\times10^9\cdot\frac{2\times10^{-6}}{\left(0'05\cdot\sqrt{2}\right)^2} = 3'6\times10^6\ \frac{N}{C} = \left|\bar{E}_C\right|$$

Los vectores de campo generados por las cargas B y C $\left(\bar{E}_B\ ,\ \bar{E}_C\right)$ tienen igual módulo, dirección y sentido contrario, por lo que se anulan.

El campo resultante es por tanto el generado por la carga A.
Módulo:

$$\left|\bar{E}_A\right| = k\cdot\frac{Q}{r^2} = 9\times10^9\cdot\frac{2\times10^{-6}}{\left(0'05\cdot\sqrt{2}\right)^2} = 3'6\times10^6\ \frac{N}{C}$$

El ángulo que forma el con la horizontal es:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0'05}{0'05} \qquad \operatorname{tg}\alpha = 1 \qquad \alpha = 45^{\circ}$$

Proyecciones del vector campo sobre los ejes coordenados:

$$E_{A_x} = \left|\bar{E}_A\right|\cdot\cos\alpha \qquad E_{A_y} = \left|\bar{E}_A\right|\operatorname{sen}\alpha$$

el campo resultante es:

$$\bar{E}_T\left(0'05, 0'05\right) = 1'8\sqrt{2}\times10^6\ \bar{i} + 1'8\sqrt{2}\times10^6\ \bar{j}$$

b. El potencial en los puntos medios:

$$V_{CA} = k\cdot\frac{Q}{r} + k\frac{Q}{r} = 2k\frac{Q}{r} = 7'2\times10^5\ V$$
$$V_{AB} = k\cdot\frac{Q}{r} + k\frac{Q}{r} = 2k\frac{Q}{r} = 7'2\times10^5\ V$$

los potenciales son los mismos yq que están creados por la mismas carga y a igual distancia. Por tanto :

$$W = q\cdot\left(V_i - V_f\right) = 0$$

ya que ambos puntos tienen el mismo potencial