3 Aplicaciones de las derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 4. Ejercicios resueltos.

5. *Sea $f(x)=(x+1)^3(x-2)^2+3$. Demuestra que la ecuación $f'(x)=0$ tiene alguna solución en el intervalo $(-1, 2)$.

La función *f* es continua y derivable ya que es una función polinómica. Además, $f(-1)=f(2)$, por tanto, puede aplicarse el teorema de Rolle que nos asegura que $f'(x)=0$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 2)$.

6. Aplicando el teorema de Rolle, justifica que la gráfica de la función $f(x)=3x^5+7x+1$ no puede cortar 2 veces al eje horizontal.

La función *f* es continua por ser polinómica. Además $f(-2)=-109$ y $f(0)=1$, así pues, el teorema de Bolzano nos asegura que *f* corta al menos una vez al eje horizontal en un punto *c* perteneciente al intervalo $(-2,0)$. Si cortara al eje horizontal en otro punto *d*, se tendría que $f(c)=0$ y $f(d)=0$ y, por tanto, se podría aplicar el teorema de Rolle en el intervalo cerrado de extremos *c* y *d* y resultaría que la derivada de *f* se anularía al menos una vez. Sin embargo, la derivada de *f* es $f'(x)=15x^4+7$ que no se anula nunca porque siempre es positiva. Así pues, la suposición que se hizo de que cortaba más veces al eje horizontal es falsa.

7. Demuestra que la ecuación $2x^5-30x+c=0$ no puede tener más de una solución en el intervalo $[-1,1]$ sea cual fuere el número *c*.

Definimos la función polinómica $f(x)=2x^5-30x+c$. Si la ecuación $f(x)=0$ tuviese dos soluciones en el intervalo $[-1,1]$, entonces, por el teorema de Rolle, sabríamos que existe un *c* en $(-1, 1)$ con $f'(c)=0$. Pero $f'(x)=10x^4-30$ no se hace cero en el intervalo $(-1, 1)$, por lo que la premisa es falsa: $f(x)$ no puede cortar más de una vez al eje *X* en el intervalo $[-1,1]$.

Nota: las soluciones de $10x^4-30=0$ son $x=+\sqrt[4]{3}>1$ y $x=+\sqrt[4]{3}<-1$.

8. Sea $f(x)=2+\sqrt[3]{x^2}$. Comprueba que *f* es continua en $\mathbb{R}$, $f(-8)=f(8)$ y en cambio $f'(x)$ no se anula nunca. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

Trabajando en el intervalo cerrado $[-8,8]$, se ve que:

$$f(-8)=2+\sqrt[3]{(-8)^2}=2+\sqrt[3]{64}=2+4=6\,,\quad f(8)=2+\sqrt[3]{8^2}=2+\sqrt[3]{64}=2+4=6$$

Su derivada, $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, nunca se anula.

La clave está en darse cuenta de que la derivada no está definida para $x=0$ y, por tanto, *f* no es derivable en el intervalo abierto $(-8,8)$ y no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

www.yoquieroaprobar.es

9. Para la siguiente función, demuestra que existe un $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

$$f(x) = (x-2)e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}x\right)$$

La función f es una función continua en el intervalo $[1,3]$ porque es producto de funciones continuas en ese intervalo. También es derivable en $(1,3)$ porque es producto de funciones derivables en ese intervalo.

Además $f(1) = -e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$ y $f(3) = e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$. Luego $f(1) = f(3)$.

Aplicando el teorema de Rolle se tiene que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

10. Ejercicio resuelto.

11. Sea $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x & \text{si } x \le 1 \\ -4x^3 + 12x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + 20 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$, comprueba que:

a) Verifica el teorema del valor medio en $[0,4]$.

b) Halla $c \in (0,4)$ cuya existencia asegura el teorema.

a) f es continua en $[0,4]$ pues está definida por polinomios y en los únicos puntos problemáticos $x = 1$ y $x = 2$ se cumple: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 8 = f(1)$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 16 = f(2)$

Por otra parte, f es derivable en $(0,4)$ pues: $f'(x) = \begin{cases} 8x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ -12x^2 + 24x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 12$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = 0$

Por tanto, habrá al menos un valor c tal que $f'(c) = \dfrac{f(4) - f(0)}{4} = \dfrac{36 - 0}{4} = 9$.

b) Si $0 < c < 1$: $8c + 4 = 9 \Rightarrow c = \dfrac{5}{8}$

Si $1 < c < 2$: $-12c^2 + 24c = 9 \Rightarrow -12c^2 + 24c - 9 = 0 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2}, c = \dfrac{3}{2}$. Pero $\dfrac{1}{2}$ no está entre 1 y 2.

Si $2 < c < 4$: $3c^2 - 6c = 9 \Rightarrow 3c^2 - 6c - 9 = 0 \Rightarrow c = -1, c = 3$. El valor –1 no pertenece al intervalo $(0,4)$.

Luego son válidos los valores $\dfrac{5}{8}, \dfrac{3}{2}$ y 3, que pertenecen a $(0,4)$ y verifican el teorema.

12. Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,2) \\ 3 & \text{si } x \in (2,3) \end{cases}$ verifica que $f'(x) = 0$ en todos los puntos donde está definida *f* y, sin embargo, *f* obviamente, no es constante. ¿Contradice este ejemplo el teorema del valor medio?

La afirmación de que *f* es constante sí se cumple en el intervalo $(0,2)$ y también en el intervalo $(2,3)$ pero no en la unión de ambos ($x = 2$ no pertenece a dicha unión, existe una discontinuidad).

No hay contradicción porque el teorema del valor medio hace referencia a un intervalo.

13. Ejercicio resuelto.

www.yoquieroaprobar.es

14. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}x}$

a) Como $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}3x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}2x=0$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2\cos 2x}=\frac{3\cos 0}{2\cos 0}=\frac{3}{2}.$$

b) Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

c) Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}\right)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)\left(e^x+e^{-x}\right)=2.$$

d) Para calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ hay que transformar esa resta en un cociente: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

. Como $\lim\limits_{x\to 1}(x-1-\ln x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)\ln x\right)=0$. Se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\right),$$ y de nuevo se puede aplicar

L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x+1+1}\right)=\dfrac{1}{2}.$

e) Es una indeterminación del tipo ∞^0. Escribiendo $x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$, se halla $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, así que

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1.$$

f) Este límite da lugar a una indeterminación del tipo 0^0, por tanto, debemos transformar un poco su expresión para poder aplicar L'Hôpital. Si $y=x^{\operatorname{sen}x}$, entonces $\ln y=\ln x^{\operatorname{sen}x}=\operatorname{sen}x\cdot\ln x$. Se calcula el límite de esta última expresión: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$, y ya se está en condiciones de aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x-x\operatorname{sen}x}=\frac{0}{1}=0$$

Se ha obtenido que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=0$ siendo $y=x^{\operatorname{sen}x}$, así pues $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^{\operatorname{sen}x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\operatorname{sen}x}=1$.

www.yoquieroaprobar.es

15. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$ para cualquier $k>0$.

Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$ puede aplicarse L'Hôpital, ya que numerador y denominador tienden a más infinito (recuérdese que el exponente k es positivo), y se repite el proceso hasta que el numerador sea un número (el denominador no se altera porque la derivada de $y=e^x$ es ella misma):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots2\cdot1}{e^x}=0$$

16. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\left(e^x+x\right)}$.

Puede escribirse el límite buscado como $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{(e^x+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$ que da lugar a una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. Si llamamos y a la última expresión, se observa que:

$y=\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln y=\ln\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)=\dfrac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}$, y ya se puede calcular el límite de esta última expresión aplicando L´Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

Así pues, se ha obtenido que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=1$, por tanto: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\sqrt[x]{(e^x+x)}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{(e^x+x)}=e$

17. Ejercicio interactivo.

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Sea *f* derivable en $x=x_0$. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $f'(x_o)\geq 0$, entonces *f* es creciente en x_0.

b) Si *f* es decreciente en x_0, entonces $f'(x_0)<0$.

c) Si $f'(x_0)=0$, entonces *f* presenta un extremo relativo en x_0.

a) Es falsa, ya que si $f'(x_0)=0$, hay casos en los que la función puede presentar un extremo relativo en x_0 y, entonces, ni crece ni decrece. Por ejemplo, $f(x)=(x-3)^2$ cumple que $f'(3)=0$ y no es creciente en $x=3$ ya que es un mínimo. Si la desigualdad fuera estricta sí sería cierta la afirmación.

b) Es falsa ya que x_0 podría ser un punto de inflexión con tangente horizontal y la función ser decreciente en él. Por ejemplo, la función $f(x)=-x^3$ es siempre decreciente, y en $x=0$ su derivada vale cero.

c) Es falsa; $f'(x_0)=0$ solo demuestra que en dicho punto la tangente es horizontal. Por ejemplo, la función $f(x)=x^3$ cumple que $f'(0)=0$ y en $x=0$ no hay máximo ni mínimo relativo ya que se trata de un punto de inflexión, eso sí, con tangente horizontal.

www.yoquieroaprobar.es

21. Señala las abscisas de todos los puntos donde es posible que la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ presente extremos relativos.

Las abscisas de los posibles extremos relativos son los valores de x que anulan la derivada de $f(x)$: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$. Se resuelve ahora la ecuación $f'(x) = 0$:

$15x^2(x^2 - 1) = 0$ si $x = 0$, $x = 1$, o $x = -1$, que son las abscisas de los posibles extremos relativos.

22. Considera la función $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+3}$.

Encuentra sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Su derivada, $f'(x) = \dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$ se anula para $x = -2$ y para $x = -4$. Se estudia el signo de la derivada en los intervalos definidos por estos dos valores y el valor que no pertenece al dominio:

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
Signo de f'	+	0	–		–	0	+
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	$-3 \notin D(f)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$.

La función es decreciente en $(-4, -3) \cup (-3, -2)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $A(-4, f(-4)) = A(-4, -4)$.

Tiene un mínimo relativo en el punto $A(-2, f(-2)) = A(-2, 0)$.

www.yoquieroaprobar.es

23. Obtén, en cada caso, los extremos relativos de las funciones:

a) $f'(x)=(x-1)(x-3)(x-5)$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{1+|x-1|}+\dfrac{1}{1+|x-4|}$

a) La derivada se anula para $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$, que son las abscisas de los puntos susceptibles de ser máximos o mínimos relativos. Se estudia el signo de la derivada en los intervalos definidos por dichos valores:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signo de f'	–	0	+	0	–	0	+
f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

b) Como intervienen valores absolutos, se debe definir la función a trozos, limitados por los valores que anulan los valores absolutos: $x = 1$ y $x = 4$. La función es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{5-x} & \text{si } x<1\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{5-x} & \text{si } 1\le x\le 4\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-3} & \text{si } x>4\end{cases}$$

Dentro de cada tramo la función es continua, pues es suma de cocientes de funciones continuas (los denominadores nunca se hacen cero). En los puntos de cambio los límites laterales coinciden: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{5}{4}$ y $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\dfrac{5}{4}$. Así pues, la función f es continua en $\mathbb{R}$.

Su derivada, salvo en los puntos $x = 1$ y $x = 4$, es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2-x)^2}+\dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x<1\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } 1<x<4\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-3)^2} & \text{si } x>4\end{cases}$

La derivada no se anula ni en el primer tramo (siempre es positiva) ni en el tercer tramo (siempre es negativa), así que los puntos con tangente horizontal deben buscarse en el tramo intermedio:

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(5-x)^2}=0\Rightarrow\frac{-(5-x)^2+x^2}{x^2(5-x)^2}=0\Rightarrow -25+10x-x^2+x^2=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Falta estudiar qué ocurre con la derivada en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 4$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=1+\dfrac{1}{16}$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-1+\dfrac{1}{16}$ por lo que f no es derivable en $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x)=-\dfrac{1}{16}+1$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} f'(x)=-\dfrac{1}{16}-1$ por lo que f no es derivable en $x = 4$.

x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1, \frac{5}{2}\right)$	$\frac{5}{2}$	$\left(\frac{5}{2}, 4\right)$	4	$(4,+\infty)$
Signo de f'	+	No existe $f'(1)$	–	0	+	No existe $f'(4)$	–
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

Por tanto, f presenta en $A\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{4}{5}\right)$ un mínimo relativo de tangente horizontal y en los puntos $B\left(1, \dfrac{5}{4}\right)$ y $C\left(4, \dfrac{5}{4}\right)$ f presenta máximos relativos no derivables.

www.yoquieroaprobar.es

24 a 26. Ejercicios resueltos.

27. Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Se determinan las variables, que son el radio de la base, r, y la altura del cilindro, h.

Se relacionan las variables: el volumen ha de ser 125 m^3, así que $125 = \pi r^2 h$ y $h = \dfrac{125}{\pi r^2}$.

La función que se quiere minimizar es la superficie del depósito (recordemos que no tiene tapa, solo base): $S = 2\pi rh + \pi r^2 \Rightarrow S(r) = 2\pi r\dfrac{125}{\pi r^2} + \pi r^2 = \dfrac{250}{r} + \pi r^2$

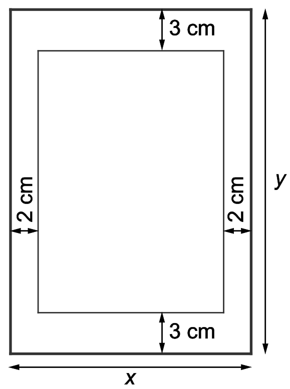
La variable r se mueve en el intervalo $(0,+\infty)$.

Se busca el mínimo de $S(r) = \dfrac{250}{r} + \pi r^2$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

La derivada, $S'(r) = \dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r$, se anula si $2\pi r = \dfrac{250}{r^2}$, es decir, si $r = \sqrt[3]{\dfrac{250}{2\pi}} \simeq 3{,}41$.

Como $\lim\limits_{r\to 0^+} S(r) = \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{250}{r} + \pi r^2 = +\infty$ y también $\lim\limits_{r\to +\infty} S(r) = \lim\limits_{r\to +\infty} \dfrac{250}{r} + \pi r^2 = +\infty$, concluimos que la mínima superficie se obtiene con un radio de $r = 3{,}41$ m y una altura $\left(h = \dfrac{125}{\pi r^2}\right)$ del mismo valor, $h = 3{,}41$ m.

28. Queremos escribir un texto de 96 cm^2, tal que deje 2 cm en cada margen lateral de la hoja en la que está escrito, así como 3 cm arriba y abajo. Calcula las dimensiones de la hoja más pequeña posible.



Se determinan las variables, que son las dimensiones de la hoja:

x los cm que mide la base e y los cm que mide la altura.

Se relacionan las variables:

el texto escrito debe ser 96 cm^2, así pues $(x-4)(y-6) = 96$, y operando se obtiene:

$$(x-4)(y-6) = 96 \Rightarrow xy - 6x - 4y + 24 = 96 \Rightarrow y(x-4) = 72 + 6x \Rightarrow y = \frac{72+6x}{x-4}.$$

La función que se quiere minimizar es la superficie de la hoja:

$$S = xy \Rightarrow S(x) = x\frac{72+6x}{x-4} = \frac{72x+6x^2}{x-4}.$$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, x debe estar en el intervalo abierto $(4,+\infty)$.

Se busca el mínimo de $S(x) = \dfrac{72x+6x^2}{x-4}$ en $(4,+\infty)$.

La derivada $S'(x) = \dfrac{(72+12x)(x-4)-(72x+6x^2)}{(x-4)^2} = \dfrac{6x^2-48x-288}{(x-4)^2} = \dfrac{6(x-12)(x+4)}{(x-4)^2}$ se anula si $x = 12$.

La solución negativa no aporta nada. Si $0 < x < 12$, la derivada es negativa y la función decrece; si $x > 12$, la derivada es positiva y la función crece, así pues, en $x = 12$ está el mínimo.

La altura, y, mide $y = \dfrac{72+6\cdot 12}{12-4} = 18$ cm.

Las dimensiones de la hoja más pequeña posible son: 12 cm de base y 18 cm de altura.

29. Ejercicio resuelto.

30. Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función: $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

$D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

La derivada es $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ y solo se anula para $x=0$. Estudiamos su signo, sin olvidarnos del $x=-1$:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
Signo de f'	$-$		$-$	0	$+$
f	Decreciente	$-1\notin D(f)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

El punto $A(0,f(0))=A(0,1)$ es un mínimo relativo. No tiene máximos.

La derivada segunda es $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$ y no se anula nunca, ya que su numerador tampoco lo hace, así pues, la función no tiene puntos de inflexión.

31. Determina la curvatura y los puntos de inflexión de:

a) $f(x)=x^3+6x^2-5$ **b)** $f(x)=x^2+\operatorname{sen}x-1$ **c)** $f(x)=xe^x$

Para hallar los puntos de inflexión se deben calcular los valores de x que anulan la derivada segunda de la función y después estudiar si en ellos cambia la curvatura, es decir, si cambia el signo de esta segunda derivada:

a) $f'(x)=3x^2+12x$, $f''(x)=6x+12=6(x+2)$

La derivada segunda se anula si $x=-2$.

A la izquierda de –2, la segunda derivada es negativa por lo que la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2)$ y a su derecha es positiva por lo que la función es cóncava hacia arriba $(-2,+\infty)$. El punto $A(-2,f(-2))=A(-2,11)$ es un punto de inflexión.

b) $f'(x)=2x+\cos x\Rightarrow f''(x)=2-\operatorname{sen}x$

$f''(x)=0\Rightarrow 2-\operatorname{sen}x=0\Rightarrow \operatorname{sen}x=2$, que no tiene solución.

Por tanto, la función f no tiene puntos de inflexión. La derivada segunda es siempre positiva y la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

c) La primera derivada es $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

La segunda derivada es $f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$. Se anula solo si $x=-2$. Se estudia la curvatura para saber si en dicho valor hay o no punto de inflexión:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
Signo de f''	$-$	0	$+$
f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

Así pues, el punto $A(-2,-2e^{-2})$ es un punto de inflexión.

32. Encuentra una relación entre *a*, *b* y *c* para que la curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ no tenga puntos de inflexión.

La primera derivada es $f''(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$ y la segunda es $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$. Para que no tenga puntos de inflexión, la derivada segunda no debe anularse nunca:

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12ax^2 + 6bx + 2c = 0 \Rightarrow 6ax^2 + 3bx + c = 0$ y para que esta ecuación de segundo grado no tenga soluciones debe tener su discriminante negativo, es decir: $(3b)^2 - 4 \cdot 6ac < 0 \Rightarrow 9b^2 - 24ac < 0$.

33. Ejercicio interactivo.

34. Para anestesiar a una persona hacen falta 20 mg de anestésico por cada kilogramo de masa. El anestésico se elimina de la circulación sanguínea con una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si tarda 2 horas en reducirse a la mitad, calcula aproximadamente la dosis necesaria para mantener anestesiada a una persona de 60 kg durante 1 hora.

Sea $A(t)$ la función que da los mg de anestésico que hay en la sangre transcurridas *t* horas desde su aplicación.

Sabemos que la velocidad de eliminación es proporcional a la cantidad de anestésico presente, así que:

$$A'(t) = kA(t) \Rightarrow k = \frac{A'(t)}{A(t)},$$

como el segundo miembro es la derivada de una función logaritmo, dicha igualdad viene de $kt + b = \ln[A(t)]$, de donde $e^{kt+b} = e^{\ln[A(t)]} \Rightarrow e^{kt}e^b = A(t)$ y, llamando $M = e^b$ concluimos que $A(t) = Me^{kt}$.

Se calculan ahora los valores de los parámetros *M* y *k* ayudándonos de los datos del problema.

Nos aseguran que a las dos horas se reduce a la mitad, es decir: $A(t+2) = \frac{A(t)}{2}$.

Operando se obtiene que: $Me^{k(t+2)} = \frac{Me^{kt}}{2} \Rightarrow e^{kt}e^{2k} = \frac{e^{kt}}{2} \Rightarrow e^{2k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k \simeq -0{,}34657$

Así pues, se puede asignar el valor *k* = – 0,35. La función buscada es $A(t) = Me^{-0{,}35t}$.

Para mantener anestesiada a una persona de 60 kg se necesitan 1200 mg de anestésico y se requiere que esta sea la cantidad que haya en su sangre al cabo de una hora: $A(1) = 1200$.

Por tanto:

$$A(1) = Me^{-0{,}35} = 1200 \Rightarrow M \simeq 1702{,}8811 \; A(1) = Me^{-0{,}35} = 1200 \Rightarrow M \simeq 1702{,}8811$$

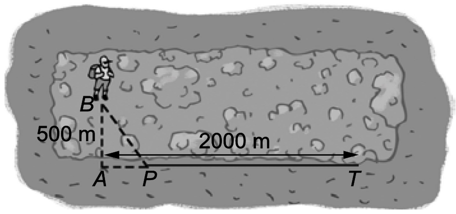
Se puede asignar *M* = 1702,88 y la función ya queda definida: $A(t) = 1702{,}88 \cdot e^{-0{,}35t}$.

La cantidad de anestésico que debemos suministrar al paciente la dará el valor de $A(t)$ para $t = 0$:

$$A(0) = 1702{,}88 \text{ mg}.$$

www.yoquieroaprobar.es

35. Un senderista despistado se halla en el punto *B* en una zona de matorral que se encuentra rodeada de una zona arcillosa. Quiere llegar hasta el punto *T* en el borde de la zona. Si al andar por el matorral gasta el doble de energía que sobre la zona arcillosa, calcula la dirección que debe elegir para consumir la mínima energía en llegar de *B* a *T*.



Llamamos $AP = x$. Si suponemos que, andando sobre zona arcillosa, el senderista consume R unidades de energía por km, entonces consumirá $2R$ unidades sobre el matorral.

El consumo total viene dado por la función: $f(x) = 2R\sqrt{x^2 + 500^2} + R(2000 - x)$

Su derivada es (observa que R es una constante) $f'(x) = R\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - 1\right)$, que se anula si $x = \pm\dfrac{500}{\sqrt{3}}$.

La variable x se mueve en el intervalo $[0, 2000]$.

Evaluamos: $f(0) = 3000$ u, $f(2000) = 1000\sqrt{17}$ u, $f\left(\dfrac{500}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{1500}{\sqrt{3}} + 2000\right)$ u.

Así pues, el menor consumo de energía corresponde a $x = \dfrac{500}{\sqrt{3}}$ que equivale a una dirección de α grados con

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\frac{500}{\sqrt{3}}}{500} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, es decir, $\alpha = 30^\circ$ respecto de la recta *AB*.

36. La función que nos da la posición, en metros, de un móvil con trayectoria rectilínea es:

$$\boldsymbol{e(t) = 2 + 30t - 3t^2}$$

siendo *t* el tiempo medido en segundos.

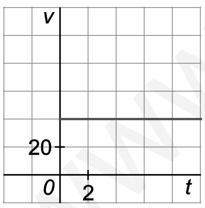
a) Calcula su velocidad a los 6 segundos.

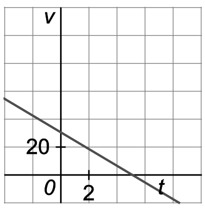
b) Calcula su aceleración. ¿Qué tipo de movimiento es?

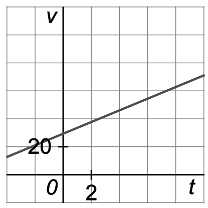
c) ¿En qué momento cambia de sentido su trayectoria?

d) ¿Para qué *t* vuelve a pasar por el punto de partida?

e) De las siguientes gráficas, indica cuál representa la velocidad del móvil en función del tiempo.







a) La velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo, $v(t) = e'(t) = 30 - 6t$, así pues, a los 6 segundos la velocidad es $v(6) = 30 - 6 \cdot 6 = -6$ m/s. (Avanza en sentido contrario).

b) La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, $a(t) = v'(t) = -6$ m/s^2. Es un movimiento uniformemente acelerado (la aceleración es negativa).

c) Como la trayectoria es rectilínea, el punto de retroceso será aquel en el que su velocidad se hace cero y, por tanto, pasa de positiva a negativa: $v(t) = 0 \Rightarrow 30 - 6t = 0 \Rightarrow t = 5$ s.

d) Pasará por el origen cuando $e(t) = 0$, es decir, para $t = 10{,}07$ s.

e) La segunda gráfica (la única con pendiente negativa).

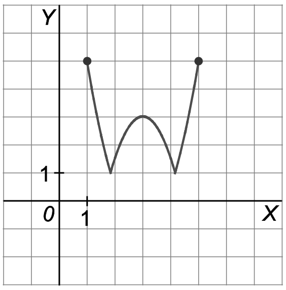
37 a 45. Ejercicios resueltos.

Ejercicios

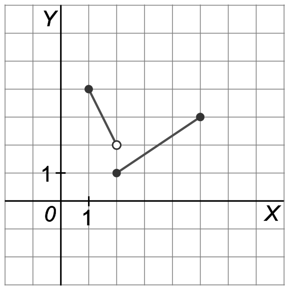
Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

46. Explica claramente por qué las siguientes funciones no cumplen las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos que se muestran.

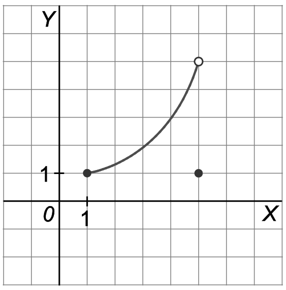
a)



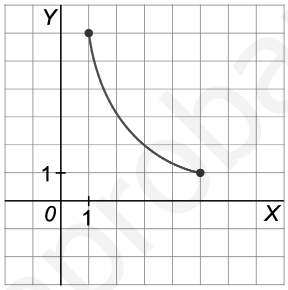
c)



b)



d)



a) Aunque la función es continua y $f(1)=f(5)$, tiene dos puntos angulosos en los que no existe la derivada.

b) La función no es continua en el intervalo cerrado. Aunque sí derivable en el abierto.

c) La función es discontinua.

d) Aunque es continua y derivable no cumple que la función valga lo mismo en los extremos del intervalo cerrado.

47. Sea la función $f(x)=x^3-3x+5$.

Comprueba que cumple las condiciones de Rolle en el intervalo $[-2,1]$ y determina el valor de *c* del teorema de Rolle. ¿Hay más de uno?

La función es continua y derivable ya que es una función polinómica. Por otra parte, $f(-2)=3$ y $f(1)=3$, así que *f* cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[-2,1]$.

Se halla ahora el valor $c\in(-2,1)$ en el que se anula la derivada $f'(x)=3x^2-3$:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x=-1,\ x=1$$

Así pues, $c=-1$. El otro valor en el que se anula derivada es $x=1$, que no pertenece al intervalo $(-2,1)$.

www.yoquieroaprobar.es

48. Determina, en cada caso, si es aplicable el teorema de Rolle a la función f en el intervalo que se especifica. En caso afirmativo, encuentra todos los valores c del intervalo en los que $f'(c)=0$.

a) $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ en $[1,3]$

b) $f(x)=\dfrac{4x^2-4x+4}{4x^2-4x+1}$ en $[-1,2]$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x^2-x+1}$ en $[-1,2]$

d) $f(x)=|x|+1$ en $[-2,2]$

e) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$ en $[0,2]$

f) $f(x)=|x^2+x|+5-4x$ en $[1,2]$

a) La función es continua y derivable por ser polinómica y $f(1)=0$ y $f(3)=0$. Sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$. La derivada de $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ es $f'(x)=3x^2-12x+11$ que se anula en $c_1=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}\simeq 1{,}42$ y para $c_2=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}\simeq 2{,}58$, ambos valores pertenecen al intervalo abierto $(1,3)$.

b) La función no es continua en $x=\dfrac{1}{2}\in[-1,2]$ porque anula el denominador. Así que no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[-1,2]$.

c) El denominador de $f(x)$ no se anula nunca, así que la función es continua. La derivada es $f'(x)=\dfrac{-3(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$. El denominador de su derivada, tampoco se anula nunca, por lo que también es derivable.

Se calculan ahora las imágenes en los extremos del intervalo $[-1,2]$: $f(-1)=2$ y $f(2)=2$. Por tanto, sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

La derivada se anula si $-3(2x-1)=0$, es decir si $x=\dfrac{1}{2}$. Así pues, $c=\dfrac{1}{2}$ cumple que $f'(c)=0$.

d) Se define la función a trozos: $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x\le 0\\ x+1 & \text{si } x>0\end{cases}$. La función es continua ya que en $x=0$ es continua porque sus límites laterales en $x=0$ coinciden con $f(0)=1$. La derivada, si $x\ne 0$, es $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-1$ no coincide con $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$, entonces $f'(0)$ no está definida y la función no es derivable en el intervalo cerrado $[-2,2]$, ya que no lo es en un punto del mismo, $x=0$.

Por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

e) La función $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$ no es continua en $x=-1$ pero este valor no pertenece al intervalo $[0,2]$.

Así que f sí es continua en [0, 2]. La derivada $f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-(e^x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x+1}{(x+1)^2}$ también está definida en el intervalo abierto $(0,2)$. Se estudian las imágenes en los extremos del intervalo: $f(0)=0$ y $f(2)=\dfrac{e^2-1}{3}$ y como no coinciden, no se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$.

f) Como debemos trabajar en el intervalo $[1,2]$, $|x^2+x|=x^2+x$, así pues podemos escribir la función en el intervalo $[1,2]$ de esta manera $f(x)=|x^2+x|+5-4x=x^2+x+5-4x=x^2-3x+5$. Es un trozo de parábola, continua y derivable, y además $f(1)=f(2)=3$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[1,2]$. Su derivada es $f'(x)=2x-3$ y sea anula para $c=\dfrac{3}{2}\in(1,2)$.

www.yoquieroaprobar.es

Teorema del valor medio

49. **a)** Comprueba que $f(x)=\dfrac{3}{x}$ satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[1,3]$.

b) Encuentra el número *c* cuya existencia asegura dicho teorema.

a) La función $f(x)=\dfrac{3}{x}$ es continua y derivable en el intervalo $[1,3]$. Nótese que $x=0$ no pertenece a dicho intervalo.

b) Así pues, existe un número *c* tal que $f'(c)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=-1$. Por otra parte, $f'(c)=-\dfrac{3}{c^2}$.

Ya se puede calcular *c*: $-1=-\dfrac{3}{c^2}\Rightarrow c=+\sqrt{3}$ (La solución negativa no es del intervalo $[1,3]$).

50. ***Demuestra que si α y β son ángulos del primer cuadrante con $\alpha<\beta$, entonces, $\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha<\beta-\alpha$. Utiliza el teorema del valor medio y la función seno.**

A la función $f(x)=\operatorname{sen}x$ se le puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$. Así pues, existe un número *c* comprendido entre α y β tal que $f(\beta)-f(\alpha)=f'(c)(\beta-\alpha)$, es decir, $\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha=\cos c(\beta-\alpha)$ y como el coseno de un ángulo del interior del primer cuadrante es siempre positivo y menor que 1, se concluye que:

$\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha=\cos c(\beta-\alpha)<1(\beta-\alpha)<\beta-\alpha$.

51. **Sea *f* la siguiente función:**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

¿Existen valores de *a* y *b* para los cuales *f* satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,4]$? Razona la contestación y, en caso afirmativo, calcula dichos valores.

En primer lugar, la función debe ser continua en $x=2$:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+b\right)=4+2a+b$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x=4$ $\qquad f(2)=4$

Por tanto, $4+2a+b=4\Rightarrow 2a+b=0$.

En segundo lugar, la función también debe ser derivable en $x=2$:

La derivada, si *x* es distinto de 2, es: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<2 \\ 2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Para que *f* sea derivable en $x=2$ debe cumplirse que: $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)\Rightarrow 4+a=2\Rightarrow a=-2\Rightarrow b=4$

Si $a=-2$ y $b=4$, la función *f* satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,4]$.

www.yoquieroaprobar.es

52. Dada la función $f(x)=\begin{cases} mx & \text{si } x<1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de *a*, *b* y *m* para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ y tenga un extremo relativo en $x = 3$.

b) Para los valores de $a = 1$, $b = –6$ y $m = –4$, calcula, si existe, un punto $c\in(0,5)$ tal que la tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sea paralela al segmento que une $O(0,0)$ y $A(5,-4)$.

a) La función es continua dentro de cada tramo (una recta y una parábola), debemos obligarla a que sea continua en $x = 1$. Para ello, estos tres valores han de coincidir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} mx=m \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax^2+bx+1\right)=a+b+1 \qquad f(1)=a+b+1$$

La función será continua en $x = 1$ si $a+b+1=m$.

Cumpliéndose esta condición, la función derivada, para $x\neq 1$, es: $f'(x)=\begin{cases} m & \text{si } x<1 \\ 2ax+b & \text{si } x>1 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 1$, estos dos valores han de coincidir:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} m=m \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(2ax+b)=2a+b$$

La función será derivable en $x = 1$ si $m=2a+b$.

Además, como tiene un máximo relativo en $x = 3$, debe cumplirse que $f'(3)=0$, es decir, $f'(3)=6a+b=0$.

Ya podemos calcular *a*, *b* y *m*:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+1=m \\ m=2a+b \\ 6a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b-m=-1 \\ 2a+b-m=0 \\ 6a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1,\ b=-6 \text{ y } m=-4.$$

b) La función es $f(x)=\begin{cases} -4x & \text{si } x<1 \\ x^2-6x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ y ya sabemos es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Su derivada es $f'(x)=\begin{cases} -4 & \text{si } x<1 \\ 2x-6 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$. En particular es continua en $[0,5]$ y derivable en $(0,5)$, por tanto se cumplen las condiciones del teorema del valor medio que asegura que existe un número *c* en $(0,5)$ con:

$f'(c)=\dfrac{f(5)-f(0)}{5-0}=-\dfrac{4}{5}$ (este valor es la pendiente del segmento une los puntos $O(0,0)$ y $A(5,-4)$.

Distinguimos dos casos:

Si $c<1\Rightarrow f'(c)=-4=-\dfrac{4}{5}$ no tiene solución. Si $c\geq 1\Rightarrow f'(c)=2c-6=\dfrac{-4}{5}\Rightarrow c=\dfrac{13}{5}\in(0,5)$.

53. Aplicando el teorema de Lagrange de los incrementos finitos, demuestra que para $x > 0$ se verifica:

$$\operatorname{arctg}(2x)-\operatorname{arctg}(x)<\frac{x}{1+x^2}$$

El teorema del valor medio también se conoce como el teorema de Lagrange de los incrementos finitos. La función $f(x)=\operatorname{arctg}(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y se puede aplicar, pues, el teorema del valor medio en cualquier intervalo $[a,2a]$ con $0 < a$, es decir, existe un número *c*, $a<c<2a$, con $f(2a)-f(a)=f'(c)(2a-a)$, esto es, $\operatorname{arctg}(2a)-\operatorname{arctg}(a)=\dfrac{1}{1+c^2}a=\dfrac{a}{1+c^2}$. Como $0<a<c$, entonces $\dfrac{a}{1+c^2}<\dfrac{a}{1+a^2}$ y se concluye que: $\operatorname{arctg}(2a)-\operatorname{arctg}(a)=\dfrac{1}{1+c^2}\cdot a=\dfrac{a}{1+c^2}<\dfrac{a}{1+a^2}$ para cualquier $a > 0$.

www.yoquieroaprobar.es

54. Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+nx & \text{si } x<-2 \\ x^3+mx^2 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$

a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4,2]$.

b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

a) En primer lugar, la función debe ser continua en $x=-2$:

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\left(x^2+nx\right)=4-2n \qquad \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left(x^3+mx^2\right)=-8+4m \qquad f(-2)=-8+4m$

Por tanto, $4-2n=-8+4m\Rightarrow n+2m=6$.

En segundo lugar, la función también debe ser derivable en $x=-2$:

La derivada, si x es distinto de 2, es $f'(x)=\begin{cases} 2x+n & \text{si } x<-2 \\ 3x^2+2mx & \text{si } x>-2 \end{cases}$.

Para que f sea derivable en $x=-2$ debe cumplirse: $\lim\limits_{x\to-2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to-2^+} f'(x)\Rightarrow -4+n=12-4m\Rightarrow n+4m=16$.

Así pues, debe cumplirse a la vez que $n+2m=6$ y que $n+4m=16$, es decir $n=-4$ y $m=5$.

b) La función es $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{si } x<-2 \\ x^3+5x^2 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$ y su derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } x<-2 \\ 3x^2+10x & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$.

$\dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\dfrac{28-32}{6}=-\dfrac{2}{3}=f'(c)$ con $c\in(-4,2)$. Hay que distinguir según sea $c<-2$ o $c\geq-2$:

Si $c<-2$ entonces $2x-4=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}>-2$, no vale.

Si $c\geq-2$ entonces $3x^2+10x=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=-3{,}27<-2$, no vale y $x=-0{,}07>-2$, sí vale.

Así pues, solo hay un valor del que habla el teorema: $c=-0{,}07$.

55. Dada la función $f(x)=x^3$**:**

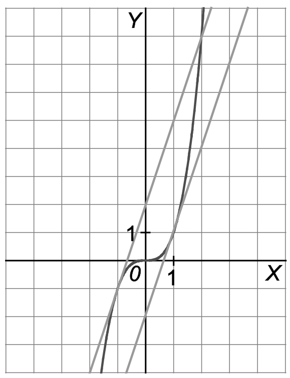
a) ¿Hay algún punto de su gráfica en el que la tangente sea paralela a la recta que une los puntos $A(-1,-1)$ y $B(2,8)$? Hállalo.

b) Calcula la ecuación de la tangente mencionada.

a) La función $f(x)=x^3$ es continua en el intervalo cerrado $[-1,2]$ y derivable en el abierto $(-1,2)$ por ser una función polinómica. Así que el teorema del valor medio indica que existe un número c del intervalo abierto $(-1,2)$ que cumple que $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{9}{3}=3$. Se halla ahora ese número c: $f'(x)=3x^2$, entonces: $3=3x^2\Rightarrow x=1$ [observa que $x=-1\notin(-1,2)$]. Se obtiene, pues, el punto $P(1,1)$, cuya tangente es paralela al segmento AB.

¿Y qué pasa con la solución $x=-1$ que hemos descartado? Observa que, aunque el teorema del valor medio no lo asegure, el punto $Q(-1,-1)$ también cumple que la tangente que pasa por él es paralela a la recta que une los puntos A y B.

En este caso el segmento AB pertenece a la recta tangente.



b) La tangente en $P(1,1)$ es $y=3x-2$ y la tangente en $Q(-1,-1)$ es $y=3x+2$.

Regla de L'Hôpital y aplicaciones

56. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\,\text{sen}\,x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\dfrac{x}{\text{sen}\,x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+2x}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x\left(x^2-x-2\right)}{2x^2-8x+8}$

h) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\left(x^2-1\right)\text{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(e^{x+h}-e^{-(x+h)}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)}{2h}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}}$, $a>0$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\,\text{sen}\,x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x\,\text{sen}\,x+(1-\cos x)\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x+\cos x-\cos^2 x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen}\,x\cos x-\text{sen}\,x-2\cos x(-\text{sen}\,x)}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\,\text{sen}\,x\cos x-\text{sen}\,x}{2}=0$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\dfrac{x}{\text{sen}\,x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\,\text{sen}\,x+x^2\cos x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen}\,x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\,\text{sen}\,x}{-\text{sen}\,x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2-x^2)\,\text{sen}\,x+4x\cos x}{-\text{sen}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\,\text{sen}\,x+(2-x^2)\cos x+4\cos x-4x\,\text{sen}\,x}{-\cos x}=\frac{6}{-1}=-6$$

c) Se puede escribir $(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}$ como $(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}=e^{\ln(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}}=e^{\text{tg}\,x\ln(\text{tg}\,x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+}\text{tg}\,x\ln(\text{tg}\,x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\text{tg}\,x)}{\dfrac{1}{\text{tg}\,x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\text{tg}\,x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{-1}{\text{tg}^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}(-\text{tg}\,x)=0$$

Así pues: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\text{tg}\,x\ln(\text{tg}\,x)}=e^0=1$

d) $$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+2x}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x-1}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2\cos x-2}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-3x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2\cos x-2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{1+2x}{-3x}}\right)^{\frac{1+2x}{-3x}\cdot\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=\begin{cases}e^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^{-\infty}=0\\[2ex] e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^{+\infty}=+\infty\end{cases}$$

. Luego el límite no existe.

www.yoquieroaprobar.es

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right)}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\ln x = 1$, por tanto: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right)} = e$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^3-2x+3\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}}{1}} = e^0 = 1$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x\left(x^2-x-2\right)}{2x^2-8x+8} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x(x^2-x-2)+e^x(2x-1)}{4x-8} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{e^x(x^2+x-3)}{4x-8} = \infty$

Al estudiar los límites laterales, por la izquierda vale $-\infty$ y por la derecha $+\infty$. Así pues, el límite no existe.

h) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\left(x^2-1\right)\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+\left(x^2-1\right)\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$

i) La expresión de este límite nos recuerda mucho a la definición de derivada. En efecto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^{x+h}-e^{-(x+h)}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)}{2h} = \frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{2} = \frac{e^x-e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\ln\left(a^x-ax\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\frac{a^x\ln a-a}{a^x-ax}}{1}} = e^{a(\ln a-a)} = e^{a\ln a-a^2} = \frac{e^{a\ln a}}{e^{a^2}} = \frac{e^{\ln a^a}}{e^{a^2}} = \frac{a^a}{e^{a^2}}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{\left(\ln(x)\right)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\frac{2\ln(x)}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x\operatorname{sen}(x-1)}{2\ln(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)+x\cos(x-1)}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$

l) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{-2\operatorname{sen}x}{1+2\cos x}}{-\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1+2\cos x} = 2$$

Así pues: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}} = e^2$

www.yoquieroaprobar.es

57. En cada uno de los casos, calcula *a* para que se cumpla la igualdad.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{\operatorname{sen}2x}=3$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos 2x)}=4$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{\ln(e^{ax}-1)}=4$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{ax+5}=e^2$

a) $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{\operatorname{sen}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{a}{1+ax}}{2\cos 2x}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow a=6$

b) $4=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(2x))}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{-a\operatorname{sen}(ax)}{\cos(ax)}}{\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\operatorname{sen}(ax)\cos(2x)}{2\operatorname{sen}(2x)\cos(ax)}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos(2x)}{\cos(ax)}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)}=$

$=\dfrac{a}{2}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\cos(ax)}{2\cos(2x)}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{4}$. Así pues, $4=\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow$ $a=4$ o $a=-4$.

c) $4=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{\ln(e^{ax}-1)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{\frac{ae^{ax}}{e^{ax}-1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2e^{ax}-2}{ae^{ax}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{2e^{ax}}{e^{ax}}-\frac{2}{e^{ax}}}{\frac{ae^{ax}}{e^{ax}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\frac{2}{e^{ax}}}{a}=\dfrac{2}{a}\Rightarrow\dfrac{2}{a}=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

d) $e^2=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{ax+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{ax+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3(ax+5)}{x}}=e^{3a}$, por tanto, $a=\dfrac{2}{3}$.

58. Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0)=1$ y $f'(0)=2$. Se considera la función $g(x)=2(f(x))^2$ y se pide:

a) Hallar la recta tangente a la curva $y=g(x)$ en $x=0$.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}$.

a) La recta tangente tiene una expresión del tipo $y=mx+n$, donde $m=g'(0)$.

Calculemos primero *m*: $g'(x)=4f(x)f'(x)$, por tanto, $m=g'(0)=4f(0)f'(0)=4\cdot 1\cdot 2=8$.

La recta tangente, $y=8x+n$, pasa por el punto de tangencia $A(0,g(0))=A(0,2)$, por tanto, $2=8\cdot 0+n$, es decir, $n=2$. La recta tangente es $y=8x+2$.

b) Hay que aplicar L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}=\left[\dfrac{f(0)-1}{e^{-0}-1}=\dfrac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{-e^{-x}}=\dfrac{f'(0)}{-e^{-0}}=\dfrac{2}{-1}=-2$

59. Sabiendo que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}$ es igual a 1, calcula los valores de *a* y *b*.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+\operatorname{sen} x}{2x\cos x^2}=\frac{b}{0}$$

Como el límite $\left(\dfrac{b}{0}\right)$ debe ser finito, la expresión obtenida ha de ser del tipo $\dfrac{0}{0}$ para poder seguir aplicando L'Hôpital y llegar a obtener un número. Así pues, $b=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+\operatorname{sen} x}{2x\cos x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos x}{2\cos x^2-2x2x\operatorname{sen}x^2}=\frac{2a+1}{2}$$

Como el límite $\left(\dfrac{2a+1}{2}\right)$ debe valer 1, concluimos que $\dfrac{2a+1}{2}=1$, es decir $a=\dfrac{1}{2}$. Por tanto, $a=\dfrac{1}{2}$ y $b=0$.

60. Determina, en cada caso, el valor de *a* que hace que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{3x}}{x} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$

b) $g(t)=\begin{cases}at^2 & \text{si } t\le 1\\ (t^2-1)\ln(t-1) & \text{si } t>1\end{cases}$

a) Debe cumplirse $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{3x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3e^{3x}}{1}=-3$, si $a=-3$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) Debe cumplirse $\lim\limits_{t\to 1} g(t)=g(1)=a$.

$$\lim_{t\to 1^-} g(t)=\lim_{t\to 1^-}\left(at^2\right)=a \text{ y } \lim_{t\to 1^+} g(t)=\lim_{t\to 1^+}\left(t^2-1\right)\ln(t-1)=\lim_{t\to 1^+}\frac{\ln(t-1)}{\dfrac{1}{t^2-1}}=\lim_{t\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{t-1}}{\dfrac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}}=\lim_{t\to 1^+}\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{-2t(t-1)}=0$$

Si $a=0$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

61. Sea $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ la función derivable que para $x\neq 0$ verifica que $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{sen} x}$:

a) ¿Cuánto vale $f(0)$?

b) ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) Al ser continua, $f(0)$ debe ser igual al límite de *f* en dicho punto. Aplicando L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)\cos x}=0$$. Así pues, $f(0)=0$.

b) Se calcula $f'(0)$ aplicando la definición de derivada, y la regla de L´Hôpital dos veces:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+h^2)}{\operatorname{sen} h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h^2)}{h\operatorname{sen} h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h}{1+h^2}}{\operatorname{sen} h+h\cosh}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(1+h^2)-2h2h}{(1+h^2)^2}}{\cos h+\cos h+h(-\operatorname{sen} h)}=\frac{2}{2}=1$$. Así pues, $f'(0)=1$.

www.yoquieroaprobar.es

Extremos relativos. Crecimiento y decrecimiento

62. Localiza los extremos absolutos, si existen, de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) En $[-3, 0)$, $(-3, 0]$, $[0, 3]$, $(0, 3)$ y $(-1, 3]$, de la función: $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

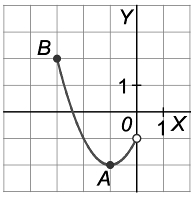
b) En $[-3, -1)$, $[-3, 1]$, $[-3, 3]$, $[-3, 1)$, $[-4, 1]$ y $[-1, 2)$ de la función $g(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$.

a) La derivada es $f'(x) = 2x + 2$ y se anula si $x = -1$.

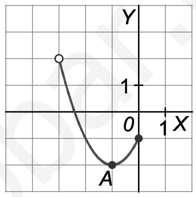
Para hallar los extremos absolutos en los intervalos indicados se debe evaluar la función en $x = -1$ (valor que anula derivada) y en los extremos de los intervalos, si son cerrados:

$f(-1) = -2$ $\quad$ $f(-3) = 2$ $\quad$ $f(0) = -1$ $\quad$ $f(3) = 14$

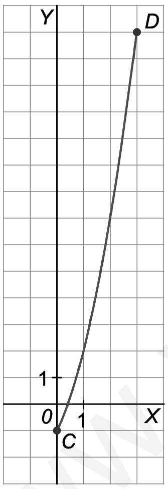
En el intervalo $[-3, 0)$, el mínimo absoluto se alcanza en $x = -1$ y es $f(-1) = -2$ y el máximo absoluto se alcanza en $x = -3$ y es $f(-3) = 2$.



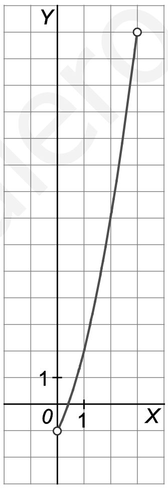
En el intervalo $(-3, 0]$ el mínimo absoluto es $f(-1) = -2$ y no tiene máximo absoluto.



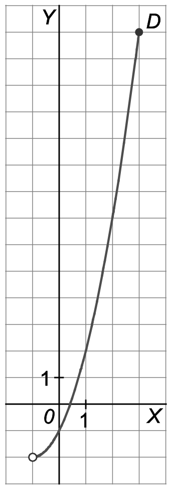
En el intervalo $[0, 3]$ el mínimo absoluto es $f(0) = -1$ y el máximo absoluto es $f(3) = 14$.



En el intervalo $(0, 3)$ no hay mínimo absoluto ni máximo absoluto.



En el intervalo $(-1, 3]$, no tiene mínimo absoluto y el máximo absoluto es $f(3) = 14$.



b) La función es continua en $x = -2$ ya que sus límites laterales coinciden. La derivada de $p(x) = -x^2 - 2x + 5$ es $p'(x) = -2x - 2$ y se anula si $x = -1$, que no pertenece a su dominio de definición. Así pues, el valor $x = -1$ no aporta nada a la hora de calcular los extremos absolutos. La derivada de $q(x) = x^2 + 1$ es $q'(x) = 2x$ y se anula si $x = 0$. Este valor sí hay que tenerlo en cuenta. Para hallar los extremos absolutos en los intervalos indicados se debe evaluar la función en $x = 0$ (valor que anula derivada), en los extremos de los intervalos y en $x = -2$ (en este punto, la función no es derivable y por eso se le debe incluir en el estudio).

$g(0) = 1$ $\quad$ $g(-3) = 2$ $\quad$ $g(3) = 10$ $\quad$ $g(-4) = -3$ $\quad$ $g(1) = 2$ $\quad$ $g(2) = 5$ $\quad$ $g(-2) = 5$

En el intervalo $[-3, -1)$, el mínimo absoluto es $g(-3) = 2$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En el intervalo $[-3, 1]$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En el intervalo $[-3, 3]$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y el máximo absoluto es $g(3) = 10$.

En el intervalo $[-3, 1)$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En el intervalo $[-4, 1]$, el mínimo absoluto es $g(-4) = -3$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En $[-1, 2)$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y no hay máximo absoluto.

www.yoquieroaprobar.es

63. Halla los máximos y mínimos de la función: $f(x)=(2x^3-4x^2)e^{-x}$.

La derivada es $f'(x)=(-2x^3+10x^2-8x)e^{-x}=-2x(x-1)(x-4)e^{-x}$, y se anula si $x=0$, $x=1$, $x=4$. Se estudia el signo de la derivada:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,+\infty)$
Signo de f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función tiene máximos relativos en los puntos $O(0,0)$ y $A(4;1,17)$. Este último es absoluto.

La función tiene un mínimo relativo en el punto $B(1;-0,74)$.

64. Dada la función $f(x)=ax+b\sqrt{x}$, determina los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:

a) $f(x)$ alcanza su máximo en el punto de abscisa $x=100$.

b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $A(49,91)$.

La derivada de la función es $f'(x)=a+\dfrac{b}{2\sqrt{x}}$.

La propiedad a) nos asegura que $f'(100)=0$, es decir, $a+\dfrac{b}{2\sqrt{100}}=0 \Rightarrow a+\dfrac{b}{20}=0 \Rightarrow 20a+b=0$.

La propiedad b) nos asegura que $f(49)=91$, es decir, $49a+b\sqrt{49}=91 \Rightarrow 49a+7b=91$.

Y con el sistema obtenido, $\left.\begin{matrix} 20a+b=0 \\ 49a+7b=91 \end{matrix}\right\}$, ya podemos calcular a y b: $a=-1$ y $b=20$.

www.yoquieroaprobar.es

65. Determina un punto de la curva de ecuación $f(x)=xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

La pendiente de las rectas tangentes nos la da el valor de la derivada: $f'(x)=e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$

La pendiente máxima será el máximo de esta derivada, por tanto hay que estudiar la derivada de la derivada:

$f''(x)=-4xe^{-x^2}+(1-2x^2)e^{-x^2}(-2x)=(4x^3-6x)e^{-x^2}$

$f'(x)=0\Rightarrow(4x^3-6x)e^{-x^2}=0\Rightarrow 4x^3-6x=0\Rightarrow 2x(2x^2-3)=0\Rightarrow x=0, x=-\sqrt{\frac{3}{2}}, x=+\sqrt{\frac{3}{2}}$

Por consiguiente, las pendientes de las rectas tangentes tienen un máximo relativo en el punto $O(0,0)$. Falta, pues, asegurarnos de que ese máximo es absoluto. Para ello se estudian los límites en el infinito de dichas pendientes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x^2)e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-2x^2}{e^{x^2}}=0$. Análogamente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

Por tanto, el punto $O(0,0)$ es el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima y dicha pendiente vale $f'(0)=(1-2\cdot 0^2)e^{-0^2}=1$.

66. Considera la función $f(x)=xg(x)$. Sabiendo que:

- **La función $g(x)$ es continua, derivable y tiene un máximo en $x=1$.**
- **$f(1)g(1)=4$**

a) ¿Tiene la función f un máximo en $x=1$? Justifica tu respuesta.

b) Si, además sabemos que:

$$g(x)=ax^2+bx+c$$

calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que f tenga un mínimo en $x=0$.

a) La derivada de $f(x)$ es $f'(x)=g(x)+xg'(x)$. Se sabe que $g'(1)=0$, ya que *g* tiene un máximo en $x=1$. Así pues $f'(1)=g(1)+1\cdot g'(1)=g(1)+0$. Para que *f* tenga un máximo en $x=1$, su derivada en dicho punto debe valer cero, pero $f'(1)$ no puede valer cero, ya que entonces $g(1)$ también valdría cero y esto no puede ser porque nos dicen que $f(1)g(1)=4$. Por tanto, *f* no puede tener un máximo en $x=1$ porque $f'(1)\neq 0$.

b) La derivada de $g(x)=ax^2+bx+c$ es $g'(x)=2ax+b$.

Como *g* tiene un máximo en $x=1$, $g'(1)=0$, es decir, $2a+b=0$ y $b=-2a$.

Como *f* ha de tener un mínimo en $x=0$, $f'(0)=0$. La expresión de la derivada de *f* era $f'(x)=g(x)+xg'(x)$, entonces $f'(0)=g(0)+0\cdot g'(0)=g(0)=c\Rightarrow c=0$. Así pues, *g* es de la forma $g(x)=ax^2-2ax$.

Por otra parte, se sabe que $f(1)=g(1)=4$, es decir, $1\cdot g(1)g(1)=4\Rightarrow[g(1)]^2=4$ 1, por tanto, $g(1)=2$ o $g(1)=-2$.

Si $g(1)=-2$, se tendría que $g(1)=a\cdot 1^2-2a\cdot 1=-2\Rightarrow a=2$, y la función sería $g(x)=2x^2-4x$, que se debe descartar porque esta función es una parábola cóncava hacia arriba y no presenta ningún máximo.

Si $g(1)=2$, se tiene que $g(1)=a\cdot 1^2-2a\cdot 1=2\Rightarrow a=-2$, y la función sería $g(x)=-2x^2+4x$, que sí tiene un máximo en su vértice (de abscisa $x=1$ como asegura la primera condición del enunciado).

Así pues, $a=-2$, $b=4$ y $c=0$.

Las funciones en cuestión son $g(x)=-2x^2+4x$ y $f(x)=-2x^3+4x^2$.

www.yoquieroaprobar.es

67. Para cada *h* se considera la función: $f(x)=2x^3-3x^2+h$

a) Halla los puntos en los que *f* alcanza sus valores máximos y mínimos relativos.

b) Encuentra *h* para que el valor de *f* en el máximo o mínimo hallado antes sea 0.

a) La derivada es $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$, que se anula si $x = 0$ o si $x = 1$. Se estudia si son máximos o mínimos con el criterio de la derivada segunda, $f''(x)=12x-6$:

$f''(0)=-6<0$, por tanto, $f(0)=h$ es un máximo.

$f''(1)=6>0$, por tanto, $f(1)=-1+h$ es un mínimo.

b) Para que el máximo sea cero debe cumplirse que $h = 0$.

Para que el mínimo sea cero debe cumplirse que $-1 + h = 0$, es decir, $h = 1$.

68. Demuestra que para todo número real positivo, *P*, se cumple que $\ln(1+P)>\frac{P}{1+P}$. Para ello sigue estos pasos:

I. Demuestra que la función $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$, es continua y derivable en el intervalo $(0,+\infty)$.

II. Demuestra que $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.

III. Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

IV. Concluye la demostración.

I. La función es continua y derivable para valores positivos de *x,* ya que es suma de funciones derivables.

II. La derivada de $f(x)$ es $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$, que es siempre positiva si $x>0$.

Por tanto, la función $f(x)$ es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$.

III. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\right]=0-0=0$

IV. Como se ha visto que si *x* es positivo, entonces, $f(x)>0\Rightarrow \ln(1+x)-\frac{x}{1+x}>0\Rightarrow \ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$.

Luego, para todo número real positivo, *P*, se cumple que $\ln(1+P)>\frac{P}{1+P}$.

www.yoquieroaprobar.es

69. Halla los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo de abscisa $x = 3$.

Se buscan las asíntotas verticales de $f(x)$ en los valores de x que anulan el denominador:

$$x+c=0\Rightarrow x=-c$$

Sabemos que la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$, entonces $c = -1$:

La asíntota oblicua es de la forma $y = mx + n$, siendo $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+b}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a.$$

Como la pendiente de la asíntota oblicua es 2 entonces $a = 2$. Luego $f(x)=\dfrac{2x^2+b}{x-1}$.

Además, $f(x)$ tiene un extremo de abscisa $x = 3$, luego $f'(3)=0$. Por tanto:

$$f'(x)=\frac{4x(x-1)-\left(2x^2+b\right)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2}$$

$$f'(3)=0\Rightarrow 2\cdot 3^2-4\cdot 3-b=0\Rightarrow b=6$$

Luego, $f(x)=\dfrac{2x^2+6}{x-1}$.

70. Demuestra analítica y gráficamente que la ecuación $e^x = x$ no tiene solución.

Vamos a seguir estos pasos:

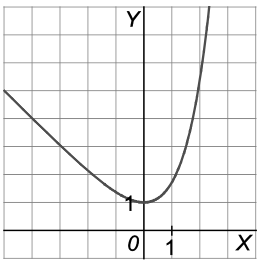
I. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^x-x$.

II. Hallar el mínimo absoluto de la función *f*.

III. Demostrar que $e^x-x>0$ para todo *x* y concluimos la demostración.

La derivada de la función continua $f(x)=e^x-x$ es $f'(x)=e^x-1$, que se anula si $x = 0$. Se estudia su monotonía:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
Signo de f'	–	0	+
f	Decreciente	Mínimo absoluto	Creciente



La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

El mínimo que hay en el punto $(0, 1)$ es un mínimo absoluto ya que la función es continua y es siempre decreciente a la izquierda de cero y siempre creciente a la derecha de cero. Así pues, el valor mínimo que toma la función es $f(0)=1$. Por tanto, $f(x)\geq 1$ para todo *x*.

Como $f(x)\geq 1$, entonces $e^x-x\geq 1\Rightarrow e^x-x>0\Rightarrow e^x>x$ para todo *x* y, por tanto, nunca puede ser que $e^x=x$.

www.yoquieroaprobar.es

Problemas de optimización

71. Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima.

Se trata de un problema de optimización.

Se nombran las variables: longitud (x) en metros de los lados de la base cuadrada y profundidad (y) en metros.

Se relacionan las variables: el área total debe ser 192 m^2, por tanto: $x^2 + 4xy = 192$, $y = \frac{192 - x^2}{4x}$

La función que se quiere maximizar es el volumen $V = xxy$, es decir: $V(x) = x^2 \frac{192 - x^2}{4x} = -\frac{1}{4}x^3 + 48x$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: como los números buscados son positivos, x debe estar en el intervalo abierto $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

Se busca el máximo de $V(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 48x$ en $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

$$V'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 48 = 0 \Rightarrow x = 8 \in \left(0, \sqrt{192}\right).$$

La solución negativa no es realista.

Como los límites de la función en los extremos del intervalo son cero, el máximo absoluto de la función se alcanza para $x = 8$, por tanto, $y = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4$.

Las dimensiones de la piscina que maximizan el volumen son 8 metros de lado para la base cuadrada y 4 metros de profundidad. El volumen máximo es $V(8)$, esto es, 256 m^3.

72. Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de tal manera que uno de ellos tenga doble longitud que otro y que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encuentra la longitud de cada trozo.

Se trata de un problema de optimización.

Se nombran las variables: cada uno de los trozos (x, $2x$ e y), medidos en decámetros.

Se relacionan las variables:

La suma de los trozos es 14 dam: $x + 2x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - 3x$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x.

Como las longitudes han de ser positivas: $x > 0$ y también $14 - 3x > 0$, por tanto, $x \in \left(0, \frac{14}{3}\right)$.

La función que se quiere maximizar es la suma de las áreas: $A = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$.

Sustituyendo y operando: $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{4x^2}{16} + \frac{(14 - 3x)^2}{16} = \frac{5x^2}{16} + \frac{196 + 9x^2 - 84x}{16} = \frac{14x^2 - 84x + 196}{16}$

Se busca el mínimo: $A'(x) = \frac{28x - 84}{16} = 0 \Rightarrow 28x - 84 = 0 \Rightarrow x = 3 \in \left(0, \frac{14}{3}\right)$

Como la función $A(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba, ya podemos asegurar que su vértice ($x = 3$) es el mínimo absoluto, sin necesidad de más cálculos.

El mínimo se alcanza si $x = 3$, y , por tanto, $2x = 6$, $y = 14 - 3x = 5$.

Los trozos miden 3 dam, 6 dam y 5 dam.

www.yoquieroaprobar.es

73. Partimos un hilo metálico de longitud 1 m en dos trozos, haciendo con o un cuadrado y con el otro un círculo. Calcula las dimensiones de cada trozo para que la suma de las áreas sea:

a) Máxima

b) Mínima

Se trata de un problema de optimización.

Se nombran las variables, que son las longitudes de los dos trozos: x (para hacer el círculo), e y (para hacer el cuadrado), ambas medidas en metros.

Se relacionan las variables: $x+y=1$, es decir, $y=1-x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es la suma de las áreas.

El lado del cuadrado es $\frac{1-x}{4}$ y su área: $\left(\frac{1-x}{4}\right)^2$. La longitud del círculo es $x=2\pi r \Rightarrow r=\frac{x}{2\pi}$, así pues, su área es $\pi r^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}$.

La función suma de áreas es $A(x)=\left(\frac{1-x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-2\pi x+\pi}{16\pi}$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: $(0,1)$.

Se busca el máximo y el mínimo de $A(x)=\frac{(\pi+4)x^2-2\pi x+\pi}{16\pi}$ en $(0,1)$.

$A'(x)=\frac{2(\pi+4)x-2\pi}{16\pi}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{\pi+4}\in(0,1)$. Como la función $A(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba, este valor corresponde a su vértice y, por tanto, es el mínimo absoluto.

Así pues, el mínimo se alcanza si el trozo destinado a formar el círculo mide $x=\frac{\pi}{\pi+4}$ m.

No se puede calcular el valor de la función en los extremos, por tanto, se calculan sus límites: $\lim_{x\to 0}A(x)=\frac{1}{16}$ y $\lim_{x\to 1}A(x)=\frac{1}{4\pi}$. Si solo se formara un círculo con todo el hilo, se obtendría el área máxima. Pero esta posibilidad no la contempla el problema. Para responder se podría decir que cuanto más largo sea el trozo para formar el círculo, mayor será la suma de las áreas.

74. De entre todos los números reales positivos *x*, *y*, tales que $x+y=10$, encuentra aquellos para los que el producto $p=x^2y$ es máximo.

Se nombran las variables, que son los números: x e y.

Se relacionan las variables: $x+y=10$, es decir, $y=10-x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es el producto $p=x^2y=x^2(10-x)=10x^2-x^3=x^2(10-x)$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. Debe estar en el intervalo abierto $(0,10)$.

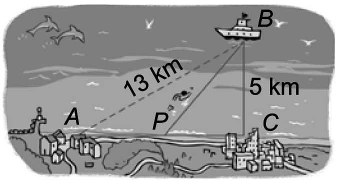
Se busca el máximo y el mínimo de $p(x)=x^2(10-x)$ en el intervalo abierto $(0,10)$.

$p'(x)=20x-3x^2=x(20-3x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{20}{3}$, $p\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{4000}{27}$

No se puede calcular el valor de la función en los extremos, por tanto, se calculan sus límites: $\lim_{x\to 0}p(x)=\lim_{x\to 10}p(x)=0$. Como los límites de la función en los extremos del intervalo son cero, el valor $x=\frac{20}{3}$ corresponde al máximo absoluto. Así pues, el máximo se alcanza si $x=\frac{20}{3}$ e $y=10-x=\frac{10}{3}$.

www.yoquieroaprobar.es

75. Un barco *B* y dos ciudades *A* y *C* de la costa forman un triángulo rectángulo en *C*, de acuerdo a lo reflejado en la figura.



Un hombre situado en *A* desea llegar hasta el barco *B*. Sabiendo que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5 km/h, ¿a qué distancia de *A* debe abandonar la costa para nadar hasta *B* si quiere llegar lo antes posible?

Primero, con ayuda del teorema de Pitágoras, se observa que la distancia entre las dos ciudades es de 12 km.

Se nombra la variable: *x* es la distancia, en metros, *PC*.

La función que se quiere minimizar es el tiempo empleado por el hombre para recorrer *AP* (a 5 km/h) y *PB* (a 3 km/h). Se estudia cuánto miden estos segmentos: $AP = 12 - x$; para calcular *PB* se trabaja en el triángulo *PBC* y se obtiene que $PB = \sqrt{5^2 + x^2}$.

El tiempo (espacio/velocidad) empleado es la función $t(x) = \frac{12 - x}{5} + \frac{\sqrt{25 + x^2}}{3} = \frac{36 - 3x + 5\sqrt{25 + x^2}}{15}$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*: $[0,12]$

Se busca el mínimo de $t(x) = \frac{36 - 3x + 5\sqrt{25 + x^2}}{15}$ en $[0,12]$.

$$t'(x) = \frac{1}{15}\left(-3 + \frac{5x}{\sqrt{25 + x^2}}\right) = \frac{-3\sqrt{25 + x^2} + 5x}{15\sqrt{25 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{25 + x^2} + 5x = 0 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{25 + x^2} \Rightarrow 25x^2 = 225 + 9x^2 \Rightarrow 16x^2 = 225 \Rightarrow x = 3{,}75 .$$

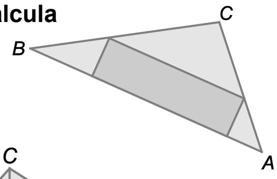
Se comparan:

$t(0) = \frac{12}{5} + \frac{5}{3} \simeq 4{,}07$ $\quad t(12) = \frac{13}{3} = 4{,}\hat{3}$ $\quad t(3{,}75) = 3{,}7\hat{3}$

Así pues, el mínimo se alcanza si camina durante $12 - 3{,}75 = 8{,}25$ km y luego se pone a nadar.

www.yoquieroaprobar.es

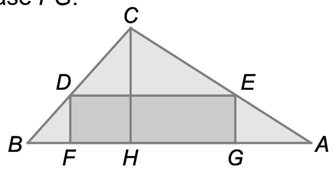
76. En el triángulo *ABC*, el lado *AB* mide 10 cm y la altura sobre *AB* mide 4 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de máxima área inscrito en dicho triángulo con un lado descansando sobre el lado *AB*.



Llamamos x a la altura *DF* del rectángulo que andamos buscando, y a su base *FG*.

En la figura se observa que los triángulos *ABC* y *DEC* son semejantes,

por tanto, los cocientes entre sus alturas y bases son iguales:



$\frac{4}{10} = \frac{4-x}{y} \Rightarrow y = \frac{5(4-x)}{2} = \frac{20-5x}{2}$.

La función que queremos maximizar es el área del rectángulo $A(x) = \frac{20-5x}{2}x = \frac{20x-5x^2}{2}$ donde $x \in [0,4]$.

Dicha función es una parábola cóncava hacia abajo que tiene su máximo absoluto en su vértice. Su derivada, $A'(x) = \frac{20-10x}{2} = 10-5x$, se anula si x = 2, por lo que el máximo se alcanza si x = 2 y la base es $y = \frac{20-5\cdot 2}{2} = 5$.

Así pues, el rectángulo de área máxima tiene 5 cm de base y 2 cm de altura y el área máxima son 10 cm^2.

77. Una tienda vende aceite a 2 € el litro. Al vender x litros los costes de todo tipo (expresados en euros) son $0,5x + Cx^2$. Se sabe que el beneficio máximo se obtiene vendiendo 750 L. Encuentra el valor de *C* y el beneficio máximo obtenido.

La función beneficio (ingresos – costes) es $B(x) = 2x - (0,5x + Cx^2) = 1,5x - Cx^2$. Sabemos además que su máximo absoluto (es una parábola cóncava hacia abajo) se halla en $x = 750$ por lo que $B'(750) = 0$.

La derivada es $B'(x) = 1,5 - 2Cx$, $B'(750) = 1,5 - 2C \cdot 750 = 0$, de donde concluimos que $C = 0,001$.

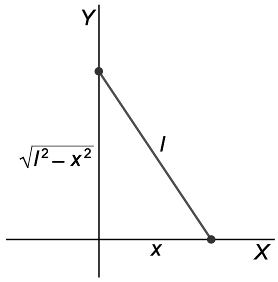
78. Un segmento de longitud *l* se apoya en los ejes coordenados del primer cuadrante determinando con ellos un triángulo rectángulo. Hallar el valor mínimo de la abscisa en que se apoya para que el área del triángulo mencionado, de hipotenusa l, sea máximo.

Se nombran las variables: la abscisa de la base es x y la ordenada de la altura es y.

Se relacionan las variables: $x^2 + y^2 = l^2$, es decir, $y = \sqrt{l^2 - x^2}$.

La función que se quiere maximizar es el área del triángulo:

$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{l^2 - x^2}$



Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x.

Debe estar en el intervalo cerrado $[0, l]$. Se busca el máximo de $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{l^2 - x^2}$ en el intervalo cerrado $[0, l]$.

$A'(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{l^2 - x^2} - \frac{x2x}{2\sqrt{l^2 - x^2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{l^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}}\right] = \frac{1}{2}\frac{l^2 - 2x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}}$, que se anula si $l^2 - 2x^2 = 0$, es decir, si $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$ (la solución negativa se descarta). Comparamos: $A\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{l^2}{4}$, $A(0) = 0$, $A(l) = 0$

Así pues, el área máxima $\left(\frac{l^2}{4}\right)$ se obtiene si $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$. La altura también sería $y = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

www.yoquieroaprobar.es

79. Sea un rectángulo de 4 m de perímetro.

a) Si se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores, ¿entre qué valores está comprendida el área de la figura resultante? Calcúlala.

b) Si se sustituyen dos lados opuestos por semicircunferencias exteriores, calcula las dimensiones del rectángulo original para que la figura formada tenga máxima área.

a) Se nombran las variables: x es la longitud de la altura e y la longitud de la base. Ambas medidas en metros.

Se relacionan las variables: $2x + 2y = 4$, es decir, $y = 2 - x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es el área de la figura (un rectángulo más dos círculos).

$$A(x) = x(2-x) + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(2x^2 - 4x + 4) + 2x - x^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 + (2-\pi)x + \pi$$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, $0 < x < 2$.

El mínimo absoluto de la parábola (cóncava hacia arriba) $A(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 + (2-\pi)x + \pi$ se encuentra en su vértice, es decir, si $x = \frac{\pi - 2}{\pi - 2} = 1$.

Se compara: $A(1) = 1 + \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0} A(x) = \pi$, $\lim_{x\to 2} A(x) = \pi$

Así pues, el área $A(x)$ de la figura cumple $1 + \frac{\pi}{2} \le A(x) < \pi$.

b) Se nombran las variables: x es la longitud del lado sustituido por semicircunferencias, e y la longitud de los otros dos lados.

Se relacionan las variables: $2x + 2y = 4$, es decir, $y = 2 - x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es el área de la figura (un rectángulo más un círculo).

La función área es $A(x) = x(2-x) + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi - 4}{4}\right)x^2 + 2x$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, $0 < x < 2$.

El máximo de la parábola (cóncava hacia abajo) se encuentra en su vértice, es decir, si $x = \frac{4}{4-\pi} \simeq 4{,}66$.

Pero este valor no pertenece al intervalo de definición de x: $0 < x < 2$.

Por otra parte, $A(0) = 0$ y $A(2) = \pi$.

Así que se podría decir que el área máxima se conseguiría si el rectángulo inicial fuese un segmento y la figura resultante degenerara en un solo círculo de 2 m de diámetro.

Curvatura y puntos de inflexión

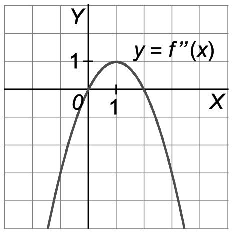
80. Halla los valores de m para los que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ es siempre cóncava hacia arriba.

Para que la función sea siempre cóncava hacia arriba su derivada segunda debe ser siempre positiva. Se impone esta condición: $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3$ y $f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m$

Para que $f''(x) = 2(6x^2 + 12x + m)$ sea siempre positiva, el discriminante $12^2 - 4 \cdot 6 \cdot m < 0 \Rightarrow m > 6$.

www.yoquieroaprobar.es

81. La gráfica que se muestra es la de la derivada segunda de cierta función *f*. A partir de ella, deduce la curvatura de *f* y sus puntos de inflexión. ¿Qué se puede afirmar con seguridad de la gráfica de *f*?

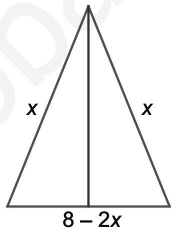


La función es cóncava hacia abajo en: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

La función es cóncava hacia arriba en: $(0,2)$

Los puntos $A(0,f(0))$ y $B(2,f(2))$ son puntos de inflexión.

82. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



Se nombra la variable: *x* es la longitud de los lados iguales.

La función que se quiere maximizar es el área del triángulo.

La base mide $b = 8 - 2x$ y la altura se puede hallar con Pitágoras y se obtiene $a=\sqrt{8x-16}$.

El área es $A(x)=\dfrac{ba}{2}=(4-x)\sqrt{8x-16}=2(4-x)\sqrt{2x-4}$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*. La suma de dos lados debe ser siempre mayor que el tercero, así pues: $x+x>8-2x \Rightarrow x>2$ y $x+8-2x>x \Rightarrow x<4$.

Por tanto, $2 < x < 4$. Para continuar con el problema vamos a incluir los valores extremos ($x = 2$ y $x = 4$) en el estudio y así nos resultará más cómodo. Esto no supone ningún obstáculo porque estamos calculando un máximo y sabemos que en esos valores los triángulos son degenerados (son segmentos) y podemos asignarles área cero. Es decir, hemos añadido dos valores, $x = 2$ y $x = 4$, que no van a influir en la respuesta final. (Este mismo procedimiento puede utilizarse en problemas similares)

Así pues, suponemos que *x* se mueve en el intervalo cerrado $[2,4]$.

$$A'(x)=2\left[-\sqrt{2x-4}+(4-x)\frac{2}{2\sqrt{2x-4}}\right]=2\left[\frac{8-3x}{\sqrt{2x-4}}\right]=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$

Comparamos: $A(2)=0$, $A(4)=0$, $A\left(\dfrac{8}{3}\right)=3{,}08$.

Así pues, el triángulo de área máxima es el triángulo equilátero de lado $\dfrac{8}{3}$.

(Observa que si $x=\dfrac{8}{3}$, entonces la base mide $b=8-2x=8-2\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{8}{3}$).

83. **Sea la función** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ **.**

a) Esboza su gráfica.

b) ¿Qué nombre recibe esta función?, ¿y su gráfica?

a) $D(f)=\mathbb{R}$

La función es siempre positiva porque se trata de una exponencial.

La función es par porque $f(-x)=f(x)$, por tanto, es simétrica respecto al eje *Y*.

No tiene asíntotas verticales ni oblicuas pero sí horizontales, ya que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, es decir, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal tanto en más infinito como en menos infinito, ya que es simétrica respecto al eje *Y*.

Su derivada es $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}(-x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x=0$.

Para valores negativos de *x* es positiva y para valores positivos es negativa. Así pues, *f* es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo (que es también absoluto) en el punto $A(0, f(0))=A\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

Su derivada segunda es $f''(x)=\frac{(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x=-1$ y $x=1$.

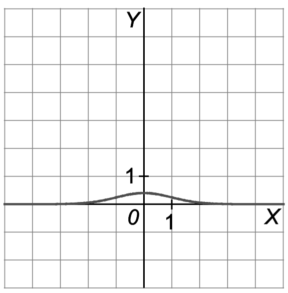
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signo de f''	+	0	−	0	+
f	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,1)$.

Tiene dos puntos de inflexión:

En $B\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)=B(-1;0{,}24)$ y en $C\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)=C(1;0{,}24)$.

La gráfica de la función es la que se muestra.



b) Esta función es la distribución normal de media 0 y desviación típica 1, $N(0,1)$, también llamada normal estándar. Su gráfica se conoce con el nombre de campana de Gauss.

(En general, se suele representar esta gráfica con distintas escalas en los ejes, pero aquí se muestra usando la misma escala en los ejes *X* e *Y*).

www.yoquieroaprobar.es

84. De la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que

- **Tiene un máximo en $x = -1$.**
- **Su gráfica corta al eje *X* en el punto de abscisa $x = -2$.**
- **Tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$.**

Calcula *a*, *b*, c y *d* sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Las dos primeras derivadas de *f* son: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$

Hay un máximo en $x = -1$ implica que $f'(-1) = 0$, es decir: $f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$

Corta al eje *X* en $x = -2$ implica que $f(-2) = 0$, es decir:

$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$

Hay un punto de inflexión en $x = 0$ implica que $f''(0) = 0$, es decir: $f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

La tangente a *f* en $x = 2$ tiene pendiente 9, por lo que $f'(2) = 9$: $f'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 9 \Rightarrow 12a + 4b + c = 9$

Resolviendo el sistema formado por esas cuatro ecuaciones, se obtiene la solución:

$$\left.\begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ b = 0 \\ 12a + 4b + c = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1, b = 0, c = -3, d = 2$$

85. Demuestra que la curva de la ecuación:

$$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

no tiene ningún punto de inflexión. Halla la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto (x_0, y_0), siendo x_0 el valor de *x* hace mínima y''.

Se calcula la segunda derivada: $y' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $y'' = 12x^2 - 6x + 2$, que es una parábola cóncava hacia arriba que no corta al eje *X* (la ecuación $12x^2 - 6x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales). La derivada segunda es siempre positiva y la curva es siempre cóncava hacia arriba, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

El mínimo de $y'' = 12x^2 - 6x + 2$ se encuentra en su vértice $x_0 = -\frac{(-6)}{2 \cdot 12} = \frac{1}{4}$.

Punto de tangencia $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{205}{256}\right)$. Pendiente $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}$. La ecuación es $y - \frac{205}{256} = -\frac{5}{8}(x - 4)$

86. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$

Determina *a* y *b* sabiendo que la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión es la recta $y = 2x - 3$.

Hallamos primero el punto de inflexión y para eso necesitamos calcular la derivada segunda: $f'(x) = 6x^2 + 24x + a$ y $f''(x) = 12x + 24$. La derivada segunda se anula si $x = -2$, y como a su izquierda es negativa y a su derecha positiva, entonces, el punto $A(-2, f(-2))$ es el punto de inflexión.

La pendiente de la recta tangente $y = 2x + 3$ es 2 y coincide con el valor de $f'(-2)$. Así pues:

$f'(-2) = 2 \Rightarrow 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \Rightarrow a = 26$

El punto de tangencia $A(-2, f(-2))$ pertenece también a la recta tangente. Por tanto:

$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1 \Rightarrow 2 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 + 26 \cdot (-2) + b = -1 \Rightarrow b = 19$. La respuesta es $a = 26$ y $b = 19$.

87. Calcula los valores del parámetro *a*, con $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación:

$$y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 15^{12}$$

en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

Primero se calculan sus puntos de inflexión: $y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a$, $y'' = 12ax^2 + 12ax = 12ax(x+1)$.

La derivada segunda se anula si $x = 0$ ó si $x = -1$, que son las abscisas de sus puntos de inflexión.

La pendiente de la tangente en $x = 0$ es $y'(0) = -a$.

La pendiente de la tangente en $x = -1$ es $y'(-1) = -4a + 6a - a = a$.

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es –1.

Imponiendo esta condición: $-aa = -1 \Rightarrow a = 1$ o $a = -1$.

Aplicaciones de la derivada en el campo de las ciencias

88. La segunda ley de Newton afirma que la fuerza total a la que se ve sometido un cuerpo es igual a la masa de este multiplicada por la aceleración que experimenta.

Por otro lado, la aceleración de un móvil es la derivada segunda de la posición que tiene ese móvil en función del tiempo.

Sabiendo que la posición de cierto móvil viene dada por:

$$x(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6$$

Calcula la fuerza total a la que se encuentra sometido el móvil si su masa son 5 kg.

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo: $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 4t - 5$.

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo: $a(t) = v'(t) = 6t - 4$.

La fuerza total, respecto al tiempo, si la masa del móvil son 5 kg es $F(t) = 5a(t) = 5(6t-4)$ N.

89. Un muelle tiene una oscilación definida por:

$$x(t) = 10\cos(3t + \pi)$$

en metros. Determina qué velocidad de oscilación y aceleración tendrá al cago de $\frac{\pi}{3}$ s.

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo: $v(t) = x'(t) = -30\text{sen}(3t + \pi)$.

Por tanto, $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -30\text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi\right) = -30\text{sen}(2\pi) = 0$ ms^{-1}.

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo: $a(t) = v'(t) = -90\cos(3t + \pi)$.

Por tanto, $a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -90\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi\right) = -90\cos(2\pi) = -90$ ms^{-2}.

www.yoquieroaprobar.es

90. La ecuación de descarga de un condensador en un determinado circuito eléctrico es $Q = 100 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{t}{1,5}}$.
Calcula la intensidad que recorrerá el circuito pasado 5 s tras cerrar el interruptor si se sabe que $I = \frac{dQ}{dt}$.

La intensidad es la derivada de la descarga respecto al tiempo: $I(t) = Q'(t) = -\frac{1}{1,5} \cdot 100 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{t}{1,5}}$

Por tanto, $I(t) = -\frac{1}{1,5} \cdot 100 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{5}{1,5}} \simeq -2,38 \cdot 10^{-6}$.

Síntesis

91. Sea la función:

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Calcula, si existen, los extremos relativos.

Halla, si existen, los puntos de inflexión e intervalos de curvatura.

a) La función es continua y derivable porque es producto de funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$: $D(f) = \mathbb{R}$.

Su derivada es $f'(x) = -xe^{-x}$, que se anula si $x = 0$. Así pues, la función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

b) Tiene un máximo absoluto en el punto $O(0, 1)$.

c) La derivada segunda es $f''(x) = (x-1)e^{-x}$, que se anula si $x = 1$. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en $(1, +\infty)$. El punto $A(1, 2e^{-2})$ es un punto de inflexión porque la gráfica cambia de curvatura.

www.yoquieroaprobar.es

92. Para la función:

$$f(x)=\frac{x^4+3}{x}$$

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.

c) Estudia su curvatura y sus posibles puntos de inflexión.

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, ya que $x=0$ anula el denominador. Así pues, no corta al eje *Y*. Tampoco corta al eje *X* ya que la función no se anula nunca porque el numerador es siempre positivo.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^4+3}{x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^4+3}{x}=+\infty$, así pues, la recta $x=0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4+3}{x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^4+3}{x}=-\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Tampoco tiene asíntotas oblicuas ya que $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^4+3}{x^2}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^4+3}{x^2}=+\infty$.

b) La derivada de la función es $f'(x)=\frac{3(x^4-1)}{x^2}$ y se anula para $x=-1$ y $x=1$.

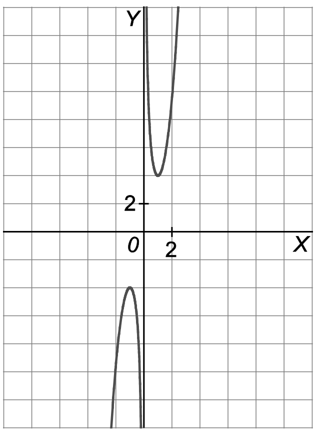
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	No existe $f(0)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)\cup(0,1)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $A(-1,f(-1))=A(-1,-4)$ y un mínimo relativo en el punto $B(1,f(1))=B(1,4)$.

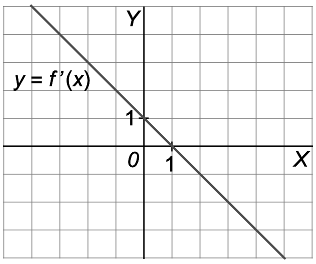
c) La derivada segunda es $f''(x)=\frac{6(x^4+1)}{x^3}$. Es negativa para valores negativos de *x* y positiva para valores positivos. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$.

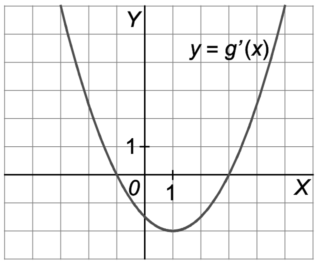
La función es impar porque $f(-x)=-f(x)$. Su gráfica es la que se muestra.



www.yoquieroaprobar.es

93. Las gráficas que se muestran en las figuras representan la derivada de ciertas funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente. A partir de ellas, deduce los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y $g(x)$, así como sus extremos relativos, su curvatura y sus puntos de inflexión.





a) La función crece si la derivada es positiva: $(-\infty,1)$. Decrece si la derivada es negativa: $(1,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $A(1,f(1))$ porque la derivada vale cero y f pasa de creciente a decreciente.

Las pendientes de las tangentes a f' son siempre negativas, así que la función es siempre cóncava hacia abajo.

Como la función no cambia de curvatura, no tiene puntos de inflexión.

b) La función crece si la derivada es positiva: $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$. Decrece si la derivada es negativa: $(-1,3)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $A(-1,g(-1))$ porque la derivada vale cero y g pasa de creciente a decreciente.

Tiene un mínimo relativo en el punto $B(3,g(3))$ porque la derivada vale cero y g pasa de decreciente a creciente.

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)$, ya que las pendientes de las tangentes a g' (es decir, la derivada segunda) son negativas y es cóncava hacia arriba en $(1,+\infty)$ puesto que las pendientes de las tangentes a g' (es decir, la derivada segunda) son positivas. El punto $C(1,g(1))$ es un punto de inflexión porque es un punto de cambio de curvatura.

94. Considera la función definida en $(0,+\infty)$ por:

$$f(x)=2x^3+x^2+\ln x$$

a) Encuentra un intervalo donde puedas asegurar que existe una solución de la ecuación $f(x)=0$.

Demuestra que la ecuación $f(x)=0$ tiene un única solución, c, en $(0,+\infty)$.

a) Como la función es continua en su dominio ($x > 0$), bastará encontrar un intervalo en el que la función cambie de signo en sus extremos. El extremo inferior debe ser un número cercano a cero para estar seguros de que la función será negativa. Se prueba con 0,5: $f(0{,}5)\simeq -0{,}193$.

El extremo superior puede ser 1: $f(1)=3$. Así pues, aplicando el teorema de Bolzano a la función f en el intervalo cerrado $[0{,}5;1]$, se sabe que $f(c)=0$ para algún c del intervalo $(0{,}5;1)$.

b) La función es siempre creciente ya que su derivada $f'(x)=6x^2+2x+\dfrac{1}{x}$ es siempre positiva en para $x > 0$. Por tanto, ya no puede existir otro c (distinto del anterior) con $f(c)=0$.

www.yoquieroaprobar.es

95. Sea $f(x)$ una función continua en $[0,3]$ y derivable en $(0,3)$. Si $f'(x) \leq 2$ para todos los números del intervalo $[0,3]$ y $f(0) = -1$, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar $f(3)$? En general, si $f'(x) \leq a$ en todo $\mathbb{R}$ y $f(0) = b$, dado un número positivo *c*, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar $f(c)$?

a) La función *f* es continua en el intervalo cerrado $[0,3]$ y derivable en el abierto $(0,3)$, por tanto, el teorema del valor medio nos asegura que existe un *c* de $(0,3)$ que cumple: $f'(c) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{f(3)+1}{3}$

Como la derivada es $f'(x) \leq 2$, entonces $f'(c) \leq 2$: $f'(c) = \dfrac{f(3)+1}{3} \leq 2 \Rightarrow f(3) \leq 5$

b) En el caso general se tiene que $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(0)}{c-0} = \dfrac{f(c)-b}{c} \leq a \Rightarrow f(c) \leq ac + b$.

96. Dada la función

$$f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$$

se pide:

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

b) Utiliza el apartado a) para decidir si 1000^2 es mayor o menor que $998^2 + 2^2$.

c) Generaliza lo que hayas descubierto en el apartado a) para la función $f(x) = (c-x)^n + x^n$ siendo *c* un número positivo y *n* un número entero positivo par.

a) La derivada de la función es $f'(x) = 4x - 2000$, que se anula para $x = 500$. La función es decreciente en $(-\infty, 500)$; es creciente en $(500, +\infty)$; y tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = 500$.

b) Como la función es decreciente en $(-\infty, 500)$, entonces, $f(0) > f(2)$, y como $f(0) = 1000^2$ y $f(2) = 998^2 + 2^2$, se concluye que $1000^2 > 998^2 + 2^2$.

c) La derivada de la función $f(x) = (c-x)^n + x^n$ es $f'(x) = -n(c-x)^{n-1} + nx^{n-1}$.

Una solución de la ecuación $f'(x) = 0$ es $x = \dfrac{c}{2}$, que, corresponde a un mínimo absoluto pues

$f''(x) = n(n-1)(c-x)^{n-2} + n(n-1)x^{n-2} > 0$. Por otra parte, la gráfica de *f* es simétrica respecto de la recta $x = \dfrac{c}{2}$. Así pues, dados dos números *p* y *q* que sumen *c*, $p^n + q^n$ es mayor cuanto más disten *p* y *q*.

Por ejemplo $20^6 + 30^6 > 28^6 + 22^6$ pues la función $f(x) = (50-x)^6 + x^6$ alcanza un mínimo en $x = 25$ y es simétrica respecto de la recta $x = 25$, por lo que $f(30) > f(22)$.

97. Supón que *f* es una función para la que $f'(x) > 0$ para todo *x* y sea $g(x) = f(f(x))$. ¿Qué puedes decir acerca del crecimiento o decrecimiento de la función *g*?

La derivada de $g(x)$ se calcula con la regla de la cadena: $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ que será siempre positiva por ser producto de dos números positivos. Así pues, $g'(x) > 0$ para todo *x*, lo que nos asegura que *g* es siempre creciente.

www.yoquieroaprobar.es

98. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & \text{si } x<0 \\ x^2e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calcular el valor de a para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Estudiar la derivabilidad de *f* y calcular f' donde sea posible.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\ln(1-x)\right)=a+\ln(+\infty)=+\infty$

b) Las funciones que intervienen en f son continuas en sus tramos. Falta obligarla a que sea continua en el punto de cambio, $x=0$. Estos tres valores han de ser iguales:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(a+\ln(1-x)\right)=a$ $\qquad \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2e^{-x}=0$ $\qquad f(0)=0^2\cdot e^{-0}=0$

Por tanto, $a=0$.

c) La derivada, salvo para $x=0$, es: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ x(2-x)e^{-x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

Para que exista $f'(0)$, estos dos límites han de coincidir:

$$\lim_{x\to0^-} f'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{1-x}=-1 \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0+} x(2-x)e^{-x}=0$$

Por tanto, la función no es derivable en $x=0$.

99. Demuestra que la ecuación:

$$x^{2009}+x^{1005}+x-1=0$$

tiene exactamente una solución real.

La función $f(x)=x^{2009}+x^{1005}+x-1$ es continua y creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que su derivada es:

$f'(x)=2009x^{2008}+1005x^{1004}+1$ es siempre positiva.

Además $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, es decir, pasa de negativa a positiva y, por tanto, debe cortar al eje *X* alguna vez.

Como *f* es siempre creciente, solo podrá cortar una sola vez al eje *X*.

Es decir, existe un único *c* real con $f(c)=0\Rightarrow c^{2009}+c^{1005}+c-1=0$.

www.yoquieroaprobar.es

100. Sea f una función real de variable real, derivable, con derivada continua en todos los puntos y tal que $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(0)=3$, $f'(1)=4$.

a) Calcula $g'(0)$ sabiendo que $g(x)=f(x+f(x))$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$.

a) Se calcula primero la derivada de $g(x)$ aplicando la regla de la cadena:

$g'(x)=f'(x+f(x))\cdot(1+f'(x))$

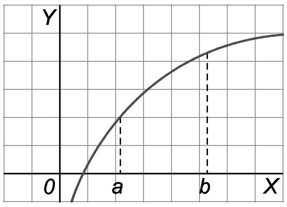
Por tanto, $g'(0)=f'(0+f(0))\cdot(1+f'(0))=f'(1)\cdot(1+3)=4\cdot 4=16$.

b) Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, podemos usar la regla de L´Hôpital para calcularlo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)f'(x)-f'(x+1)}{e^x}=\dfrac{4f(0)f'(0)-f'(0+1)}{e^0}=\dfrac{4\cdot 1\cdot 3-4}{1}=8$

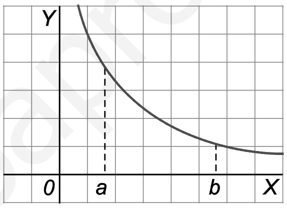
Cuestiones

101. Las cuatro gráficas que se muestran son las de las derivadas de otras tantas funciones. En cada caso razona si la función correspondiente alcanza un valor mayor para $x=a$ o par $x=b$.

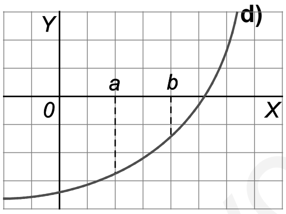
a)



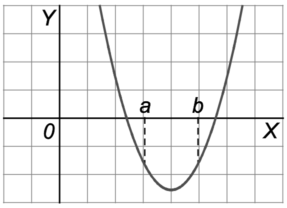
c)



b)



d)



a) La derivada es positiva en el intervalo $[a, b]$, por tanto, la función es creciente en este intervalo: $f(a)<f(b)$

b) La derivada es negativa en $[a, b]$, por tanto, la función es decreciente en este intervalo: $f(a)>f(b)$

c) La derivada es positiva en el intervalo $[a, b]$, por tanto, la función es creciente en este intervalo: $f(a)<f(b)$

d) La derivada es negativa en $[a, b]$, por tanto, la función es decreciente en este intervalo. Luego $f(a)>f(b)$

102. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases} x^2\text{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ es derivable en $x=0$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$?

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\text{sen}\dfrac{1}{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h\,\text{sen}\dfrac{1}{h}=0$ pues $-1\leq\left|\text{sen}\dfrac{1}{h}\right|\leq 1$ y $\lim\limits_{h\to 0}h=0$. Así pues f es derivable en 0 y $f'(0)=0$.

$f'(x)=2x\text{sen}\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x\neq 0$, es decir, $f'(x)=2x\text{sen}\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ y como $\lim\limits_{x\to 0}2x\text{sen}\dfrac{1}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ no existe, no existirá $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$.

www.yoquieroaprobar.es

103. ¿Bajo qué condiciones sobre *a*, *b*, *c* y *d* podemos asegurar $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $a\neq 0$ es estrictamente creciente o decreciente en $\mathbb{R}$?

En primer lugar, se observa que los límites en más infinito y en menos infinito no pueden coincidir nunca porque el grado del polinomio es 3. Como la derivada es un polinomio de segundo grado, la ecuación $f'(x)=0$ tendrá una, dos o ninguna solución (que nos darían los posibles extremos relativos).

Para que sea estrictamente creciente o decreciente no debe tener ni máximos ni mínimos relativos, es decir, la ecuación $f'(x)=0$ no puede tener dos soluciones. Si tuviera una única solución sería porque ahí tendría un punto de tangente horizontal que no es extremo relativo, es decir, sería un punto de inflexión.

La derivada es $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, que tendrá una única solución si su discriminante es cero: $(2b)^2-4\cdot 3ac=0 \Rightarrow 4b^2-12ac=0$. Y no tendrá solución si $4b^2-12ac<0$.

Así pues, resumiendo:

La función será creciente en todo $\mathbb{R}$ si $a>0$ y $4b^2-12ac\leq 0$

La función será decreciente en todo $\mathbb{R}$ si $a<0$ y $4b^2-12ac\leq 0$.

En el caso que falta, $4b^2-12ac>0$, la función tendría un máximo y un mínimo relativo y, por tanto, sería creciente en algunos tramos y decreciente en otros.

104. Aplicando el teorema del valor medio demuestra que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=0$$

Si $f(x)=\sqrt[3]{x}$, f es derivable en $(0,+\infty)$. Tomando x y $x+1$ en dicho intervalo y aplicando el teorema del valor medio se tiene $f(x+1)-f(x)=f'(c)\cdot 1$ con c en $(x,x+1)$.

Como $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, tenemos que $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$.

Por último, si $c>x$ y si $x\to+\infty$, c también lo hace y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim\limits_{c\to+\infty}\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=0$.

105. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$, prueba que en el intervalo $[1,4]$ no existe ningún número *c* tal que:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$

¿Contradice esto el teorema del valor medio? ¿Por qué?

La derivada de la función es $f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$. Por otra parte $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$. Ahora hay que investigar si existe un $c\in(1,4)$ con $f'(c)=\frac{1}{2}$ para ello resolvamos la ecuación $\frac{-1}{(c-2)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow -2=(c-2)^2$, que claramente no tiene solución. La conclusión es que no existe ningún número c con $f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$.

¿Qué ha ocurrido? La función $f(x)=\frac{1}{x-2}$ no es continua en el intervalo $[1,4]$, ya que en $x=2$ no está definida. Así pues, no se contradice el teorema del valor medio ya que este exige que la función sea continua en el intervalo en cuestión.

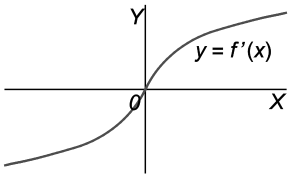
En cualquier otro intervalo que no contuviera a $x=2$ sí se cumpliría el teorema.

www.yoquieroaprobar.es

106. Si *f* es una función infinitamente derivable y para algún número *c* es $f'(c) = f''(c) = 0$ pero $f'''(c) > 0$, en el punto $(c, f(c))$, ¿es un máximo relativo, un mínimo relativo o punto de inflexión para *f*?

Si $f'''(c) > 0$, la función $y = f''(x)$ es estrictamente creciente en *c* por lo que en un cierto intervalo $(c - r, c + r)$, con $r > 0$, $f''(x) > f''(c)$ si $x > c$ y $f''(x) < f''(c)$ si $x < c$, es decir, en ese intervalo, $f''(x) > 0$ a la derecha de *c* y $f''(x) < 0$ a la izquierda de *c* con lo que *f* cambia de posición respecto de la tangente en *c*, es decir $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para *f*.

107. La gráfica de la derivada de *f* es la de la figura.



Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos soluciones, ¿qué puedes decir sobre el signo de ellas?

Si ambas soluciones tuvieran igual signo, aplicando el teorema de Rolle, habría un número entre ellas donde se anularía la derivada. Pero como $f'(x)$ no se anula para ningún valor positivo ni negativo de *x*, sigue que ambas soluciones no pueden tener igual signo.

108. ¿Es derivable en *x* = 0 la siguiente función?

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como la función sólo está definida en $[0, +\infty)$, estudiemos $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, es decir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}}$$

Este límite que presenta una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ está en las hipótesis del teorema de L´Hôpital. Por tanto:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Así que *f* es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

109. Justifica que ni la primera ni la segunda derivada de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } 0<x\le 1\\ -2x^2+3x & \text{si } x>1\end{cases}$ se anulan nunca.

Primero debemos asegurarnos que la función es continua, estudiando con detalle qué ocurre en $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x}=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-2x^2+3x\right)=1$ $\qquad$ $f(1)=1$

Por tanto, f es continua en $x=1$ y en todo su dominio. (Observa que $\dfrac{1}{x}$ no da problemas porque $x=0$ no pertenece a su dominio de definición).

La función derivada, salvo en $x=1$, es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2} & \text{si } 0<x<1\\ -4x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$

¿Qué ocurre con la derivada en $x=1$? $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{x^2}=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-4x+3)=-1$

Así pues, $f'(1)=-1$, y la derivada de f es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2} & \text{si } 0<x\le 1\\ -4x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$

Dicha derivada no se anula en el primer tramo y en el segundo se anularía en $x=\dfrac{3}{4}$ que no pertenece a su dominio de definición. Es decir: la derivada de f no se anula nunca.

La segunda derivada de f, salvo en $x=1$, es $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3} & \text{si } 0<x<1\\ -4 & \text{si } x>1\end{cases}$

¿Qué ocurre con la segunda derivada en $x=1$? $\lim\limits_{x\to 1^-} f''(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x^3}=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f''(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-4)=-4$

Así pues, $f''(1)$ no existe.

Dicha derivada no se anula en el primer tramo ni tampoco en el segundo. Es decir: la segunda derivada de f no se anula nunca.

110. ¿Presenta algún punto de inflexión la gráfica de la función de la cuestión anterior?

Precipitadamente podríamos responder que no hay puntos de inflexión porque la derivada segunda no se anula nunca, como acabamos de estudiar en la actividad precedente. Pero nos estamos olvidando del punto de abscisa $x=1$.

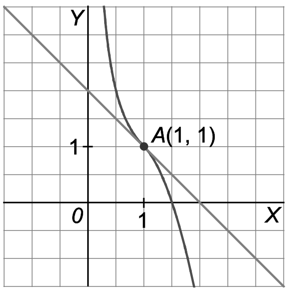
En el punto $x=1$, no podemos usar la segunda derivada ya que, sencillamente, $f''(1)$ no existe. Tenemos que recurrir a la definición de punto de inflexión: punto cuya tangente a la gráfica cruza a dicha gráfica, dejándola por encima y por debajo (o por debajo y por encima) según nos situemos a izquierda o derecha de dicho punto.

La tangente a $A(1,1)$ es la recta $y-1=-1(x-1)$, es decir, $y=-x+2$:

Si $0<x<1$, $f(x)-(-x+2)=\dfrac{1}{x}+x-2=\dfrac{1+x^2-2x}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x}>0$: la curva está por encima de la tangente.

Si $x>1$, $f(x)-(-x+2)=-2x^2+3x+x-2=-2x^2+4x-2=-2\left(x^2-2x+1\right)=-2(x-1)^2<0$: la curva está por debajo de la tangente.

La gráfica lo aclara todo.



www.yoquieroaprobar.es

111. Si $h > 0$, ¿qué es mayor: $\sqrt{1+h}$ o $1+\frac{1}{2}h$?

La función $f(x)=\sqrt{1+x}$ es derivable en $(-1,+\infty)$, así pues verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[0,h]$ si $h>0$. Entonces $f(h)-f(0)=h\cdot f'(c)$ donde $c\in(0,h)$.

$f(h)-f(0)=\sqrt{1+h}-1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, por lo que $f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}<\dfrac{1}{2}$

Entonces $f(h)-f(0)<h\dfrac{1}{2}$, es decir, $\sqrt{1+h}-1<\dfrac{1}{2}h$, o, lo que lo mismo $\sqrt{1+h}<\dfrac{1}{2}h+1$ si $h>0$.

112. Si $x\geq 0$, razona, usando la derivada, qué es mayor: e^x o x^2.

Veamos que $f(x)=e^x-x^2$ es creciente en $[0,+\infty)$ y como $f(0)=1$, resultará que si $x\geq 0$, $f(x)\geq f(0)$, es decir, $e^x-x^2\geq 1$ por lo que $e^x>x^2$. Para ver que f es creciente en $[0,+\infty)$, estudiemos su derivada $f'(x)=e^x-2x$.

$f'(0)>0$ y si $x>0$, $e^x>ex$ (Basta observar que la recta $y=ex$ es tangente en $P(1,e)$ a la curva $y=e^x$). Así pues $e^x\geq ex>2x$, con lo que $f'(x)=e^x-2x>0$ en $[0,+\infty)$ por lo que $f(x)=e^x-x^2$ es creciente en dicho intervalo.

Problemas

113. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demuestra que si partimos un diamante en dos trozos, la depreciación es máxima si lo partimos por la mitad.

Se supone que el peso es 1 y p la constante de proporcionalidad del precio – cuadrado del peso.

Se nombran las variables: x es el peso de uno de los trozos e y el del otro.

Se relacionan las variables: $x + y = 1$, por tanto $y = 1 - x$.

La función que se quiere maximizar es la depreciación del diamante al cortarlo:

$$D(x)=p1^2-\left(px^2+p(1-x)^2\right)=p-2px^2+2px-p=-2px^2+2px$$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. Evidentemente, $0\leq x\leq 1$, es decir, x se mueve en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Se busca el máximo de $D(x)=-2px^2+2px$ en $[0,1]$. Su derivada, $D'(x)=-4px+2p$, se anula si $x=\dfrac{1}{2}$.

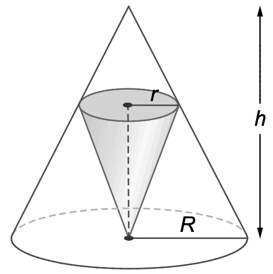
Se compara:

$D(0)=0$ $\quad$ $D(1)=0$ $\quad$ $D\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{p}{2}$

La depreciación es máxima si el diamante se parte en dos trozos de igual peso.

www.yoquieroaprobar.es

114. En un cono de radio *R* y altura *h* inscribimos un cono invertido con el vértice en el centro de la base. Calcula las dimensiones del cono pequeño para que su volumen sea máximo



Se relacionan las variables: por semejanza de triángulos del cono y del cono invertido se observa que:

$$\frac{R}{h}=\frac{r}{h-h'}\Rightarrow rh=Rh-Rh'\Rightarrow h'=\frac{h(R-r)}{R}$$

La función que se quiere minimizar es el volumen del cono pequeño:

$V=\dfrac{\pi r^2 h'}{3}$, es decir, $V(r)=\dfrac{\pi}{3}r^2\dfrac{h(R-r)}{R}=\dfrac{\pi h}{3R}(Rr^2-r^3)$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *r*. Evidentemente $0<r<R$, es decir, *r* se mueve en el intervalo abierto $(0,R)$.

Se busca el mínimo de $V(r)=\dfrac{\pi h}{3R}(Rr^2-r^3)$ en $(0,R)$.

$V'(r)=\dfrac{\pi h}{3R}(2Rr-3r^2)=0\Leftrightarrow 2Rr-3r^2=0\Rightarrow r(2R-3r)=0$, es decir, si $r=\dfrac{2}{3}R$ o si $r=0$ (no pertenece al dominio).

Comparamos (habrá que calcular límites ya que el intervalo es abierto):

$$V\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{4}{81}\pi R^2 h \qquad \lim_{r\to 0}V(r)=0 \qquad \lim_{r\to R}V(r)=0$$

Las dimensiones del cono inscrito de volumen máximo son $r=\dfrac{2}{3}R$ y $h'=\dfrac{h(R-r)}{R}=\dfrac{h\left(R-\frac{2}{3}R\right)}{R}=\dfrac{1}{3}h$

Y dicho volumen máximo son $\dfrac{4}{27}$ del volumen del cono grande.

115. Dados los puntos $A(0,3)$ y $B(4,5)$, señalamos un punto *M* en el eje *X* tal que sea mínima la distancia $S=AM+MB$. Obtén el punto *M*.

El punto buscado es $M(x,0)$.

$$S=AM+MB=\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{(4-x)^2+5^2}=\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{x^2-8x+41}.$$

$$S'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+41}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{4-x}{\sqrt{x^2-8x+41}}$$

$$S'=0\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{4-x}{\sqrt{x^2-8x+41}}\Rightarrow x\sqrt{x^2-8x+41}=(4-x)\sqrt{x^2+9}\Rightarrow x^2(x^2-8x+41)=(4-x)^2(x^2+9)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+9x+18=0\Rightarrow x=\frac{-9\pm 15}{4}=\begin{cases}-6\\ \dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Solo verifica la ecuación la solución $x=\dfrac{3}{2}$. Como $0\le x\le 4$, y $f(0)=3+\sqrt{41}\simeq 9{,}4$; $f(4)=5+\sqrt{18}\simeq 9{,}2$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{45}{4}}+\sqrt{\dfrac{125}{4}}\simeq 8{,}9$; el mínimo se alcanza para $M\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

www.yoquieroaprobar.es

116. En un depósito que contenía 5 000 000 L de agua se ha vertido accidentalmente una sustancia tóxica contaminando el agua. Si el agua se va renovando por agua limpia a razón de 2500 L/h, ¿cuánto tiempo tardará en reducirse el nivel de contaminación un 50 %?

Sea $S(t)$ la función que da los litros de sustancia tóxica que hay en el agua al cabo de t horas desde que se realizó el vertido.

$S'(t)=$ razón de entrada de sustancia tóxica – razón de salida de sustancia tóxica. Como el vertido fue puntual, todo lo que entra es agua limpia y la razón de entrada es 0.

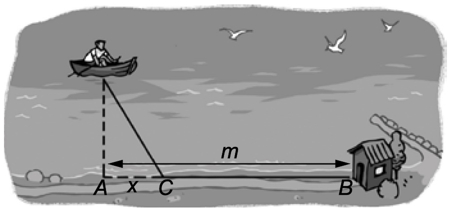
La razón de salida es $\frac{S(t)}{5\,000\,000}2500$ L/h, pues salen los mismos litros que entran y $\frac{S(t)}{5\,000\,000}$ es la cantidad de sustancia tóxica por litro.

Así pues, $S'(t)=\frac{-S(t)}{2000}$, por tanto, $\frac{S'(t)}{S(t)}=-\frac{1}{2000}$, luego, $\ln S(t)=-\frac{1}{2000}t+C$, por lo que $S(t)=ke^{-\frac{t}{2000}}$.

Si $t = 0$, $S(t)=k$ y se pregunta cuándo $S(t)$ es $\frac{k}{2}$, se tiene que $\frac{k}{2}=ke^{-\frac{t}{2000}}$, luego $t=2000\cdot\ln 2$ horas, aproximadamente 1400 horas, es decir, 58 días.

www.yoquieroaprobar.es

117. Un hombre está en un bote en un gran lago con forma rectangular a 1 km del punto *A* de la orilla más próxima. Quiere llegar al punto *B* de la orilla situado a m km. Si en su bote va a *r* km/h y a pie a *v* km/h, ¿en qué punto *C* de la orilla debe dejar el bote para llegar a *B* lo más rápido posible en cada uno de los siguientes casos?



a) Si $m = 5$ km, $r = 15$ km/h y $v = 13$ km/h.

b) Si $m = 2$ km, $r = 12$ km/h y $v = 13$ km/h.

c) Si $m = 5$ km, $r = 12$ km/h y $v = 13$ km/h.

Primero se resuelve el caso general. Se nombra la variable: x es la distancia AC.

Hay que considerar que la distancia PC que cubre a remo es igual a $PC = \sqrt{1+x^2}$.

La función que se quiere minimizar es el tiempo empleado por el hombre para recorrer PC km remando a una velocidad de r km/h y CB km a pie a una velocidad de v km/h.

El tiempo empleado en realizar su trayecto es la función $t(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{r} + \dfrac{m-x}{v} = \dfrac{v\sqrt{1+x^2} + r(m-x)}{rv}$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: $[0, m]$.

Se busca el mínimo de $t(x) = \dfrac{v\sqrt{1+x^2} + r(m-x)}{rv}$ en $[0, m]$.

$$t'(x) = \frac{v\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - r}{rv} = \frac{vx - r\sqrt{1+x^2}}{rv\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow vx - r\sqrt{1+x^2} = 0 \Rightarrow v^2x^2 = r^2 + r^2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{r^2}{v^2 - r^2}}$$

Ahora se estudia cada caso:

a) Si $m = 5$, $r = 15$ y $v = 13$ $\Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{v^2 - r^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{13^2 - 15^2}}$, por tanto, $t'(x)$ nunca se anula y $t(x)$ alcanzará el mínimo en un extremo del intervalo $[0,5]$: como $t(5) < t(0)$, el mínimo se alcanza en $x = 5$, debe remar todo el tiempo.

b) Si $m = 2$, $r = 12$ y $v = 13$ $\Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{v^2 - r^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{13^2 - 12^2}} = 2{,}4$. Como 2,4 no pertenece al intervalo $[0,2]$ habrá que mirar en los extremos: $t(2) < t(0)$, el mínimo se alcanza en $x = 2$, debe remar todo el rato.

c) Si $m = 5$, $r = 12$ y $v = 13$ $\Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{v^2 - r^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{13^2 - 12^2}} = 2{,}4$. Como $t(2{,}4) < t(5) < t(0)$, debe dejar el bote a 2,4 km de A.

www.yoquieroaprobar.es

Para profundizar

118. Si *a* es un número positivo, calcula el mínimo de $\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$ con $x > 0$. A partir del resultado obtenido, demuestra que la media aritmética de dos números positivos es siempre mayor o igual que la media geométrica.

Primero recuerda que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto.

Se considera la función $f(x) = \frac{a+x}{\sqrt{ax}}$ con $x > 0$.

Su derivada, después de simplificarla, es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\frac{x-a}{x\sqrt{x}}$, que se anula si $x = a$.

Como para valores x menores que a, la función decrece (la derivada es negativa) y para valores x mayores que a, la función crece (la derivada es positiva), entonces, en $x = a$ está su mínimo absoluto.

Así pues: $f(a) \le f(x) \Rightarrow \frac{a+a}{\sqrt{aa}} \le \frac{a+x}{\sqrt{ax}} \Rightarrow \frac{2a}{a} \le \frac{a+x}{\sqrt{ax}} \Rightarrow 2 \le \frac{a+x}{\sqrt{ax}} \Rightarrow \sqrt{ax} \le \frac{a+x}{2}$ para todo $x > 0$.

119. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + k & \text{si } x \le 1 \\ \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de k para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) ¿Verifica f las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, \pi+1]$.

c) ¿Existe algún número c para el que $f'(c)$ coincida con la pendiente de la recta que une los puntos de la curva de abscisas 0 y $\pi+1$?

a) Se impone la continuidad en $x = 1$, que es el único valor en el que puede haber conflictos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 - x + k\right) = k,\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(x-1)}{1} = 1,\ f(1) = k.$$

Para que f sea continua en $x = 1$ debe ser $k = 1$. Por tanto, si $k = 1$ la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Ya se ha visto que $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es continua en $[0, \pi+1]$.

Se ve ahora si es derivable en el abierto $(0, \pi+1)$.

La derivada, salvo para $x = 1$, es: $f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{(x-1)\cos(x-1) - sen\,(x-1)}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$,

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x-1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cos(x-1) - \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(x-1) + (x-1)\left(-\operatorname{sen}(x-1)\right) - \cos(x-1)}{2(x-1)} =$$

$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-\operatorname{sen}(x-1)}{2} = 0$. Así pues, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) \ne \lim_{x\to 1^+} f'(x)$ y, por tanto, f no es derivable en $x = 1$ y no se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

c) La recta que pasa por los puntos $A(0, 1)$ y $B(\pi+1, 0)$ tiene pendiente $m = -\frac{1}{\pi+1}$.

Si $x < 1$, $f'(x) = 2x - 1 = -\frac{1}{\pi+1} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2(\pi+1)}$, que es menor que 1. Por tanto, $c = \frac{\pi}{2(\pi+1)}$.

www.yoquieroaprobar.es

120. Sea f una función que admite derivada segunda en todo $\mathbb{R}$ y tal que las rectas $y = ax + b$ e $y = cx + d$ con a, b c y d no nulos, son tangentes a la gráfica en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$ respectivamente.

Justifica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si f es par, entonces $a = -c$.

b) Si $a = c$, entonces f es impar.

c) Si f es par, entonces $b = d$.

d) Si $b = d$, entonces $f(1) = f(-1)$.

e) Si $ac < 0$, entonces existe x_0 en $[-1,1]$ con $f'(x_0) = 0$.

Como la recta $y = ax + b$ es la tangente en $x = 1$, se tiene que $f(1) = a + b$.

Como la recta $y = cx + d$ es la tangente en $x = -1$, se tiene que $f(-1) = -c + d$.

a) Si f es par, se cumple que $f(1) = f(-1)$, es decir $a + b = -c + d$.

No necesariamente se cumple la igualdad $a = -c$.

b) Si $a = c$, entonces $f(-1) = -c + d = -a + d$, y para que fuese impar, este valor debería coincidir con $-f(1) = -a - b$.

c) Si f es par, ya se ha visto que $a + b = -c + d$. De aquí no puede deducirse que b y d sean iguales.

d) Si $b = d$, entonces $f(-1) = -c + d = -c + b$, que no coincide necesariamente con $f(1) = a + b$.

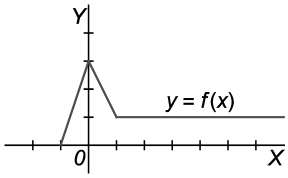
e) Si $ac < 0$, significa que las pendientes de las tangentes son de distinto signo en $x = -1$ y en $x = 1$. Como la función es derivable dos veces, se sabe por el teorema de Bolzano, que existe x_0 en $[-1,1]$ con $f'(x_0) = 0$.

www.yoquieroaprobar.es

Autoevaluación

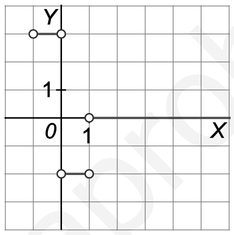
Comprueba qué has aprendido

1. Dibuja la gráfica de $y = f'(x)$ sabiendo que la gráfica de $y = f(x)$ es la de la figura.



La función que nos muestran, $f(x)$: $f:[-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 3x+3 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -2x+3 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Así que $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, cuya gráfica es:



2. ¿Hay alguna función *f*, derivable en $[0,2]$ tal que $0 < f'(x) < 2$ y $f(0) = 0$ y $f(2) = 5$?

Toda función derivable en $[0,2]$ verifica, aplicando el teorema del valor medio que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ siendo *c* número de $(0,2)$. En el caso nuestro $f(2) - f(0) = 5$ y como $f'(x) < 2$ en $(0,2)$, no es posible que $5 = 2f'(c)$. Así pues no hay ninguna función con las condiciones pedidas.

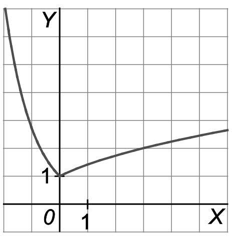
3. Encuentra todos los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f es continua en $\mathbb{R}$ pues $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ y en los demás puntos es obviamente continua.

$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ con lo que *f* no es derivable en $x = 0$ pues es continua y $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

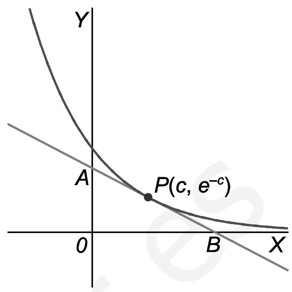
Pero la función no tiene máximos pero si presenta un mínimo en $x = 0$.



www.yoquieroaprobar.es

4. **Calcula el perímetro del triángulo de mayor área que puede formarse en el primer cuadrante, con el eje *X*, el eje *Y* y una tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$.**

La tangente en $P\left(c, e^{-c}\right)$ es la recta $y - e^{-c} = -e^{-c}(x - c)$ que corta a los ejes en los puntos $A\left(0, e^{-c}(c+1)\right)$ y $B(c+1,0)$. Así que el área del triángulo *OAB* es $f(c) = \frac{1}{2}(c+1)^2 e^{-c}$.



Obsérvese que si $c = -1$, la tangente sería la recta $y - e = -e(x+1)$,

es decir, $y = -ex$ por lo que si $c < -1$, la tangente en $P\left(c, e^{-c}\right)$

cortaría al eje de abscisas en un punto de abscisa negativa.

Así pues para que el triángulo en cuestión esté en el primer cuadrante, c debe verificar $-1 < c < \infty$.

Encontremos, pues, el máximo de $f(c) = \frac{1}{2}(c+1)^2 e^{-c}$ en $(-1, +\infty)$.

$$f'(c) = \frac{1}{2}\left[2(c+1)e^{-c} - (c+1)^2 e^{-c}\right] = \frac{1}{2}(c+1)e^{-c}[2 - c - 1] = 0$$

Si $c = -1$, $c = 1$, $\lim_{c \to -1} f(c) = 0$, así que el máximo del área es $f(1)$ y el perímetro de $OA + OB + AB$ es $2e^{-1} + 2 + \sqrt{4e^{-2} + 4} = 2 \cdot \left(e^{-1} + 1 + \sqrt{e^{-2} + 1}\right)$.

5. **Determina si tiene algún punto de inflexión la gráfica de:**

$$f(x) = 3e^x\left(x^2 - 4x + 5\right)$$

Veamos si $f''(x)$ se anula alguna vez.

$$f'(x) = 3e^x\left(x^2 - 4x + 5\right) + 3e^x(2x - 4) = 3e^x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3e^x(x-1)^2$$

$$f''(x) = 3e^x(x-1)^2 + 3e^x 2(x-1) = 3e^x(x-1)(x+1)$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 3e^x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -1$

Si $x < -1$, $f''(x) > 0$. Si $-1 < x < 1$, $f''(x) < 0$. Si $x > 1$, $f''(x) > 0$.

Por tanto, en $A(-1, f(-1))$ hay punto de inflexión y en $B(1, f(1))$ también.

6. **Estudia la concavidad de la función:**

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ porque es polinómica. Su primera derivada es $f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 2$.

Su segunda derivada es $f''(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ y se anula si $x = -2$ y si $x = 3$.

Estudiando el signo de esta segunda derivada en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, +\infty)$, concluimos:

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. La función es cóncava hacia abajo en $(-2, 3)$.

Tiene dos puntos de inflexión: $A(-2, f(-2))$ y $B(3, f(3))$.

www.yoquieroaprobar.es

7. Justifica que, si a y b son números positivos, la ecuación $x^3 + ax^2 = b$ sólo tiene una solución positiva.

Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 - b$. Nos piden justificar que $P(x)$ sólo tiene una raíz positiva.

$P(0) = -b < 0$ y $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, así que $P(x)$ tiene al menos una raíz positiva, por el teorema de Bolzano.

Por otra parte, $P'(x) = 3x^2 + 2ax > 0$ si $x > 0$. Así pues $P(x)$ es creciente si $x > 0$ y, por tanto, $P(x)$ solo tiene una raíz positiva.

8. Dada la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$ comprueba si se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[-2,0]$ y en caso afirmativo, halla el valor de $c \in [-2,0]$ al que se refiere el teorema.

La función es continua en $[-2,0]$ y derivable en $(-2,0)$. Nótese que $-x^2 - x + 2 = -(x+2)(x-1)$ no es negativo en $(-2,1)$.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número c tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0-(-2)} = \dfrac{\sqrt{2} - 0}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Por otra parte, $f'(x) = \dfrac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2 - x + 2}}$ y $f'(c) = \dfrac{-2c-1}{2\sqrt{-c^2 - c + 2}}$.

Ya se puede calcular c:

$$\frac{-2c-1}{2\sqrt{-c^2-c+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (-2c-1)^2 = \left(\sqrt{2}\sqrt{-c^2-c+2}\right)^2 \Rightarrow 4c^2 + 1 + 4c = -2c^2 - 2c + 4 \Rightarrow 6c^2 + 6c - 3 = 0$$

Cuya solución válida es $c = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \simeq -1{,}37 \in (-2,0)$.

9. Como sabes, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$. Pero, ¿puedes aplicar la regla de L'Hôpital al cálculo de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$? Calcula dicho límite.

Obviamente $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$ presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ pero si estudiamos el límite del cociente de las derivadas tendríamos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ que no existe pues existe el límite del denominador (y no es cero) pero no existe el límite del numerador pues $\lim\limits_{x\to 0} 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ pero $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ no existe.

Así pues no se puede aplicar el teorema de L'Hôpital al cálculo de dicho límite pero poniendo $\dfrac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$ y observando que $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, el límite pedido es $\dfrac{0}{1} = 0$.

www.yoquieroaprobar.es

10. Razona si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función:

$$f(x) = |\cos x| \text{ en } [-\pi, \pi]$$

$f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = |\cos x|$ la podemos escribir como:

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{si } -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}.$$

f es obviamente continua en $[-\pi, \pi]$, por serlo $y = \cos x$ e $y = |x|$ pero no es derivable ni en $-\dfrac{\pi}{2}$ ni en $\dfrac{\pi}{2}$ pues

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } -\pi \le x < -\dfrac{\pi}{2} \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} \text{ por lo que } \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f'(x) = -1 \text{ y } \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f'(x) = 1.$$

Análogamente, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = 1$. Luego, no se puede aplicar.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Sean *f* y *g* funciones derivables tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo *x* real. Indica qué condición de las siguientes debemos añadir para concluir que $f(x) = g(x)$ para todo *x* real.

A. $f''(x) = g''(x)$ para todo *x* real.

B. $f(0) = g(0)$.

C. *f* y *g* son funciones continuas.

D. No hace falta ninguna condición adicional.

La opción correcta es B. Al ser $f'(x) = g'(x)$, $f(x) = g(x) + c$, por lo que si $f(0) = g(0)$,entonces $c = 0$ y $f(x) = g(x)$.

2. Una recta que pasa por el punto $P(-1,0)$ es tangente a la curva $y = x - x^3$ en otro punto *Q* distinto de *P*. La suma de las coordenadas de *Q* es:

A. 1

B. $\dfrac{7}{8}$

C. $\dfrac{3}{4}$

D. $\dfrac{9}{8}$

El punto *Q* tendrá de coordenadas $(a, a - a^3)$ con $a \ne -1$. Como la recta en cuestión pasa por *P* y *Q*, su pendiente es $\dfrac{a - a^3}{a+1}$ y, al ser tangente en *Q*, dicha pendiente es el valor de la derivada en *a*, es decir, $1 - 3a^2$.

Así pues, $\dfrac{a - a^3}{a+1} = 1 - 3a^2$, de donde $\dfrac{a(1-a^2)}{a+1} = 1 - 3a^2$, $2a^2 + a - 1 = 0$ y $a = \dfrac{1}{2}$, $a = -1$, de donde *Q* es el punto de abscisa $\dfrac{1}{2}$ y ordenada $\dfrac{3}{8}$, por lo que la suma de sus coordenadas es $\dfrac{7}{8}$ y la respuesta es B.

www.yoquieroaprobar.es

3. **Sea la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$**

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

B. *f* no es derivable en $x=0$.

C. *f* tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

D. *f* tiene un punto de inflexión para $x<0$.

$f(x)$ es una función continua, con asíntota horizontal $y=0$ pues $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, que pasa por el origen y su derivada $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$ se anula sólo en $x=1$, lo que nos lleva a afirmar que la única respuesta correcta es C.

Además $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^x}<0\ \forall\ x<0$, luego D es falsa.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Se tiene la función $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x$.**

A. *f* está acotada inferiormente en $\mathbb{R}$.

B. *f* está acotada superiormente en $\mathbb{R}$.

C. *f* tiene al menos un cero en $\mathbb{R}$.

D. *f* tiene un único cero en $\mathbb{R}$.

Las afirmaciones A y B son falsas pues $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x\right)=-\infty$

Al tratarse de una función continua, las observaciones anteriores sobre los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ nos llevan a afirmar que C es verdadera y como la derivada no se anula nunca, sigue que D es también verdadera.

5. **La función definida sobre $\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{2x}-1$ satisface:**

A. Para todo x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=(x+1)e^{2x}$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

D. *f* es creciente en $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(1+2x)e^{2x}$, por lo que A es falsa.

Como $f(x)=xe^{2x}-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y, por tanto, B es verdadera.

Por otra parte, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x}-1=-1$ y C es falsa.

Si $x>-\dfrac{1}{2}$, $f'(x)>0$, por lo que D es verdadera.

www.yoquieroaprobar.es

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, donde *a*, *b* y *c* son números reales.

1. La gráfica de *f* corta 3 veces al eje horizontal.

2. $a^2>3b$.

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2.

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La derivada de *f* es $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Si se verifica 1 su derivada se anula dos veces, por lo que el discriminante de la ecuación de 2.º grado $f'(x)=0$, es decir $4a^2-12b$ deberá ser positivo, así que $a^2>3b$ y se verifica 2, por lo que 1 $\Rightarrow$ 2.

Pero 2 $\not\Rightarrow$ 1, pues 2 quiere decir que la derivada se anula 2 veces, pero eso no implica que la cúbica corte 3 veces al eje *X*, como indica, por ejemplo la función $f(x)=x^3+2x^2+x+1000$. Así que la respuesta es B.

www.yoquieroaprobar.es

Señala el dato innecesario para contestar

7. Para calcular la diferencia entre el máximo y el mínimo de $f(x)=ax^2+bx+c$ en el intervalo $[0,k]$ se tienen los siguientes datos:

1. El valor de *a*

2. El valor de *b*

3. El valor de *c*

4. El valor de *k*

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

Para hallar la diferencia entre el máximo y el mínimo de $f(x)$ $[0,k]$ es necesario encontrar $f(x_0)-f(x_1)$ siendo x_0 la abscisa del máximo y x_1 la abscisa del mínimo. Así pues, habrá que hallar $ax_0^2+bx_0+c-ax_1^2-bx_1-c$, es decir, $a\left(x_0^2-x_1^2\right)+b(x_0-x_1)$. Para hacer ese cálculo no tenemos que conocer el valor de *c* y como para hallar x_0 y x_1 que son, o valores que anulan la derivada, es decir, $\frac{-b}{2a}$ ó los extremos, 0 y *k*, del intervalo, tampoco influye el valor de *c*, tenemos que puede eliminarse el dato 3 y la respuesta es C.