UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
Curso Académico: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Calcular los valores de los parámetros reales a y b para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(x^2-9\right)+\dfrac{bx}{3}-b, & x<3, \\ \ln\left(b\left(x-2\right)\right), & x\geq 3, \end{cases}$$ sea derivable.

2.- (2 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{x+3}{\left(x+2\right)^2}$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las funciones f y g, siendo éstas:

$$f(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2, \quad g(x)=\left(x-2\right)^2-1.$$

y las rectas $x = 3$, $x = 5$.

4.- (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \left(a-1\right)x+y+3az=1, \\ ax+ay-z=a, \\ \left(a-1\right)x+y+\left(a-1\right)z=-2a+1. \end{cases}$$

5.- (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m\in\mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

8.- (2 puntos) Dados las rectas *r* y *s*:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas *r* y *s*.

b) el plano π y la recta *s*.

9.- (2 puntos) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

10.- (2 puntos) En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 10% de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

a) Calcular el porcentaje de alumnos que aprueba la asignatura.

b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Calcular los valores de los parámetros reales *a* y *b* para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(x^2-9\right)+\dfrac{bx}{3}-b, & x<3, \\ \ln\left(b\left(x-2\right)\right), & x\geq 3, \end{cases}$$ sea derivable.

Esta función es continua en (–∞, 3) pues es un polinomio, también en (3, +∞) pues es un logaritmo neperiano de una expresión que siempre es positiva (siendo b > 0).

¿Es continua en x =3?

- Existe $f(3)=\ln\left(b\left(3-2\right)\right)=\ln b$
- Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} a\left(x^2-9\right)+\dfrac{bx}{3}-b=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \ln\left(b\left(x-2\right)\right)=\ln b \end{cases} \to \ln b=0 \to \boxed{b=1}$
- Ambos valores son iguales

Se cumple todo si *b = 1*. La función es continua si *b = 1*.

Esta función es derivable en $\mathbb{R}-\{3\}$ y su derivada es:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(x^2-9\right)+\dfrac{x}{3}-1, & x<3, \\ \ln\left(x-2\right), & x\geq 3, \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} a\left(2x\right)+\dfrac{1}{3}, & x<3, \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>3, \end{cases}$$

¿Es derivable en x = 3?

Deben coincidir las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-)=a\left(6\right)+\dfrac{1}{3}=6a+\dfrac{1}{3} \\ f'(3^+)=\dfrac{1}{3-2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6a+\frac{1}{3}=1 \Rightarrow 6a=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{a=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}}$$

Para ser derivable los valores de los parámetros son $a=\dfrac{1}{9}\ y\ b=1.$

2.- (2 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

El dominio son todos los reales menos los valores que anulen el denominador, es decir, $\mathbb{R}-\{-2\}$.

- **Asíntota vertical**. $x=a$

  $$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x+3}{(x+2)^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$

  La asíntota vertical es $x=-2$

- **Asíntota horizontal**. $y=b$

  $$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+3}{(x+2)^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

  La asíntota horizontal es $y=0$

- **Asíntota oblicua**. $y=mx+n$

  No existe, pues existe asíntota horizontal.

Averigüemos el punto de inflexión, calculando la derivada segunda e igualando a cero.

$$f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)^2-2(x+2)(x+3)}{(x+2)^4}=\frac{\cancel{(x+2)}\left[x+2-2(x+3)\right]}{(x+2)^{\cancel{4}\to 3}}$$

$$f'(x)==\frac{x+2-2x-6}{(x+2)^3}=\frac{-4-x}{(x+2)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-1(x+2)^3-3(x+2)^2(-4-x)}{(x+2)^6}=\frac{\cancel{(x+2)^2}\left[-(x+2)-3(-4-x)\right]}{(x+2)^{\cancel{6}\to 4}}$$

$$f''(x)=\frac{-x-2+12+3x}{(x+2)^4}=\frac{2x+10}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow \frac{2x+10}{(x+2)^4}=0\Rightarrow 2x+10=0\Rightarrow x=-5$$

Calculamos la derivada tercera y vemos si para $x=-5$ tiene un valor no nulo.

$$f''(x)=\frac{2x+10}{(x+2)^4}\Rightarrow f'''(x)=\frac{2(x+2)^4-4(x+2)^3(2x+10)}{(x+2)^8}$$

$$f'''(-5)=\frac{2(-5+2)^4-4(-5+2)^3(-10+10)}{(-5+2)^8}=\frac{162}{(-3)^8}\neq 0$$

En $x=-5$ hay un punto de inflexión.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f(x)* en un punto $x = a$ es:
$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Aplicamos esta fórmula para $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+2)^2}$ en el punto de abscisa $x = -5$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-5) = \dfrac{-5+3}{(-5+2)^2} = \dfrac{-2}{9} \\ f'(-5) = \dfrac{-4+5}{(-5+2)^3} = \dfrac{1}{-27} \end{array}\right\} \Rightarrow y - \frac{-2}{9} = \frac{1}{-27}\left(x-(-5)\right) \Rightarrow y + \frac{2}{9} = -\frac{x}{27} - \frac{5}{27} \Rightarrow 27y + 6 = -x - 5$$

La recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x = -5$ tiene ecuación $\boxed{x + 27y + 11 = 0}$

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las funciones f y g, siendo éstas:

$$f(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2, \quad g(x)=(x-2)^2-1.$$

y las rectas $x = 3$, $x = 5$.

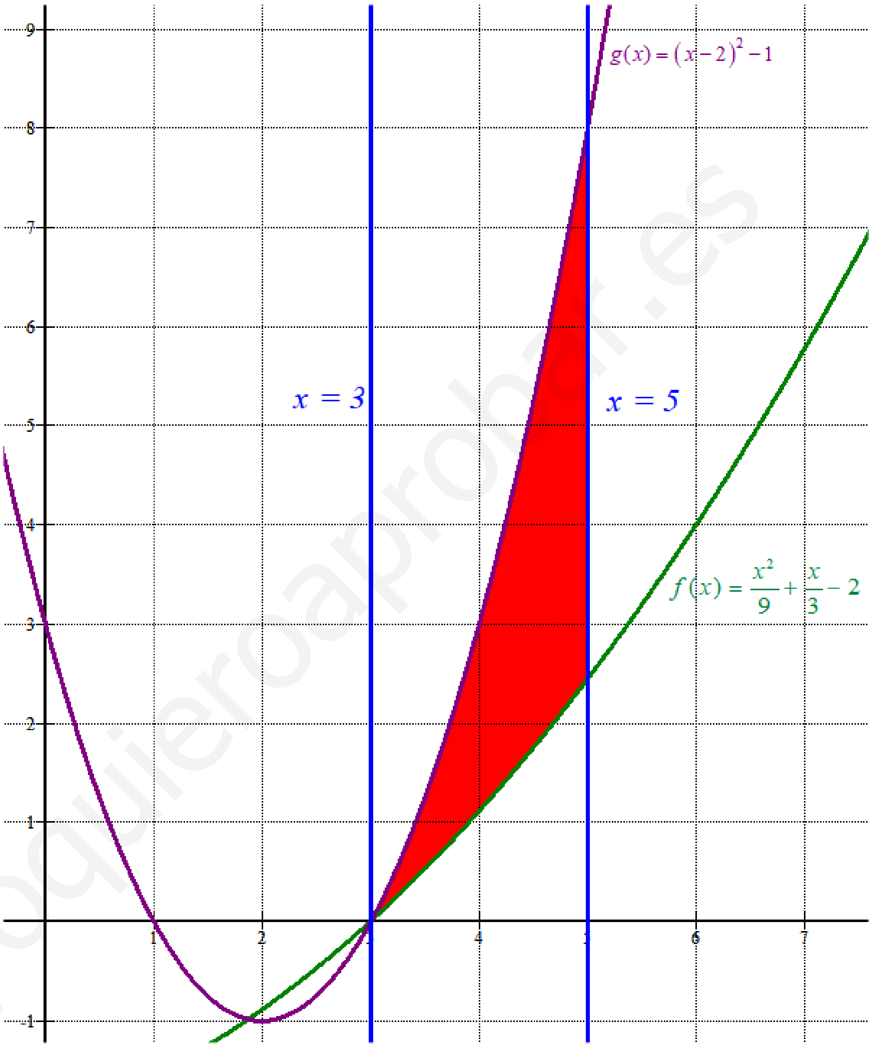
Dibujamos las funciones y las rectas para situar con más claridad el recinto del cual queremos hallar el área.

$$f(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2,$$

x	$y=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2$
2	$-0,88$
3	0
4	1,11
5	2,44
6	4

$$g(x)=(x-2)^2-1$$

x	$(x-2)^2-1$
2	-1
3	0
4	3
5	8
6	15



El área es la integral definida de $g - f$ entre 3 y 5.

$$g(x)-f(x)=(x-2)^2-1-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2\right)=x^2-4x+4-1-\frac{x^2}{9}-\frac{x}{3}+2=\frac{8}{9}x^2-\frac{13}{3}x+5$$

$$\acute{A}rea=\int_3^5 g(x)-f(x)dx=\int_3^5\frac{8}{9}x^2-\frac{13}{3}x+5dx=\left[\frac{8}{9}\frac{x^3}{3}-\frac{13}{3}\frac{x^2}{2}+5x\right]_3^5=\left[\frac{8}{27}x^3-\frac{13}{6}x^2+5x\right]_3^5=$$

$$=\left[\frac{8}{27}5^3-\frac{13}{6}5^2+25\right]-\left[\frac{8}{27}3^3-\frac{13}{6}3^2+15\right]=\frac{1000}{27}-\frac{13}{6}5^2+25-8+\frac{39}{2}-15=\boxed{4.37\ u^2}$$

El resultado analítico concuerda (más o menos) con el área que se puede apreciar en el dibujo contando cuadraditos.

4.- (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a-1)x+y+3az=1, \\ ax+ay-z=a, \\ (a-1)x+y+(a-1)z=-2a+1. \end{cases}$$

a) La matriz de coeficientes asociada es $A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}=a(a-1)^2-a+1+3a^2-3a^3+3a^2-a^2+a+a-1=.$$

$$=a\left(a^2-2a+1\right)-3a^3+5a^2+a=a^3-2a^2+a-3a^3+5a^2+a=-2a^3+3a^2+2a$$

Si lo igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow -2a^3+3a^2+2a=0\Rightarrow a\left(-2a^2+3a+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ -2a^2+3a+2=0\Rightarrow a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2+16}}{-4}=\begin{cases} \dfrac{-3+5}{-4}=-\dfrac{2}{4}=-0.5=a \\ \dfrac{-3-5}{-4}=2=a \end{cases} \end{cases}$$

Distinguimos 4 casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 0;\ a\neq -0.5\ y\ a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ -2a+1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}=\frac{\cancel{a^2}-\cancel{a}+2a-\cancel{1}+\cancel{3a^2}+6a^3-\cancel{3a^2}-\cancel{a^2}+\cancel{a}+\cancel{1}}{-2a^3+3a^2+2a}=$$

$$x=\frac{6a^3+2a}{-2a^3+3a^2+2a}=\frac{6a^2+2}{-2a^2+3a+2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & -2a+1 & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}=\frac{a^3-2a^2\cancel{+a-a}+\cancel{1}-6a^3+3a^2-3a^3+3a^2-a^2+a-2a^2+a+2a-\cancel{1}}{-2a^3+3a^2+2a}=$$

$$y=\frac{-8a^3+a^2+4a}{-2a^3+3a^2+2a}=\frac{-8a^2+a+4}{-2a^2+3a+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a-1 & 1 & -2a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}=\frac{-2a^3+a^2+2a^2\cancel{-a}+a^2\cancel{-a+a}-a^2\cancel{+a}+2a^2\cancel{-a}-a^2\cancel{+a}}{-2a^3+3a^2+2a}=$$

$$z=\frac{-2a^3+4a^2}{-2a^3+3a^2+2a}=\frac{-2a^2+4a}{-2a^2+3a+2}$$

La solución es $\boxed{x=\frac{6a^2+2}{-2a^2+3a+2};\quad y=\frac{-8a^2+a+4}{-2a^2+3a+2};\ z=\frac{-2a^2+4a}{-2a^2+3a+2}}$

CASO 2. $a=0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} -x+y & =1 \\ & -z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -x+y & =1 \\ & \boxed{z=0} \\ -x+y-z=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -x+y=1 \\ -x+y=1 \end{cases}\Rightarrow\boxed{y=1+x}$$

El sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son $\boxed{x=t;\ y=1+t;\ z=0}$

CASO 3. $a=-0.5$

El sistema queda:

$$\begin{cases} -1.5x+y-1.5z=1 \\ -0.5x-0.5y-z=-0.5 \\ -1.5x+y-1.5z=2 \end{cases}\Rightarrow\left\{\text{Multiplico todo por } -2\right\}\Rightarrow\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+y+2z=1 \\ 3x-2y+3z=-4 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} 3x & -2y & +3z & =-4 \\ -3x & +2y & -3z & =2 \\ \hline & & 0 & =-2 \end{array} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} 3x-2y+3z=-2 \\ x+y+2z=1 \\ 0=-2 \end{cases}$$

La tercera ecuación es imposible. **El sistema es incompatible.**

CASO 4. $a = 2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ 2x+2y-z=2 \\ x+y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +z & =-3 \\ -x & -y & -6z & =-1 \\ \hline & & -5z & =-4 \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & +2y & -z & =2 \\ -2x & -2y & -12z & =-2 \\ \hline & & -13z & =0 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+6z=1 \\ -13z=0 \\ -5z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+6z=1 \\ z=0 \\ z=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Da dos soluciones distintas para z en la ecuación segunda y tercera.

El sistema es incompatible. No tiene solución.

5.- (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila 4ª} - \text{x} \cdot \text{Fila 3ª}} \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ -x^3 & -xy^2 & -xz^2 & -xt^2 \\ \hline 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila 3ª} - \text{x} \cdot \text{Fila 2ª}} \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ -x^2 & -xy & -xz & -xt \\ \hline 0 & y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila 2ª} - \text{x} \cdot \text{Fila 1ª}} \\ x & y & z & t \\ -x & -x & -x & -x \\ \hline 0 & y-x & z-x & t-x \end{array}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{c} \text{Sacamos factor común} \\ \text{de cada columna} \end{array}\right\} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{Ecuación 3ª} - \text{y} \cdot \text{Ecuación 2ª}} \\ y^2 & z^2 & t^2 \\ -y^2 & -yz & -yt \\ \hline 0 & z^2-yz & t^2-yt \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{Ecuación 2ª} - \text{y} \cdot \text{Ecuación 2ª}} \\ y & z & t \\ -y & -y & -y \\ \hline 0 & z-y & t-y \end{array}\right\} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z(z-y) & t(t-y) \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{c} \text{Sacamos factor común} \\ \text{de cada columna} \end{array}\right\} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & t \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad m\in\mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.

Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Al ser distinto de cero, existe su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & m\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & m\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & m\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -m & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Para calcular A^{10} empezamos calculando A^2

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m+m & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2m & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2m & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2m+m & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3m & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Se observa que $A^k=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ km & 0 & 1\end{pmatrix}$, por lo que $\boxed{A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 10m & 0 & 1\end{pmatrix}}$

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

La ecuación del plano que nos piden tendrá un punto de la recta r, y como vectores directores el director de la recta r y el normal del plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

El vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,3,1)$.

Para encontrar el vector director y un punto de la recta r pasamos su ecuación a ecuaciones paramétricas.

Despejamos z en las ecuaciones.

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=4z-9 \\ -x-2y=-z-1 \end{cases}$$

$$y=3z-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3(3z-10)=4z-9 \Rightarrow x+9z-30=4z-9 \Rightarrow x=-5z+21$$

Las ecuaciones en paramétricas de la recta son $r \equiv \begin{cases} x=21-5z \\ y=-10+3z \\ z=0+z \end{cases}$

El vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(-5,3,1)$ y un punto es $P_r(21,-10,0)$.

Obtenemos la ecuación del plano pedido.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(21,-10,0)\in\pi' \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,3,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(-5,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-21 & y+10 & z \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\cancel{3x-63}-5y-50+3z+15z-y-10\cancel{-3x+63}=0$$

$$-6y+18z-60=0$$

$$\boxed{\pi' \equiv y-3z+10=0}$$

8.- (2 puntos) Dados las rectas *r* y *s*:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas *r* y *s*.

b) el plano π y la recta *s*.

a) Pasamos la recta "r" a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=z+1 \\ 4x-2y=-2z+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x-4y=-4z-4 \\ 4x-2y=-2z+10 \end{cases}$$

$$-6y=-6z+6 \Rightarrow y=z-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+z-1=z+1 \Rightarrow x=2$$

$$r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$$

Un vector director de la recta "r" es $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$ y un punto es $P_r(2,-1,0)$

De la recta $s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ obtenemos un punto y su vector director: $\overrightarrow{v_s}=(1,2,3)$ y $P_s(-3,-2,1)$.

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,2,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$$

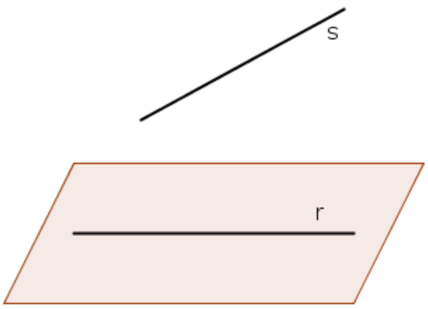
Por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

Y las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,2,3) \\ \overrightarrow{P_rP_s}=(-3,-2,1)-(2,-1,0)=(-5,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0-15-1+10-1=-7 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.



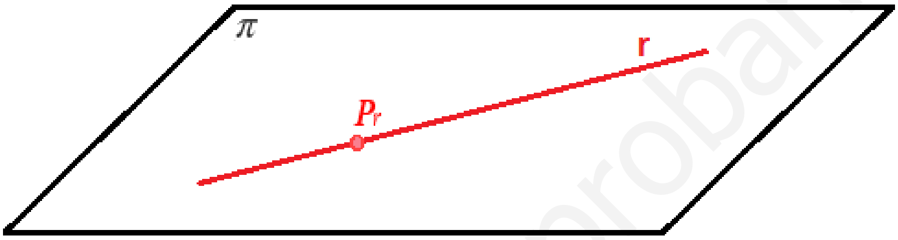
b) El plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$ tiene como vector normal $\vec{n}=(1,1,-1)$ y la recta $s \equiv \frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$ tiene como vector director $\overrightarrow{v_s}=(1,2,3)$.

El producto escalar de ambos es $\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_s}=(1,1,-1)(1,2,3)=1+2-3=0$. Por lo que recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Comprobemos si el punto $P_s(-3,-2,1)$ de la recta "s" está en el plano, es decir, si cumple su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_s(-3,-2,1)\in\pi ? \\ \pi \equiv x+y-z+6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-3-2-1+6=0?$$

Como es cierto la recta "s" está contenida en el plano.

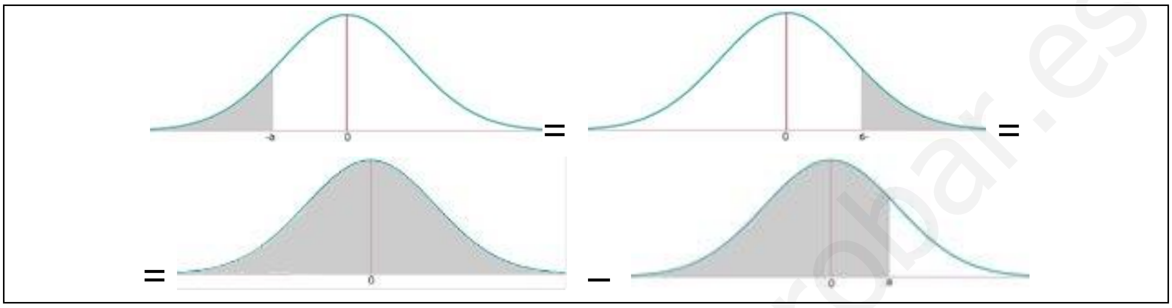


9.- (2 puntos) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.
a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.
b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

X = Número de días de estancia vacacional de una familia.
X = N(15, 4)

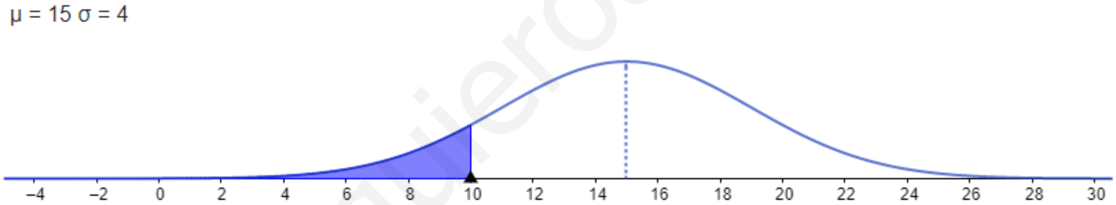
a)

$$P(X<10)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{10-15}{4}\right)=P(Z<-1.25)=$$



$$=P(Z>1.25)=1-P(Z\le 1.25)=\{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\}=$$

$$=1-0.8944=\boxed{0.1056}$$

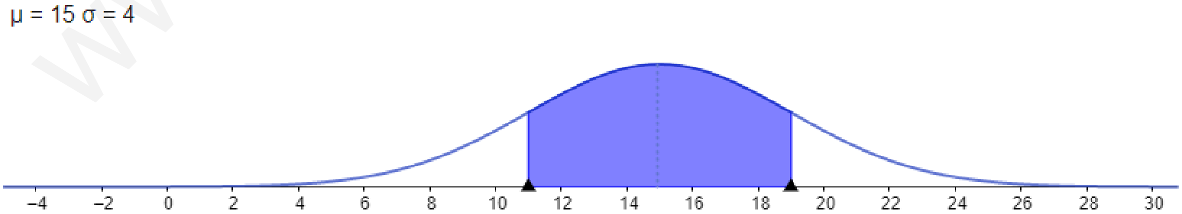


b)

$$P(11\le X\le 19)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{11-15}{4}\le Z\le\frac{19-15}{4}\right)=P(-1\le Z\le 1)=$$

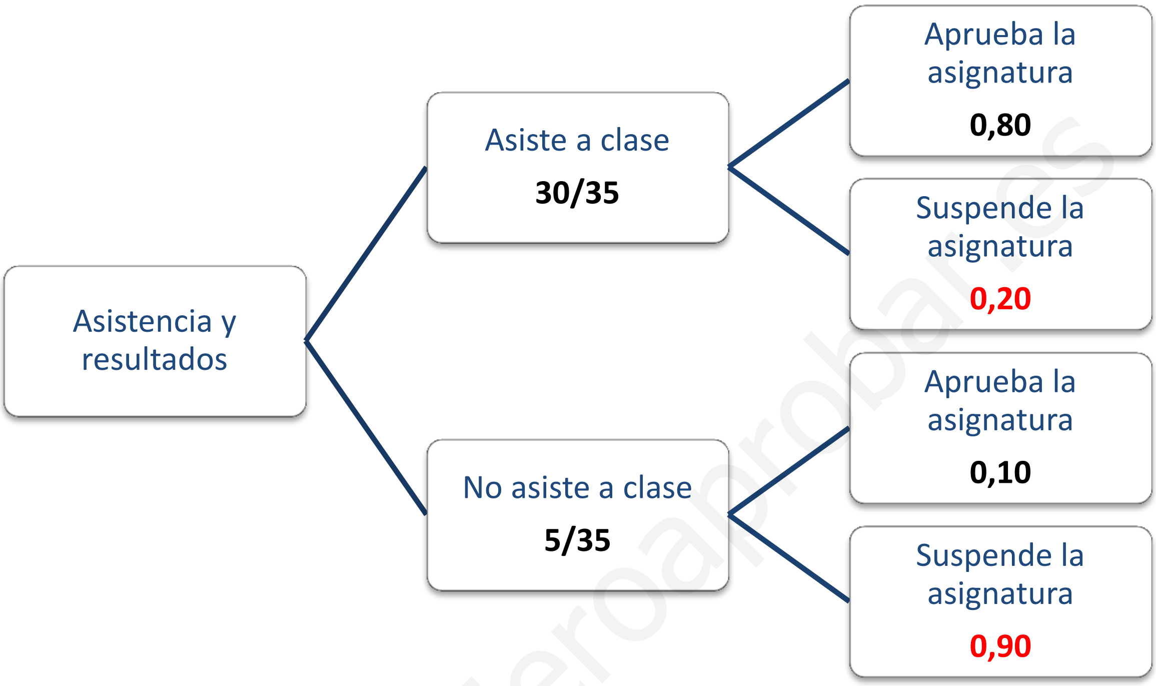
$$=P(Z\le 1)-P(Z\le -1)=P(Z\le 1)-P(Z\ge 1)=P(Z\le 1)-(1-P(Z\le 1))=$$

$$=P(Z\le 1)-1+P(Z\le 1)=0.8413-1+0.8413=\boxed{0.6826}$$



10.- (2 puntos) En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 10% de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.
a) Calcular el porcentaje de alumnos que aprueba la asignatura.
b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Realizamos el diagrama de árbol.



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(\text{Apruebe la asignatura}) =$$
$$= P(\text{Asiste a clase})\,P(\text{Apruebe la asignatura / Asiste a clase}) +$$
$$+P(\text{No asiste a clase})\,P(\text{Apruebe la asignatura / No asiste a clase}) =$$
$$= \frac{30}{35}\cdot 0,8 + \frac{5}{35}\cdot 0,1 = \frac{24,5}{35} = \frac{49}{70} = \frac{7}{10} = 0,7 = \boxed{70\%}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haya asistido a clase / Ha suspendido}) =$$
$$= \frac{P(\text{Haya asistido a clase } \cap \text{ Ha suspendido})}{P(\text{Ha suspendido})} = \frac{\frac{30}{35}\cdot 0,2}{1-0,7} = \frac{\frac{6}{35}}{0,3} = \boxed{\frac{4}{7} = 0,57}$$