CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA
Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
2020
Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m+6 \end{cases}$

3. Análisis

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a - \cos x}{x} & si \quad x < 0 \\ bx & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

4. Análisis:

a) Calcule el área encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x + 1 & si \quad x < 0 \\ (x-1)^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$.

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2 - 1}dx$.

5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0), \vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por P(1,0,0) y contiene a $r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

8. Estadística y Probabilidad:

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18)=0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$

a)

$$A^2X + AB = B \Rightarrow A^2X = B - AB \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1}A^2X = \left(A^2\right)^{-1}(B-AB) \Rightarrow \boxed{X = \left(A^2\right)^{-1}(B-AB)}$$

Como la matriz A es de dimensión 4x4, tiene la misma dimensión la matriz A^2.
La inversa de A^2 tendrá dimensión 4x4.
La matriz B tiene dimensión *mx3*.

$$AB \longrightarrow$$
$$4\times\boxed{4=m}\times 3 \to 4\times 3$$

La matriz B debe tener dimensión 4x3. Y la matriz AB saldrá de dimensión 4x3.
Como la matriz B y la matriz AB tienen la misma dimensión (4x3) se puede realizar la resta $B-AB$ obteniéndose como resultado una matriz 4x3.

Comprobamos la dimensión del producto $\left(A^2\right)^{-1}(B-AB)$.

$$\left(A^2\right)^{-1}(B-AB) \longrightarrow X$$
$$4\times\boxed{4\quad=\quad4}\times 3 \longrightarrow 4\times 3$$

La matriz B debe ser de dimensión 4x3 y la matriz X será de dimensión 4x3.

b) Comprobamos que A^2 es invertible y calculamos su inversa.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = AA = \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\-3&0&10\end{pmatrix}$$

$$\left|A^2\right| = \begin{vmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\-3&0&10\end{vmatrix} = 10-9 = 1 \neq 0$$

Existe la inversa y la calculamos.

$$\left(A^2\right)^{-1} = \frac{Adj\left(\left(A^2\right)^T\right)}{\left|A^2\right|} = \frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\-3&0&10\end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1&0\\0&10\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&0\\-3&10\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\-3&0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0&-3\\0&10\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&-3\\-3&10\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\-3&0\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}0&-3\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-3\\0&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$B-AB=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&-1&0\\3&0&-1-9\end{pmatrix}$$

$$B-AB=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&7\end{pmatrix}$$

Con lo obtenido lo sustituimos en la expresión obtenida en el apartado a).

$$X=\left(A^2\right)^{-1}\left(B-AB\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&7\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}10-6&0&-20+21\\0&0&0\\3-2&0&-6+7\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema: $\begin{cases}(m+3)x-m^2y=3m\\(m+3)x+my=3m+6\end{cases}$

La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix}m+3 & -m^2\\ m+3 & m\end{pmatrix}$

Con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix}m+3 & -m^2\\ m+3 & m\end{vmatrix}=m(m+3)+m^2(m+3)=m(m+3)(1+m)$$

Igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow m(m+3)(1+m)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m+3=0\rightarrow m=-3\\ 1+m=0\rightarrow m=-1\end{cases}$$

Estudiamos las cuatro situaciones diferentes que se nos pueden plantear según los valores de *m*.

CASO 1. $m\neq 0;\ m\neq -3\ y\ m\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado**. Con una única solución.

CASO 2. $m=0$

El sistema nos queda:

$$\begin{cases}3x=0\\3x=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\Rightarrow ¡IMPOSIBLE!$$

El sistema es **incompatible** pues nos salen dos valores diferentes de “x”.

CASO 3. $m=-3$

El sistema nos queda:

$$\begin{cases}-9y=-9\\-3y=-9+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\-3y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\y=1\end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**. Tiene infinitas soluciones. Las soluciones tienen la expresión: $x=t;\quad y=1$

CASO 4. $m=-1$

El sistema nos queda:

$$\begin{cases}2x-y=-3\\2x-y=-3+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=-3\\2x-y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=-3\\-2x+y=-3\end{cases}$$

$$0=-6 \quad ¡IMPOSIBLE!$$

El sistema es **incompatible**. No tiene solución.

El sistema es compatible determinado para $m\neq 0;\ m\neq -3\ y\ m\neq -1$. Es incompatible para $m=0$ o $m=-1$. El sistema es compatible indeterminado para $m=-3$.

3. Análisis

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx & si \quad x\geq 0\end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

Para que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx & si \quad x\geq 0\end{cases}$ sea continua debe serlo en $x = 0$ y se deben cumplir:

- Existe $f(0)=b\cdot 0=0$
- Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Calculo los límites laterales:
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{a-\cos x}{x}=\dfrac{a-\cos 0}{0}=\dfrac{a-1}{0}=\{\text{Debe ser } a=1\}=$
    $=\dfrac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{-senx}{1}=-sen0=0$
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} bx=0$
- $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$

Se cumplen las tres condiciones y la función es continua cuando $\boxed{a = 1}$.

Para $a = 1$ la función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx & si \quad x\geq 0\end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 0$.

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$ es:

$$f\,'(x)=\begin{cases}\dfrac{xsenx-1+\cos x}{x^2} & si \quad x<0\\ b & si \quad x>0\end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = 0$ son:

- $f\,'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{xsenx-1+\cos x}{x^2}=\dfrac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$
  $=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{senx+x\cos x-senx}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}\cos x}{2\cancel{x}}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{\cos 0}{2}=\dfrac{1}{2}$
- $f\,'(0^+)=b$

Como deben ser iguales para que sea derivable debe cumplirse que $\boxed{b=\dfrac{1}{2}}$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 1/2$.

4. Análisis:

a) Calcule el área encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & si \quad x<0\\ (x-1)^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$.

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}dx$.

a) Localizamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X ($y = 0$)

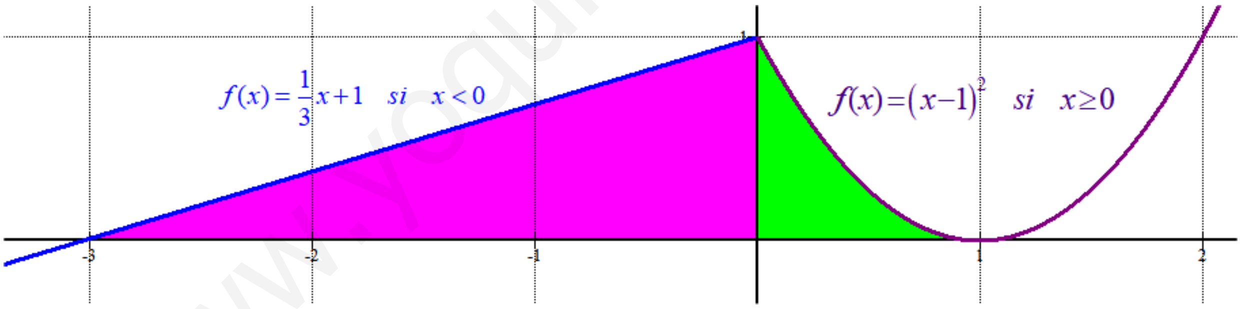
$$f(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}x+1=0\rightarrow x+3=0\rightarrow x=-3 & si \quad x<0\\ (x-1)^2=0\rightarrow x=1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

El área pedida la dividimos en dos recintos que calculamos con dos integrales definidas, una entre –3 y 0 de $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ y otra entre 0 y 1 de $f(x)=(x-1)^2$.

$$\int_{-3}^{0}\frac{1}{3}x+1dx=\left[\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{0}=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{0^2}{2}+0\right]-\left[\frac{1}{3}\frac{(-3)^2}{2}-3\right]=-\frac{9}{6}+3=\frac{3}{2}$$

$$\int_{0}^{1}(x-1)^2dx=\int_{0}^{1}x^2-2x+1dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1}=\left[\frac{1^3}{3}-1^2+1\right]-\left[\frac{0^3}{3}-0^2+0\right]=\frac{1}{3}$$

$$\text{Área}=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{11}{6}=1,83\,u^2}$$



b)

$$\int x\sqrt{x^2-1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ x^2-1=t\rightarrow 2xdx=dt\\ dx=\frac{dt}{2x}\end{array}\right\}=\int\cancel{x}\sqrt{t}\frac{dt}{2\cancel{x}}=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}=\{\text{Deshacemos el cambio } t=x^2-1\}=\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}=\boxed{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+K}$$

5. Geometría:
Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi: -2x+y+z=0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

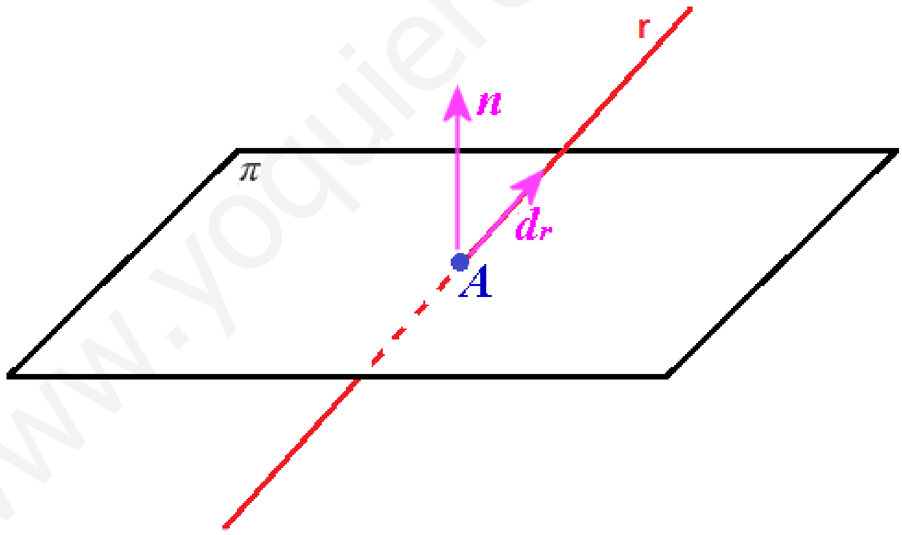
Realizamos el producto escalar del vector director de la recta $\overrightarrow{d_r}(1,0,3)$ y el normal del plano $\vec{n}(-2,1,1)$.

$$\overrightarrow{d_r}\cdot\vec{n}=(1,0,3)(-2,1,1)=-2+3=1\neq 0$$

Los vectores no son perpendiculares y por tanto recta y plano no son paralelos, ni la recta está contenida en el plano.
Por lo que recta y plano se cortan en un punto. Determinamos ese punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\overrightarrow{d_r}(1,0,3)\\ P(1,0,0)\in r\end{matrix}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=0\\ z=3\alpha\end{cases}\\ \pi: -2x+y+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow -2(1+\alpha)+0+3\alpha=0\Rightarrow -2-2\alpha+3\alpha=0\Rightarrow \alpha=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1+2=3\\ y=0\\ z=6\end{cases}\Rightarrow \boxed{\text{El punto de corte es } A(3,0,6)}$$



6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0), \vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por P(1,0,0) y contiene a $r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

a) Si son coplanarios el determinante de la matriz formada por sus coordenadas debe ser cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4k-4=0 \Rightarrow k-1=0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

b) Si el plano contiene a la recta el vector director de la recta es un vector director del plano. El otro vector director que necesitamos lo obtenemos del vector que une el punto P con un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $Q(1,0,-1)$.

$$r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q(1,0,-1) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-4,3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{v_r} = (1,-4,3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,0,-1)-(1,0,0) = (0,0,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x-4+y=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 4x+y-4=0}$$

7. Estadística y Probabilidad:
El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Realizamos una tabla de contingencia reflejando que porcentaje corresponde a cada característica.

	Aprueban con honores	No honores	
Nacido en RU	**83% de 57 = 47,31**		**57**
No nacido en RU			
	80		**100**

Completamos los datos que nos faltan.

	Aprueban con honores	No honores	
Nacido en RU	**47,31**	**9,69**	**57**
No nacido en RU	**32,69**	**10,31**	**43**
	80	**20**	**100**

Mirando en los datos de la primera columna tenemos que el 80 % aprueban con honores y de ellos el 32,69 % no son de Reino Unido.

Aplicamos el teorema de Bayes para responder a lo que pide el ejercicio.

$$P(\text{No haya nacido en RU / Ha aprobado con honores}) =$$

$$= \frac{P(\text{No haya nacido en RU } \cap \text{ Ha aprobado con honores})}{P(\text{Ha aprobado con honores})} = \frac{32,69}{80} = \boxed{0,408625}$$

8. Estadística y Probabilidad:
a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.
b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

a) Cada elección es independiente de la anterior. Hay 40 elecciones siendo 0,20 la probabilidad de que un árbol elegido tenga más de 30 años.

X = Número de árboles de más de 30 años entre los 40 elegidos.
X es una variable aleatoria binomial, con parámetros *n = 40* y *p = 0.2*. Así *q = 1 – p = 0.8*.
X = B(40, 0.2)

$$P(X = 4) = \binom{40}{4} 0.2^4 \cdot 0.8^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0.2^4 \cdot 0.8^{36} = 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 0.2^4 \cdot 0.8^{36} = \boxed{0.0475}$$

b) X = N(15, σ).

$$P(X \leq 18) = 0.6915 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Tipificamos} \\ \text{la variable X} \end{matrix} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{18-15}{\sigma} \right) = 0.6915 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma} \right) = 0.6915$$

Buscamos este valor de probabilidad (0.6915) en la tabla de la N(0, 1) y obtenemos que:

$$\frac{3}{\sigma} = 0.5 \Rightarrow 3 = 0.5\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{3}{0.5} = 6}$$