1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.
b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

Solución

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

Sabemos que no existe la inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$, si |A| = 0.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= -(-1)(0-1) = -1 \neq 0$, luego existes A^{-1}.

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

De $AX + I_3 = BC \rightarrow AX = BC - I_3$. Multiplicando $AX = BC - I_3$ por A^{-1} por la izquierda tenemos:
$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot(BC - I_3) \rightarrow I_3X = A^{-1}\cdot(BC - I_3)$, luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(BC - I_3)}$.

Tenemos $BC - I3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$\mathbf{X = A^{-1}\cdot(BC - I_3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.- a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a. \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para a = 2, si es posible.

Solución

(a)

Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a. \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2+C_1 \\ C_3+C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 1 & a+1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= +(-1)(9 - (a+1)^2) = (-1)\cdot(9 - a^2 - 2a - 1) =$
$= a^2 + 2a - 8$.

De |A| = 0, $a^2 + 2a - 8 = 0$, de donde $a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$, por tanto a = -4 y a = 2.

Si $a \neq -4$ y $a \neq 2$, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si a = -4, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2+C_1 \\ C_3+C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = +(-1)(-9 - 9) = 18 \neq 0$, luego rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si a = 2, tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, en nuestro caso infinitas.**

(b)

Resuelve razonadamente el sistema anterior para a = 2, si es posible.

Por el apartado anterior el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución.
Como el rango es dos tomamos sólo dos ecuaciones, 2ª y 3ª.
Lo resolvemos por Gauss:

$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 1 \ (E_2+E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ + 3y + 3z = 3 \ (E_2/3) \end{cases} \approx \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$, tomando $z = m \in R$ tenemos $y = 1 - m$

y también $x = 2 - 2(1 - m) - 2m = 2 - 2 + 2m - 2 = 0$, **y la solución del sistema pedido para el caso de a = 2 es (x, y, z) = (0, 1 - m, m) con m ∈ R**.

3.- a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)$

b) [1,5 puntos] Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función f(x) en x = 1 y en x = 2, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Solución

(a)

Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)$

La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en [a - δ, a + δ], derivables en (a - δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞, y si x→∞.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x) - x}{x\cdot\operatorname{sen}(2x)} = \left\{\frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}, \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(2x)\cdot 2 - 1}{1\cdot\operatorname{sen}(2x) + x\cdot\cos(2x)\cdot 2} = \frac{1}{0^+ + 0^+} = +\infty.$$

(b)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función f(x) en x = 1 y en x = 2, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Sabemos que la función $2^{(x-1)}$ es continua en R, en particular lo es en x < 1.
La función x – 2 es continua en R en particular en el abierto (1, 2).
La función ln(x – 1) es continua en x > 1, en particular lo es en x > 2.

Falta estudiar la continuidad de f(x) en x = 1 y x = 2.

Sabemos que f es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2^{x-1} = 2^0 = 1$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-2) = -1$

Como $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$, **f(x) no es continua en x = 1, y en dicho punto x = 1 presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto finito de amplitud 1 - (-1) = 2.**

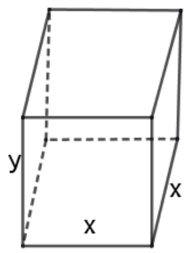
Sabemos que f es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\ln(x-1)\right) = \ln(1) = 0$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-2) = 0$

Como $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$, **f(x) es continua en x = 2, por tanto f(x) es continua en R - {1}, y en el punto x = 1 presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto finito de amplitud 1 - (-1) = 2.**

4.- a) [1,5 puntos] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.
b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x – 1$ en el punto de abscisa x = 1.
Solución
(a)
Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima

La siguiente figura nos ayudará:



Función a Optimizar: Superficie = S(x, y) = 4 caras laterales + base = $4xy + x^2$.

Relación: Volumen = 108 = (área base)·(altura) = $x^2 \cdot y$, de donde $y = 108/x^2$

Función a Optimizar: Superficie = $S(x) = 4x(108/x^2) + x^2 = = 432/x + x^2$.

Sabemos que si S '(a) = 0 y S ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de S(x)
Sabemos que si S '(a) = 0 y S ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de S(x)

$S(x) = 432/x + x^2$; $S'(x) = -432/x^2 + 2x$.

De S '(x) = 0, tenemos $-432/x^2 + 2x = 0$, es decir $432/x^2 = 2x$, por tanto $x^3 = 216$, de donde $\mathbf{x = \sqrt[3]{216} = 6}$.

Veamos que es mínimo.
$S'(x) = -432/x^2 + 2x = -432\cdot x^{-2} + 2x$; $S''(x) = 864x^{-3} + 2 = 864/x^3 + 2$.

Como S ''(6) = $864/(6)^3 + 2 = 864/216 + 2 = 4 + 2 = 6 > 0$, **luego x = 6 dm es un mínimo relativo.**

Y las dimensiones de la caja son x = 6 dm e y = $108/(6)^2$ dm = 3 dm, para que la superficie total de la caja sea mínima.
(b)
Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2+x-1$ en el punto de abscisa x= 1.

La recta tangente en x = 1 es "y - f(1) = f '(1)(x - 1)".

Tenemos $f(x) = x^2 + x - 1$ y $f(x) = 2x + 1$, luego f(1) = 1 y f '(1) = 3, por tanto:

La recta tangente en x = 1 es "y - 1 = 3(x - 1)", es decir y = 3x – 2.

5.- a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)
b) [1,25 puntos] Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.
Solución
(a)
Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

Tenemos $\int \frac{-dx}{1+e^x} = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t; x = \ln(t) \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{(1+t)\cdot t} = \{\text{Racional}\} = \int \frac{A}{1+t}dt + \int \frac{Bdt}{t} = A\cdot\ln(1+t) + B\cdot\ln(t) + K =$

$= \{++, \text{ y quito cambio}\} = 1\cdot\ln(1+e^x) + (-1)\cdot\ln(e^x) + K =$ **$\ln(1 + e^x) - x + K$.**
{++} Calculamos A y B
$$\frac{-1}{(1+t)(t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{A\cdot t + B(1+t)}{(1+t)(t)}$$
Igualando numeradores:

$-1 = A\cdot t + B(t + 1)$. Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador (t = 0 y t = -1).

Para x = -1, -1 = A(-1) $\rightarrow$ *A = 1*
Para x = 0, -1 = B(1) $\rightarrow$ *B = -1*.
(b)
Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Veamos los cortes de f(x) con g(x) resolviendo la ecuación f(x) = g(x).

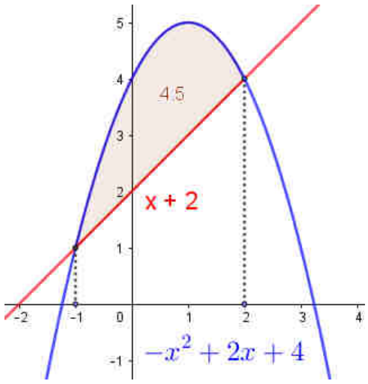
De f(x) = g(x) $\rightarrow$ $-x^2 + 2x + 4 = x + 2$ $\rightarrow$ $-x^2 + x + 2 = 0$ $\rightarrow$ $x^2 - x - 2 = 0$, luego $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ es decir x = -1 y x = 2 y los puntos de corte de f(x) y g(x) son (-1, 1) y (2, 4).

Sabemos que la gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ es una parábola así ($\cap$) porque el nº que multiplica a x^2 es negativo. La abscisa de su vértice es la solución de f '(x) = 0 = -2x + 2, de donde x = 1, y su vértice es el punto V(1, f(1)) = V(1, 5).

Hemos visto antes que pasa por (-1, 1) y (2, 4).

La recta y = x + 2 hemos visto que pasa por los puntos (-1, 1) y (2, 4).

Teniendo en cuenta todo lo anterior un esbozo de las gráficas y la región que determinan es:



El área pedida es:

Área = $\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+4-(x+2))dx = \int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} =$

$=$ [(-8/3 + 2 + 4) - (+1/3 + 1/2 - 2)] u^2 **= (10/3 + 7/6) u^2 = 9/2 u^2 = 4'5 u^2**.

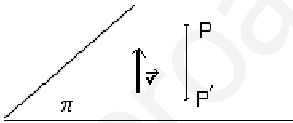
6.- Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

a) [1 punto] Calcula razonadamente la distancia del punto P(1, 2, -1) al plano π.
b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos B(1, -1, 2) y C(0, 1, 1).

Solución

(a)

Calcula razonadamente la distancia del punto P(1, 2, -1) al plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ (**n** = (1, 2, -1)).



(i) Calculamos la recta "s" perpendicular al plano π que pasa por el punto P (su vector director **u** es el vector normal del plano π, **n** = (1, 2, -1)). Ponemos la recta s en paramétricas o vectorial.
$s \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, -1 - \lambda)$ con $\lambda \in R$.
(ii) Calculamos el punto P' que es la proyección ortogonal de la recta s con el plano π, para lo cual sustituimos la ecuación de la recta s en el plano π, determinamos el valor del parámetro λ y con dicho valor entrando en las ecuaciones de la recta en paramétricas obtenemos las coordenadas del punto P'.

$(1 + \lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (-1 - \lambda) - 4 = 0 = 6 + 6\lambda - 4 = 0$, de donde $\lambda = -2/6 = -1/3$, luego el punto proyección P' es P'(1 + (-1/3), 2 + 2(-1/3), -1 - (-1/3)) = P'(2/3, 4/3, -4/3)
(iii) **La distancia buscada es d(P; π) = d(P; P')** = ||**PP'**|| = $\sqrt{(1/3)^2+(2/3)^2+(1/3)^2}$ u1 **= $\sqrt{(6/9)}$ u^1 = $\sqrt{(6)}/3$ u^1.**

PP'= (2/3 - 1, 4/3 - 2, -4/3 + 1) = (-1/3, -2/3, -1/3)

También sabemos que La distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ es d(P; π) =
$= \frac{|a(p_1)+b(p_2)+c(p_3)+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

En nuestro caso **d(P; π) =** $\frac{|(1)+2(2)-(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} u^1 = \frac{|2|}{\sqrt{6}} u^1 = \frac{2}{\sqrt{6}} u^1 = \frac{2\sqrt{6}}{6} u^1 = \frac{\sqrt{6}}{3} u^1$ y vemos que coincide.

(b)

Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos B(1, -1, 2) y C(0, 1, 1).

Veamos el punto A, corte de la recta del plano $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ con el $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$.

Un vector directo de la recta r es **u** = (Producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta r) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(2 - 0) - **j**(-1 - 0) + **k**(1 - 0) = (2, 1, 1).

Un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ es (2, 0, -2), tomando y = 0.

La ecuación la recta r en vectorial es: r ≡ (x, y, z) = (2 + 2m, m, -2 + m) con m ∈ R.

Sustituimos la ecuación de la recta r en el plano π, determinamos el valor del parámetro m y con dicho valor entrando en las ecuaciones de la recta en paramétricas obtenemos las coordenadas del punto A.

(2 + 2m) + 2(m) - (-2 + m) - 4 = 0 = 4 + 3m - 4 = 0, de donde m = 0, luego el A es A(2, 0, -2)

Sabemos que el área de un triángulo ABC con A(2, 0, -2), B(1, -1, 2) y C(0, 1, 1) es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AC, es decir el determinado por los vectores **AB** y **AC**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**||

AB = (1 - 2, -1 - 0, 2 - (- 2) = (-1, -1, 4); **AC** = (0 - 2, 1 - 0, 1 - (-2)) = (-2, 1, 2)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(-2 - 4) - **j**(-2 + 8) + **k**(-1 - 2) = (-6, -6,-3). ||**AB**x**AC**|| = $\sqrt{(6)^2+(6)^2+(3)^2}$ = $\sqrt{81}$ = 9.

El área del triángulo pedido es = (1/2)· ||ABxAC|| = (1/2)·9 u^2 = 9/2 u^2 = 4'5 u^2

7.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto P(-1, 0, 2).

a) [1,25 puntos] Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.
b) [1,25 puntos] Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

Solución

(a)

Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

Ponemos la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ es vectorial $r \equiv \begin{cases} x = 2 + m \\ y = m \\ z = 0 \end{cases}$, con m ∈ R.

Un punto de r es A(2, 0, 0) y un vector director es **u** = (1, 1, 0).
Un punto de s es B(0, -2, 1) y un vector director es **v** = (3, -2, 1). El vector **AB** = (-2, -2, 1).

Como los vectores **u** = (1, 1, 0) de "r" y **v** = (3, -2, 1) de "s" no son proporcionales, los vectores **u** y **v** no son paralelos, por tanto las rectas "r" y "s" tampoco lo son, luego "r" y "s" se cortan o se cruzan.

Si det(**AB**, **u**, **v**) = 0, "r" y "s" se cortan, con **AB** = **b** – **a** = (0, -2, 1) - (2, 0, 0) = (-2, -2, 1).
Si det(**AB**, **u**, **v**) ≠ 0, "r" y "s" se cruzan.

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} C_2 - C_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila = -(1)·(0 + 5) = -5 ≠ 0, **luego las rectas "r" y "s" se cruzan.**

(b)

Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

Para un plano π necesitamos un punto, el P(-1, 0, 2), y dos vectores independientes el **u** = (1, 1, 0) de la recta r, y el **v** = (3, -2, 1) de la recta s.

La ecuación del plano pedido es $\pi \equiv$ **det(PX, u, v) = 0 =** $\begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= (x + 1)(1 - 0) - (y)(1 - 0) + (z - 2)(-2 - 3) **= x + 1 - y - 5z + 10 = 0 = x - y - 5z + 11 = 0.**

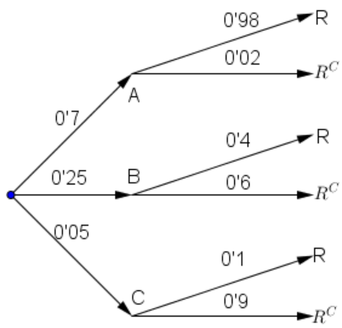
8.- a) El 70% de los usuarios de Instagram tiene menos de 34 años, el 25% entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5% más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98% de los menores de 34 años, el 40% de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10% de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:
a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?
a.2) [0,75 puntos] Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?
b) El tiempo que un usuario de la red Instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.
b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?
b.2) [0,75 puntos] ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?
Solución
(a)
El 70% de los usuarios de Instagram tiene menos de 34 años, el 25% entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5% más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98% de los menores de 34 años, el 40% de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10% de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:
(a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?
(a.2) [0,75 puntos] Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

(a.1)
¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

Llamemos A, B, C, R y R^C, a los sucesos siguientes, “tener menos de 34 años”, “tener entre 34 y 54 años”, “tener más de 54 años”, "acceder a la red" y "no acceder a la red", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 70% = 0’7; p(B) = 25% = 0’25; p(C) = 5% = 0’05; p(R/A) = 98% = 0’98; p(R/B) = = 40% = 0’4, p(R/C) = 10% = 0’1, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(no acceder a diario a dicha red social) = p(R^C)**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Tenemos **p(R^C)** = p(A)·p(R^C/A) + p(B)·p(R^C/B) + p(C)·p(R^C/C) =
= (0’7)·(0’02) + (0’25)·(0’6) + (0’05)·(0’9) **= 209/1000 = 0’209**.
(a.2)
Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

Me piden **p(tener entre 34 y 54 años, si accede a diario a dicha red social) = p(B/R)**

Por la fórmula de Bayes:

Me piden **p(B/R) =** $\frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \cdot p(R/B)}{1 - p(R^C)} =$ (0'25·0'4)/(1 - 0'209) **= 100/791** $\cong$ **0'12642225.**

(b)

El tiempo que un usuario de la red Instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

La variable X = tiempo en minutos conectado a la red, sigue una distribución normal N(μ, σ) = N(53, 10).

(b.1)

¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

Me piden **p(conectar más de 30 minutos) = p(X ≥ 30) =** {tipificamos} = $p\left(Z \geq \frac{30 - 53}{10}\right)$ = p(Z ≥ -2'3) =

= {simetría} = p(Z ≤ 2'3) **= 0'9893.**

(b.2)

¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

Me piden **p(porcentaje conectados entre 40 y 67 minutos) = p(40 ≤ X ≤ 67) =** {tipificamos} =

$p\left(\frac{40 - 53}{10} \leq Z \leq \frac{30 - 67}{10}\right)$ = p(-1'3 ≤ Z ≤ 1') = = p(Z ≤ 1'4) - p(Z ≤ -1'3) = {suceso contrario} =

= p(Z ≤ 1'4) - (1 - p(Z ≤ 1'3)) = 0'9192 - 1 + 0'9032 **= 0'8224 = 82'84 % se conectan entre 40 y 67 minutos.**