1.- a) [1,25 puntos] Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente todos los posibles valores x; y; z para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Solución

(a)

Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa $A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Sabemos que no existe la inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$, si $|A| = 0$.

Tenemos $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{F_4-F_3} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{cuarta}\\ \text{fila}\end{matrix} = -(1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -(1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}\end{matrix} = (-1)\cdot(a)\cdot(a^2+ a - 2).$

De $|A| = 0$, $(-1)\cdot(a)\cdot(a^2+ a - 2)$, de donde $a = 0$ y $a^2+ a – 2 = 0$, $a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, luego $a = 1$ y $a = -2$.

Si a = -2, a = 0 y a = 1 no existe la inversa A^{-1}.

(b)

Calcula razonadamente todos los posibles valores x; y; z para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Nos dicen que $C\cdot D = D\cdot C \rightarrow C\cdot D = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix}$; $D\cdot C =\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & -z+1 \end{pmatrix}$.

Igualando tenemos $3x + 1 = 3x + y$, **de donde y = 1**; $3y + z = x – y$, es decir **4 + z = x**; $x – 1 = z + 3$, de donde **x = 4 + z**; $y – z = -z + 1$, luego **y = 1, resumiendo y = 1 y x = 4 + z para cualquier z $\in$ R.**

2.- a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in R$:

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay \quad = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}.$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para a = 2, si es posible.

Solución

(a)

Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in R$: $\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay \quad = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$.

Sea $A=\begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A|=\begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1-F_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = +(-1)(2a + a^2) = (-1)\cdot a\cdot(2 + a)$.

De $|A| = 0$, $a\cdot(2 + a) = 0$, de donde $a = 0$ y $a = -2$.

Si $a \neq 0$ y $a \neq -2$, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si a = 0, tenemos $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener una fila de ceros, luego rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, en nuestro caso infinitas.**

Si a = -2, tenemos $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1-F_2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = -(-1)(2+4) = 6 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, por el Teorema de Rouchè el **sistema es incompatible y no tiene solución.**

(b)

Resuelve razonadamente el sistema anterior para a = 2, si es posible.

Por el apartado anterior el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Lo resolvemos por Gauss:

$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \; (E_1-E_2) \\ 2x - 2y \quad\;\; = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \; (E_3-E_2) \end{cases} \approx \begin{cases} z = 0 \\ 2x - 2y = 2 \\ 4y - z = -1 \end{cases}$ **,** de donde $z = 0$, $y = -1/4$ y $x = (-1/4) + 1 = 3/4$, y **la solución del sistema es (x, y, z) = (3/4, -1/4, 0)**.

3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1 + 2x - \cos(x^2)}$.

Solución

(a)
Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

Sabemos que $\frac{3}{x-2}$ es continua en R – {2}, en particular lo es en x < 2.
La función cos(πx) es continua en R en particular en el cerrado [2, 3].
La función $\frac{\ln(x-2)}{3-x}$ es continua en (2, +∞) – {3}, en particular lo es en x > 3.
Falta estudiar la continuidad de f(x) en x = 2 y x = 3.

Sabemos que f es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \cos(\pi x) = \cos(2\pi) = 1$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$.

Como $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, **f(x) no es continua en x = 2, y en dicho punto x = 2 presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.**

Recordamos la regla de L'Hôpital (L'H), que nos dice que si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞)

Sabemos que f es continua en x = 3 si $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \cos(\pi x) = \cos(3\pi) = -1. \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\ln(x-2)}{3-x} = \left\{\frac{0}{0}; L'H\right\} = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{\frac{1}{x-2}}{-1}\right) = -1.$$

Como $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = -1$, **f(x) es continua en x = 3, por tanto f(x) es continua en R – {2}, y en el punto x = 2 presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.**

(b)
Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} = \left\{\frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}, L'H\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{2+\operatorname{sen}(x^2)\cdot(2x)} = \frac{1}{2}.$$

4.- Sea la función $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.
a) [1,5 puntos] Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función f(x) y clasifícalos.
b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x = 0.
Solución
(a)
Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función f(x) y clasifícalos.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1};\ f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x^2+1) - (x^2-2x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+1) - (x-1)^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+1-x^2+x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Si f '(x) = 0 → 2(x – 1)·(x + 1) = 0, de donde x = -1 y x = +1, que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(-2) = 6/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞, -1).**

Como f '(0) = -2/(+) < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-1, 1).**

Como f '(2) = 6/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1, +∞)**

Por definición en x = -1 hay un máximo relativo que vale f(-1) = 4/2 = 2.
Por definición en x = 1 hay un mínimo relativo que vale f(1) = 0/2 = 0.
(b)
Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x = 0.

La recta tangente en x = 0 es "y - f(0) = f '(0)(x - 0)", y la recta normal en x = 0 es "y - f(0) = [-1/f '(0)]·(x - 0).

Tenemos $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ y $f'(x) = \dfrac{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$, luego f(0) = 1 y f '(0) = -2, por tanto:

La recta tangente en x = 0 es "y - 1 = -2x", y la recta normal es "y - 1 = (1/2)x, es decir y = -2x + 1 e y = x/2 + 1, respectivamente

5.- a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}dx.$

b) [1,25 puntos] Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.
Solución
(a)
Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}dx.$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{3x-2}{(x-1)^2}dx = \left\{\begin{matrix}\text{Racional con}\\ \text{una doble (1)}\end{matrix}\right\} = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}dx = A\cdot\ln|x-1| - \frac{B}{x-1} + K = \{++\} =$$

$$= 3\cdot\ln|x+3| - \frac{1}{x-1} + K.$$

{++} Calculamos A y B

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

Igualando numeradores:
3x - 2 = A(x-1) + B. Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador, y le damos otro valor.
Para x = 1, 1 = B → *B = 1*
Tomo x = 0, -2 = A(-1) + 1 → A = 3 → *A = 3*.
(b)
Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3+2x^2+3x$. y el eje de abscisas.

Calculamos los cortes de g(x) con OX.
De g(x) = 0 → $-x^3 + 2x^2 + 3x = 0 = -x\cdot(x^2 - 2x - 3) = 0$, de donde x = 0 y $x^2 - 2x - 3 = 0$ por tanto tenemos

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$, es decir x = -1 y x = 3. Tenemos que los límites de integración son -1, 0 y 3.

Nos han dado una cúbica con $-x^3$ por tanto en -∞ vale +∞, por tanto entre -1 y 0, f(x) < 0, y entre 1 y 3 tenemos f(x) > 0, por tanto:

Área = $\displaystyle -\int_{-1}^{0}(-x^3+2x^2+3x)dx + \int_{0}^{3}(-x^3+2x^2+3x)dx = -\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3} =$

= - [(0) - (-1/4 - 2/3 + 3/2)] + [(-(81)/4 + 18 + 27/2) - (0)] u^2 **= (7/12 + 45/4) u^2 = 71/6 u^2 ≅ 11'83333 u^2**.

6.- Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) [1 punto] Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.
b) [1,5 puntos] Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto P(3, -3, 2) y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Solución

(a)

Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

Sabemos que el ángulo que forman dos planos $\pi_1(\mathbf{n_1})$ y $\pi_2(\mathbf{n_2})$ es el menor de los ángulos que determinan sus diedros, el cual coincide con el menor de los ángulos que forman sus vectores normales con un origen común, es decir $\cos(<\pi_1,\pi_2>) = |\cos(<\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}>)|$

(Tomando el valor absoluto del coseno nos aseguramos de que el ángulo es el menor y no supera lo 90º sexagesimales)

$\cos(\alpha) = \cos(<\pi_1,\pi_2>) = |\cos(<\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}>)| = \left|\dfrac{\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|}\right|$, de donde $\alpha = \arccos\left(\left|\dfrac{\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|}\right|\right)$

Tenemos $\mathbf{n_1} = (2, 1, 1)$ y $\mathbf{n_2}$ = (Producto vectorial de los vectores independientes del plano π_2) =

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(0-2) - \mathbf{j}(0+2) + \mathbf{k}(1-1) = (-2, -2, 0).$$

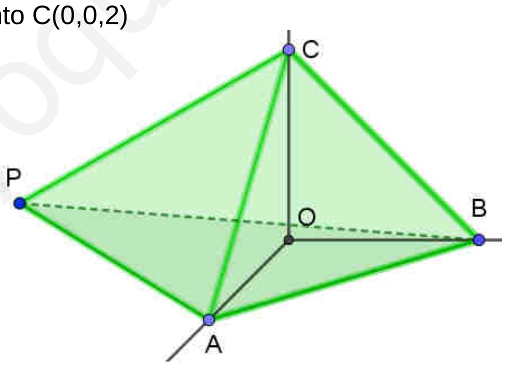
$\mathbf{n_1}\bullet\mathbf{n_2} = (2, 1, 1)\bullet(-2, -2, 0) = -4 - 2 = -6$; $\|\mathbf{n_1}\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$; $\|\mathbf{n_2}\| = \sqrt{2^2+2^2+0^2} = \sqrt{8}$;

Por tanto $\alpha = \arccos\left(\left|\dfrac{\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|}\right|\right) = \arccos\left(\left|\dfrac{-6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}}\right|\right) = \arccos\left(\dfrac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}}\right)$ **= arcos (√(3)/2) = 30º, que es el ángulo que forman los planos.**

(b)

Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto P(3, -3, 2) y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Veamos primero los puntos de corte del plano $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ con los ejes.
Corte con OX, $\pi_1 = 0$, $y = z = 0$, punto A(1,0,0)
Corte con OY, $\pi_1 = 0$, $x = z = 0$, punto B(0,2,0)
Corte con OZ, $\pi_1 = 0$, $x = y = 0$, punto C(0,0,2)



Sabemos que el volumen de un tetraedro de vértices A, B, C y P es un sexto del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **PA** = (-2, 3, -2), **PB** = (-3, 5, -2) y **PC** = (-3, 3, 0), es decir un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores: $V_{tetraedro} = \dfrac{1}{6}\cdot|[\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}]|$

$$\text{Tenemos } [\mathbf{PA}, \mathbf{PB}, \mathbf{PC}] = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (-2)(-3+6) = -6.$$

El volumen pedido es V = (1/6)·|-6| u^3 = 1 u^3.

7.- Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z \quad\quad = -3 \end{cases}$.

a) [1,5 puntos] Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.
b) [1 punto] Si a = 0 y b = 3, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto P(1, -1, -8) es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.
Solución
(a)
Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

Si la recta está contenida en el plano el producto escalar del vector normal del plano **n** y el director de la recta **v** han de ser cero (tienen que ser perpendiculares) y además un punto de la recta s, el B debe de verificar la ecuación del plano.

n = (Producto vectorial de los vectores independientes del plano π) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= **i**(-1-2a) -**j**(0-2) +**k**(0-1) = (-1-2a, 2, -1).

Ponemos $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$ en paramétricas con y = m $\in$ R, $s \equiv \begin{cases} x = (1-b) + 2m \\ y = m \\ z = -3 \end{cases}$. Un vector director de la recta s es **v** = (2, 1, 0), y un punto de la recta s es B = (1-b, 0, -3).

Como **n•v** = (-1-2a, 2, -1)•(2, 1, 0) = 0 = -2 – 4a + 2 + 0 = -4a = 0, **tenemos a = 0.**

Como B $\in \pi \rightarrow \begin{cases} 1 - b = -1 + \mu \\ 0 = 1 + \lambda \\ -3 = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$, de donde $\lambda = -1 \rightarrow -3 = 1 + 2(-1) - \mu$, luego $\mu = 2$ y entrando en la primera ecuación tenemos 1 – b = -1 + 2 = 1, **de donde b = 0.**
(b)
Si a = 0 y b = 3, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto P(1, -1, -8) es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

Si a = 0 y b = 3, tenemos $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$, por tanto el vector normal del plano es **n** = (Producto vectorial de los vectores independientes del plano π) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= **i**(-1-0) -**j**(0-2) +**k**(0-1) = (-1, 2, -1).

Un vector director de s es **v** = (2, 1, 0)

La recta r que me piden pasa por el punto P(1, -1, -8) y tiene por vector directo **u** = **n**x**v** (por ser paralela a π y perpendicular a la recta s), **u** = **n**x**v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(0+1) -**j**(0+2) + **k**(-1-4) = (1, -2, -5).

La recta pedida en vectorial es r $\equiv$ (1, -1, -8) + n·(1, -2, -5) con n $\in$ R.

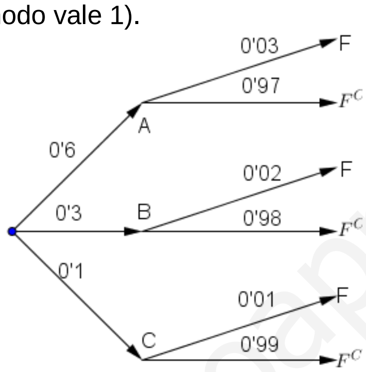
8.- a) En un servicio de emergencias el 60% de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30% con el naranja y el 10% con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3% en el caso de código amarillo, 2% en el naranja y 1% en el rojo. Si se recibe un aviso,
a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?
a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?
b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,
b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) [0,75 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?
Solución
(a)
En un servicio de emergencias el 60% de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30% con el naranja y el 10% con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3% en el caso de código amarillo, 2% en el naranja y 1% en el rojo. Si se recibe un aviso,
(a.1)
¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

Llamemos A, B, C, F y P^C, a los sucesos siguientes, “código amarillo”, “código naranja”, “código rojo”, "falsa alarma" y "no falsa alarma", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 60% = 0’6; p(B) = 30% = 0’3; p(C) = 10% = 0’1; p(F/A) = 3% = 0’03;
p(F/B) = 2% = 0’02, p(F/C) = 0’01, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Piden **p(falsa alarma) = p(F)**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Tenemos **p(falsa alarma) = p(F)** = p(A).p(F/A) + p(B).p(F/B) + p(C).p(F/C) =
= (0’6)·(0’03) + (0’3)·(0’02) + (0’1)·(0’01) **= 1/40 = 0’025**.
(a.2)
Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

Me piden **p(aviso código rojo o naranja si no ha sido falsa alarma) = p((B∪C)/F^C)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p((B\cup C)/F^C) =} \frac{p\left(B\cap F^C\right)+p\left(C\cap F^C\right)}{p(F^C)} = \frac{p(B)\cdot p(F^C/B) + p(C)\cdot p(F^C/C)}{1 - p(F)} = \frac{(0'3)\cdot 0'98 + (0'1)\cdot 0'99}{1 - 0'025} =$$

$$\mathbf{= 131/325 \cong 0'403077}.$$

(b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,
(b.1)
¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

Recordamos que si realizamos **n** veces (9) un experimento en el que podemos obtener éxito, F = aviso naranja, con probabilidad **p** (p(F) = 0’3) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0’3 = 0’7), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(9; 0’3)**.
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(9; 0’3)**.
En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (9\ sobre\ k)\cdot 0'3^k\cdot 0'7^{(9-k)} = \binom{9}{k}\cdot 0'3^k\cdot 0'7^{(9-k)}}.$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de “n”. En la calculadora “ n tecla **nCr** k “

Me piden p(X ≤ 2) = p(X = 0 + p(X = 1) + p(X = 2) =

$= \binom{9}{0} \cdot 0'3^{0} \cdot 0'7^{(9)} + \binom{9}{1} \cdot 0'3^{1} \cdot 0'7^{(8)} + \binom{9}{2} \cdot 0'3^{2} \cdot 0'7^{(7)}$ = 0’0403536 + 0’15566496 + 0’2668279 **= 0’462846.**

Utilizando la tabla **p(X ≤ 2)** = p(X = 0 + p(X = 1) + p(X = 2) = 0’0404 + 0’1556 + 0’2668 **= 0’4628.**

(b.2)

¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

Me piden p(Todos los avisos son amarillos o naranjas) = p(ninguno rojo)

Sea la variable Y = número de avisos rojos.

Es decir nuestra variable **Y sigue una binomial B(n;p)** = **B(9; 0’1)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

p(X = k) = (9 sobre k)· $\mathbf{0'1^{k} \cdot 0'9^{(9-k)}} = \binom{9}{k} \cdot \mathbf{0'1^{k} \cdot 0'9^{(9-k)}}$**.**

Nos piden p (Y = 0) = $\binom{9}{0} \cdot 0'1^{0} \cdot 0'9^{(9)}$ **= 0’38742049.**

Utilizando la tabla **p(Y = 0) = 0’3874.**