Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX=b$ según los valores del parámetro a
b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a=1$

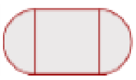
2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

3) Resuelva la ecuación matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$

5) Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4+\pi\ m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.

7) Dada la siguiente función $f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1)$

a) *(0,25 puntos)* Calcule el dominio de *f(x)*
b) *(1,75 puntos)* Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

8) *(2 puntos)* Calcule la siguiente integral: $\int x^3 e^{x^2} dx$

9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) (*1,25 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) (*0,75 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

10) (*2 puntos*) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) (*0,5 puntos*) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX=b$ según los valores del parámetro a
b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a=1$

a) A es la matriz de coeficientes del sistema.

$$|A|=\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix}=4a+2a(a-3)=4a+2a^2-6a=2a^2-2a$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-2a=0\Rightarrow 2a(a-1)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0\to a=1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $a\neq 0 \ y \ a\neq 1$

El determinante de A es no nulo, por lo que su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a=0$

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es 0 y su rango no es 3.
¿El rango de A es 2?
La columna 2ª es todo ceros, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 2ª columna y la 3ª fila (es proporcional a la 2ª) → $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=6-4=2\neq 0$. El rango de A es 2.

$$A/b=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A/b es 3?

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª → $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

con determinante $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+4+4-4+0-6=-2\neq 0$

El rango de A/b es 3.
Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/b.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a=1$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

El determinante de A es 0 y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La columna 1ª y la 3ª son proporcionales, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 3ª columna y la 1ª fila (es proporcional a la 2ª) → $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

$$A/b=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

¿El rango de A/b es 3?

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª (columna 1ª y 3ª son proporcionales) → $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2-2=0$. El rango de A/b no es 3.

Por lo que el rango de A/b es igual al rango de A que es 2 y menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado.

b) **C**uando $a=1$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 3). Lo resolvemos.

$$AX=b\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x\quad +4z=2\\ x\quad -2z=-1\\ -x+y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 1ª} = -2\cdot\text{Ecuación 2ª}\\ \text{Quito la ecuación 1ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x\quad -2z=-1\\ -x+y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\boxed{x=-1+2z}\\ -x+y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow 1-2z+y+2z=1\Rightarrow\boxed{y=0}$$

Las soluciones son $x=-1+2t;\quad y=0;\quad z=t$

2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Llamemos "x" al número de mascarillas quirúrgicas desechables, "y" al número de mascarillas higiénicas y "z" al número de mascarillas quirúrgicas reutilizables.

"*El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €*" → $\frac{x+y+z}{3}=0,90$

"*Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €*" → $30x+20y+10z=56$

"*Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €*" → $20x+25z=31$

Reunimos la información en un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y+z}{3}=0,90\\ 30x+20y+10z=56\\ 20x+25z=31\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2,7\\ 15x+10y+5z=28\\ 20x+25z=31\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª} - 15\cdot\text{Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr}15x & +10y & +5z & =28\\ -15x & -15y & -15z & =-40,5\\ \hline & -5y & -10z & =-12,5\end{array}\to\text{Nueva ecuación 2ª}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª} - 20\cdot\text{Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr}20x & & +25z & =31\\ -20x & -20y & -20z & =-54\\ \hline & -20y & +5z & =-23\end{array}\to\text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2,7\\ -5y-10z=-12,5\\ -20y+5z=-23\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª} - 4\cdot\text{Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrrr}-20y & +5z & = & -23\\ 20y & +40z & = & 50\\ \hline & 45z & = & 27\end{array}\to\text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2,7\\ -5y-10z=-12,5\\ 45z=27\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2,7\\ -5y-10z=-12,5\\ \boxed{z=\frac{27}{45}=0,6}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+0,6=2,7\\ -5y-6=-12,5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=2,1\\ -5y=-6,5\Rightarrow\boxed{y=\frac{6,5}{5}=1,3}\end{array}\right\}\Rightarrow x+1,3=2,1\Rightarrow\boxed{x=0,8}$$

La mascarilla desechable cuesta 0,8 €, la higiénica 1,3 € y la reutilizable 0,6 €.

3) Resuelva la ecuación matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Despejo X en la ecuación matricial.

$$XA+XA^t=B\Rightarrow X\left(A+A^t\right)=B\Rightarrow X=B\left(A+A^t\right)^{-1}$$

He supuesto que la matriz $A+A^t$ es invertible. Lo comprobamos.

$$A+A^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left|A+A^t\right|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0+1+1-2-0-2=-2\neq 0$$

Existe la inversa. Y la calculamos.

$$\left(A+A^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A+A^t\right)^T\right)}{\left|A+A^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A+A^t\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=B\left(A+A^t\right)^{-1}\Rightarrow X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0-1-1 & 0-1+1 & 0-1-3\\ -3+0-1 & -3+0+1 & 3+0-3\end{pmatrix}$$

$$X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}}$$

4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases}3x+y-4z+1=0\\2x+y-z+2=0\end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$

Llamamos π´ al plano que buscamos.
Si π´ contiene a la recta *r* contiene a cualquier punto P_r que pertenezca a la recta y tiene como vector director el director de la recta $\overrightarrow{v_r}$.
Si π´ es perpendicular al plano π el vector normal $\vec{n}$ del plano π es un vector director de π´.

$$r:\left.\begin{cases}3x+y-4z+1=0\\2x+y-z+2=0\\ \quad\text{Tomamos } x=1\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}3+y-4z+1=0\\2+y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4z-4\\y-z+4=0\end{cases}\Rightarrow 4z-4-z+4=0\Rightarrow 3z=0$$

$$\Rightarrow z=0\Rightarrow y=0-4=-4\Rightarrow P_r(1,-4,0)$$

$$r:\begin{cases}3x+y-4z+1=0\\2x+y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=(3,1,-4)\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix}i & j & k\\3 & 1 & -4\\2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-i-8j+3k-2k+3j+4i$$

$$\overrightarrow{v_r}=3i-5j+k=(3,-5,1)$$

Tenemos $P_r(1,-4,0)$ un punto de la recta *r* **y** $\overrightarrow{v_r}=(3,-5,1)$ un vector director de dicha recta.

Tenemos también el vector normal $\vec{n}=(2,-1,3)$ del plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$.

$$\pi´:\begin{cases}P_r(1,-4,0)\in\pi´\\ \vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(3,-5,1)\\ \vec{v}=\vec{n}=(2,-1,3)\end{cases}\Rightarrow\pi´:\begin{vmatrix}x-1 & y+4 & z\\3 & -5 & 1\\2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15x+15+2y+8-3z+10z-9y-36+x-1=0\Rightarrow\pi´: -14x-7y+7z-14=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\pi´: 2x+y-z+2=0}$$

5) Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}=1^{2/0}=1^{\infty}=\text{Indeterminación(número e)}$$

Tomo logaritmos en la expresión $L=\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

$$\ln L=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}\right)$$

Conmuta el ln con el límite, por ser la función continua.

$$\ln L=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{2/tg(x)}$$

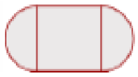
$$\ln L=\lim_{x\to 0}\frac{2}{tgx}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{tgx}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x}{1+x}=\frac{2}{1}=2$$

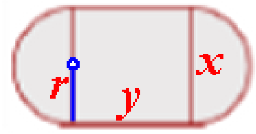
$$\ln L=2\Rightarrow L=e^2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}=e^2}$$

6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base **y** metros y altura **x** metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4+\pi\ m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle **x** e **y** de modo que se verifique este requisito.



El radio del semicírculo es la mitad del lado *x*, es decir, $r=\frac{x}{2}$.

La superficie del campo de juego es la suma del área del rectángulo ($x\cdot y$) y el área del circulo de radio *r* (πr^2 , hay dos semicírculos).

$$Superficie(x,y)=xy+\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=xy+\frac{\pi x^2}{4}$$

Como el área debe ser $4+\pi\ m^2$ tenemos que:

$$Superficie(x,y)=xy+\frac{\pi x^2}{4}=4+\pi\Rightarrow xy=4+\pi-\frac{\pi x^2}{4}\Rightarrow y=\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi x^2}{4x}\Rightarrow y=\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi x}{4}$$

Deseamos minimizar la longitud de las líneas a pintar.

$$L(x,y)=2x+2y+2\pi r=2x+2y+2\pi\frac{x}{2}=2x+2y+\pi x$$

Sustituimos y obtenemos.

$$\left.\begin{array}{l} L(x,y)=2x+2y+\pi x \\ y=\dfrac{4+\pi}{x}-\dfrac{\pi x}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow L(x)=2x+2\left(\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi x}{4}\right)+\pi x\Rightarrow$$

$$L(x)=2x+\frac{8+2\pi}{x}-\frac{\pi x}{2}+\pi x=2x+\frac{8+2\pi}{x}+\frac{\pi x}{2}=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)x+\frac{8+2\pi}{x}=\frac{\pi+4}{2}x+\frac{8+2\pi}{x}$$

Derivamos e igualamos a cero.

$$L(x)=\frac{\pi+4}{2}x+\frac{8+2\pi}{x}\Rightarrow L'(x)=\frac{\pi+4}{2}-\frac{8+2\pi}{x^2}$$

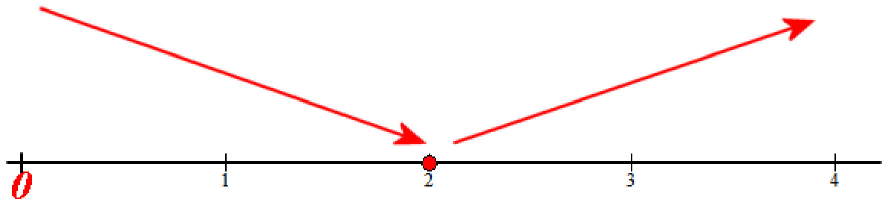
$$L'(x)=0\Rightarrow\frac{\pi+4}{2}-\frac{8+2\pi}{x^2}=0\Rightarrow(\pi+4)x^2-16-4\pi=0\Rightarrow(\pi+4)x^2=16+4\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{16+4\pi}{4+\pi}=\frac{4(4+\pi)}{4+\pi}=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Solo tiene sentido el valor positivo $x=2$.

- En $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $L'(1)=\frac{\pi+4}{2}-\frac{8+2\pi}{1}=-10,71<0$. La función decrece en $(0,2)$.

- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $L'(3)=\frac{\pi+4}{2}-\frac{8+2\pi}{9}=1{,}98>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.



La longitud a pintar tiene un mínimo en x = 2.

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=\frac{4+\pi}{x}-\frac{\pi x}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{4+\pi}{2}-\frac{2\pi}{4}=\frac{8+2\pi-2\pi}{4}=2$$

El campo con longitud mínima a pintar es un cuadrado de lado 2 y dos semicírculos de radio 1.

7) Dada la siguiente función $f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1)$

a) (0,*25 puntos)* Calcule el dominio de *f(x)*

b) *(1,75 puntos)* Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan o hacen negativo *x + 1*, pues no existe el logaritmo de un número negativo o cero.

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1$$

Dominio = $(-1,+\infty)$

b) Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x)=\frac{-x^2}{2}+2\ln(x+1) \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{2}+2\frac{1}{x+1}=-x+\frac{2}{x+1}=\frac{-x^2-x+2}{x+1}$$

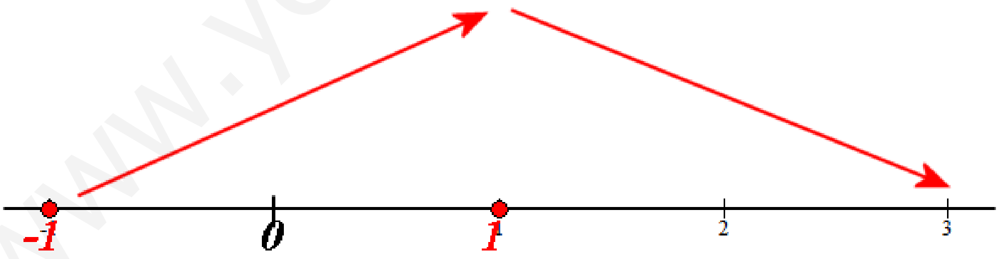
$$f'(x)=\frac{-x^2-x+2}{x+1}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-x+2}{x+1}=0 \Rightarrow -x^2-x+2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases}\frac{1+3}{-2}=-1=x\\ \frac{1-3}{-2}=1=x\end{cases}$$

Como el dominio es $(-1,+\infty)$ solo nos sirve el valor *x = 1*.

Vemos cómo evoluciona la función antes y después de este valor.

- En $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{2}{1}>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{-4-2+2}{2+1}=-\frac{4}{3}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.



La función crece en $(-1,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.

8) *(2 puntos)* Calcule la siguiente integral: $\int x^3 e^{x^2} dx$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int x^3 e^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int x^2 e^t dt = \frac{1}{2}\int te^t dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = t \to du = dt \\ dv = e^t dt \to v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\left(te^t - \int e^t dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(te^t - e^t \right) = \{\text{Deshacemos el cambio}\} = \boxed{\frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + K}$$

9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) (*1,25 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) (*0,75 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Dispone de móvil	No dispone de móvil	TOTALES
Dispone de ordenador	**10**		**80**
No dispone de ordenador			
TOTALES	**15**		**100**

Completamos la tabla.

	Dispone de móvil	No dispone de móvil	TOTALES
Dispone de ordenador	**10**	**70**	**80**
No dispone de ordenador	**5**	**15**	**20**
TOTALES	**15**	**85**	**100**

Utilizamos la regla de Laplace para responder a las preguntas.

a)

$$P\left(\text{Dispone de alguno o ambos dispositivos}\right)=\frac{10+70+5}{100}=\boxed{\frac{85}{100}=0{,}85}$$

b)

$$P\left(\text{No dispone de ninguno de los dispositivos}\right)=\boxed{\frac{15}{100}=0{,}15}$$

10) (*2 puntos*) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) (*0,5 puntos*) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

X = Tiempo (minutos) que tarda en llegar a la universidad.

X es una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

X = N(30, 5)

a)

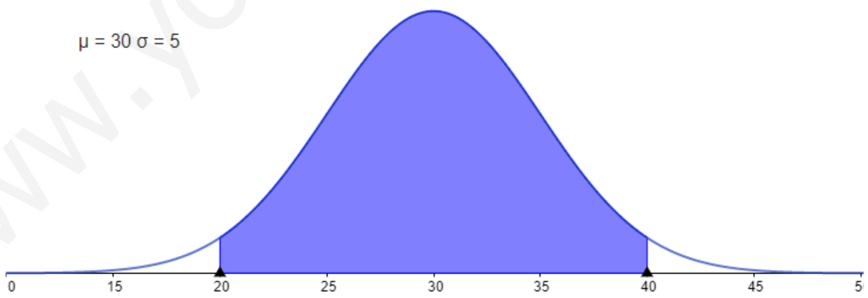
$$P(X \le 40) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{40-30}{5}\right) = P(Z \le 2) = \boxed{0{,}9772}$$

b)

$$P(20 \le X \le 40) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{20-30}{5} \le Z \le \frac{40-30}{5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - P(Z \ge 2) = P(Z \le 2) - (1 - P(Z \le 2)) =$$

$$= 0{,}9772 - 1 + 0{,}9772 = \boxed{0{,}9544}$$



c) Es la probabilidad de que tarde más de 40 minutos en llegar.

$$P(X \ge 40) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \ge \frac{40-30}{5}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0{,}9772 = \boxed{0{,}0228}$$