Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JULIO DE 2020
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

Preguntas elegidas (indique un máximo de 5, antes de entregar el examen):
…………………………………………………
(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3=I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

3) Resuelva el sistema matricial $\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

4) Se considera la recta $r\equiv\begin{cases} x+\quad z=1 \\ 2x+y\quad =3 \end{cases}$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y que pasa por el punto (0,0,1).

b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$
Sabiendo que $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

5) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-senx\right)^{1/x^3}\right)$$

6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

7) Se considera la siguiente función $f(x)=\ln(2x+1)$

a) (*1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa $x=\dfrac{1}{2}$

8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx$

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

a) (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

b) (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

b) (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

SOLUCIONES

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

Consideramos la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix}=m-1+4+m^2+m-2m^2+2-1-2m=-m^2+4$

Igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow -m^2+4=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\sqrt{4}=\pm 2$$

Distinguimos 3 casos diferentes.

CASO 1. $m\neq -2$ *y* $m\neq 2$

En este caso el determinante de *A* es no nulo y su rango es 3. El rango de *A/B* también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m=-2$

El determinante de *A* es cero, por lo que el rango de *A* no es 3.

¿El rango de *A* es 2?

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 1ª fila y 1ª columna → $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3+4=1\neq 0$

El rango de *A* es 2

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Con determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2+2-6+8+3-1=4\neq 0$

El rango de *A/B* es 3

Como Rango de *A* = 2 ≠ 3 = Rango de *A/B* **el sistema es incompatible**.

CASO 3. $m=2$

El determinante de A es cero, por lo que el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ Como las filas 1ª y 2ª son iguales, tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-4=-3\neq 0$

El rango de A es 2

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ Como la columna 1ª y 2ª son iguales, tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Con determinante $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2+6+2-8+3-1=0$

El rango de *A/B* no es 3. Por lo que el rango de *A/B* es 2.

Rango de A = Rango de *A/B* = 2 < 3 = número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3=I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

a) Calculamos $A\cdot B^t$ y comprobamos si es invertible.

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+3 & 1+0+3\\ 0+0+1 & -1+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$ La matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa.

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}}{-4}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

b)

$$C^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Queda demostrado que $C^3=I$

Como $C^3=I$, descomponemos el exponente en potencias de exponente 3.

$$C^{16}=C^3\cdot C^3\cdot C^3\cdot C^3\cdot C^3\cdot C=I\cdot I\cdot I\cdot I\cdot I\cdot C=C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

3) Resuelva el sistema matricial $\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=2Y+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left[2Y+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right]+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4Y+\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ 2x + y \quad = 3 \end{cases}$

a) (*1,25 puntos*) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).

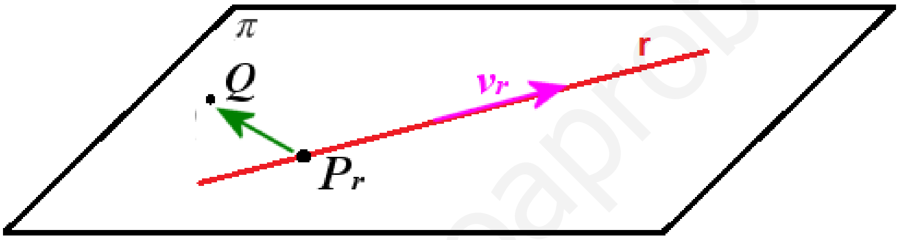
b) (*0,75 puntos*) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$ Sabiendo que $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

a) Obtenemos el vector director de la recta y un punto de la misma.

$$r \equiv \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ 2x + y \quad = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ 2(1-z) + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ 2 - 2z + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 1 + 2z \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 1 + 2z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,1,0) \\ \vec{v_r} = (-1,2,1) \end{cases}$$

Si llamamos al punto Q(0,0,1). El plano pedido tiene como vectores directores el de la recta $\vec{v_r} = (-1,2,1)$ y $\overrightarrow{P_rQ} = (0,0,1) - (1,1,0) = (-1,-1,1)$.



$$\left.\begin{array}{l} Q(0,0,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{P_rQ} = (-1,-1,1) \\ \vec{v} = \vec{v_r} = (-1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y - 2z + 2 - z + 1 + y - 2x = 0$$

$$\pi \equiv -3x - 3z + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi \equiv x + z - 1 = 0}$$

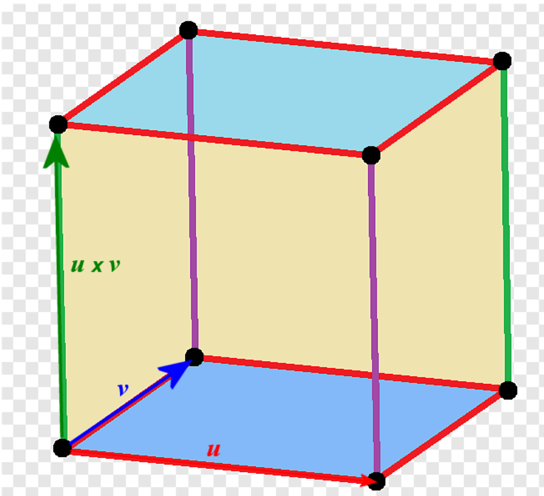
b) El volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores es el valor absoluto de su producto mixto.

$$Volumen = \left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\right]\right| = \left|\left[\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}\right]\right| = \left|\vec{u}\times\vec{v}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\right| = \left|(-1,1,1)\cdot(-1,1,1)\right| = |1+1+1| = 3\,u^3$$

Otro enfoque posible es:

El volumen es el área de la base que es el módulo de $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$ que vale $\sqrt{3}\,u^2$ por la altura que también es el módulo de $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$.

Volumen = $\sqrt{3}\sqrt{3} = 3\,u^3$



5) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-senx\right)^{1/x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+x-senx\right)^{1/x^3}\right)=\left(\left(1+0-sen0\right)^{1/0^3}\right)=1^{\infty}=\text{Indeterminación}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\left[\left(1+x-senx\right)-1\right]}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\left[x-senx\right]}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{x-senx}{x^3}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=\text{Indeterminación}\left(L\acute{}Hôpital\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=\text{Indeterminación}\left(L\acute{}Hôpital\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{6x}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=\text{Indeterminación}\left(L\acute{}Hôpital\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{6}}=e^{\frac{1}{6}}=\boxed{\sqrt[6]{e}}$$

6) Se considera la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

El dominio de la función son todos los reales menos los que anulan el denominador.
$1-e^{-x}=0\Rightarrow e^{-x}=1\Rightarrow x=0$
El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

Veamos si x = 0 es asíntota.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{0}{1}=0$$

No es asíntota. No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

Analizamos el comportamiento en $\pm\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{+\infty}{1-e^{-\infty}}=\frac{+\infty}{1-0}=+\infty$$

No hay asíntota en $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-e^{-x}}=\frac{+\infty}{1-e^{+\infty}}=\frac{+\infty}{-\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=\frac{2}{-\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota en $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No hay asíntota oblicua en $-\infty$, pues hay asíntota horizontal.
Comprobamos si la hay en $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{1-e^{-x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\left(1-e^{-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-e^{-x}}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

No hay asíntota oblicua.

7) Se considera la siguiente función $f(x)=\ln(2x+1)$

a) (*1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) *(0,75 puntos)* Halle la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa $x=\frac{1}{2}$

a) El dominio de la función $f(x)=\ln(2x+1)$ son todos los valores que hacen que $2x+1>0$.

$$2x+1>0\Rightarrow 2x>-1\Rightarrow x>\frac{-1}{2}$$

El dominio es $\left(\frac{-1}{2},+\infty\right)$

Para el crecimiento obtenemos su derivada y la igualamos a cero para encontrar los puntos críticos.

$$f(x)=\ln(2x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{2x+1}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2}{2x+1}=0\Rightarrow 2=0$$

No tiene puntos críticos, por lo que no hay cambio de crecimiento a decrecimiento o viceversa.

Probamos en un punto cualquiera del dominio, por ejemplo $x=0\Rightarrow f'(0)=\frac{2}{0+1}=2>0$.

La función crece en su dominio $\left(\frac{-1}{2},+\infty\right)$.

b)

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)=\ln 2 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{2\left(\frac{1}{2}\right)+1}=\frac{2}{2}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow y-\ln 2=1\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \boxed{y=x-\frac{1}{2}+\ln 2}$$

8) Calcule la siguiente integral: $\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx$

$$\int\left(\sqrt{x}\cdot\ln^2 x\right)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln^2 x\to du=2\ln x\frac{1}{x}dx=\frac{2\ln x}{x}dx\\ dv=\sqrt{x}dx\to v=\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln^2 x-\int\frac{2\ln x}{x}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln^2 x-\frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx=$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^{\frac{1}{2}}dx\to v=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\int\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\frac{1}{x}dx\\ \int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{2}{3}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}\end{array}}$$

$$=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln^2 x-\frac{4}{3}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}\right)=\boxed{x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\ln^2 x}{3}-\frac{8\ln x}{9}+\frac{16}{27}\right)+C}$$

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

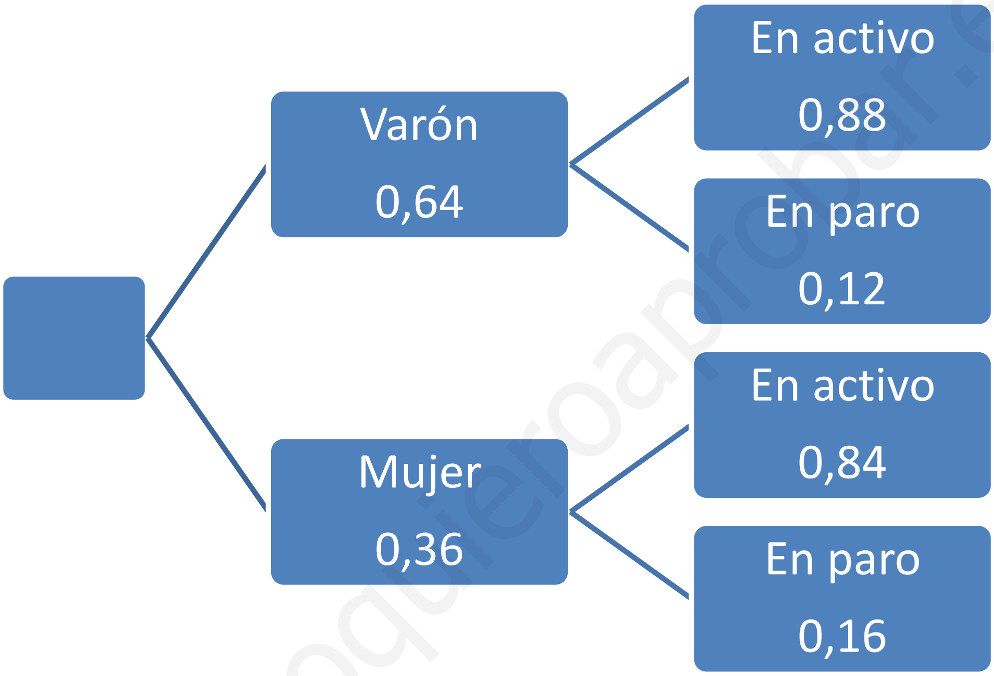
a) (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

b) (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

Construyamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada.



a) P(Ser mujer y estar en el paro) = 0,36 · 0,16 = $\boxed{0{,}0576}$

b) P(Estar en el paro) = 0,64 · 0,12 + 0,36 · 0,16 = $\boxed{0{,}1344}$

c) $P(\text{Sea mujer/ Está en el paro}) = \dfrac{P(\text{Sea mujer } \cap \text{ Está en el paro})}{P(\text{Está en el paro})} = \dfrac{0{,}0576}{0{,}1344} = \boxed{0{,}429}$

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

b) (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

X = número de estudiantes que abandonan los estudios de 5 elegidos al azar.
P(un estudiante abandone los estudios) = 1/5 = 0,2 = p
Como las elecciones son independientes tenemos una distribución binomial.
X es una distribución binomial con parámetros $n = 5$ y $p = 0.2$.
X = B(5, 0.2)

a)

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 + \binom{5}{1} 0.2^1 \cdot 0.8^4 =$$

$$= 0.8^5 + 5 \cdot 0.2 \cdot 0.8^4 = \boxed{0.7373}$$

b)

Por lógica es más probable que ninguno abandone los estudios pues hay 1 de cada 5 que abandona y 4 de cada 5 que no abandona.

Calculamos la P(X = 0) que es la probabilidad de que ninguno abandone los estudios y la P(X = 5) que es la probabilidad de que todos abandonen los estudios.

$$\left.\begin{array}{l} P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^5 = 0.8^5 = 0.32768 \\ P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.2^5 \cdot 0.8^0 = 0.2^5 = 0.00032 \end{array}\right\} \text{Es más probable que no abandone ninguno.}$$