PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi} x sen^2(x)dx$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX=B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ m & 4 & -2\\ 0 & m+2 & -3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}2\\ 2m\\ 1\end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m=-2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi\equiv x-y+az=0$ y la recta $r\equiv\begin{cases}4x-3y+4z=1\\ 3x-2y+z=0\end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r. **(1.5 puntos)**
b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,2,3)$. **(1 punto)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ 1-x\ln x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b. **(1.75 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x|$ y $g(x)=x^2-2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

a) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I|=0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**

b) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I)X=0$. ¿Existe alguna solución tal que $z=1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi\equiv x-y+z=2$ y la recta $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre r y π. **(1 punto)**

b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. **(1.5 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

$$f(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right)\Rightarrow f'(x)=e^x\left(x^2-5x+6\right)+e^x\left(2x-5\right)=e^x\left(x^2-5x+6+2x-5\right)$$
$$f''(x)=e^x\left(x^2-3x+1\right)+e^x\left(2x-3\right)=e^x\left(x^2-3x+1+2x-3\right)$$
$$f''(x)=e^x\left(x^2-x-2\right)$$
$$f'''(x)=e^x\left(x^2-x-2\right)+e^x\left(2x-1\right)=e^x\left(x^2-x-2+2x-1\right)=e^x\left(x^2+x-3\right)$$

Igualamos a cero la derivada segunda para encontrar los puntos de inflexión.

$$f''(x)=0\Rightarrow e^x\left(x^2-x-2\right)=0\Rightarrow\begin{cases} e^x=0\Rightarrow \text{¡No es posible!} \\ x^2-x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{2}=\dfrac{1\pm3}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{2}=2=x\\ \dfrac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}\end{cases}$$

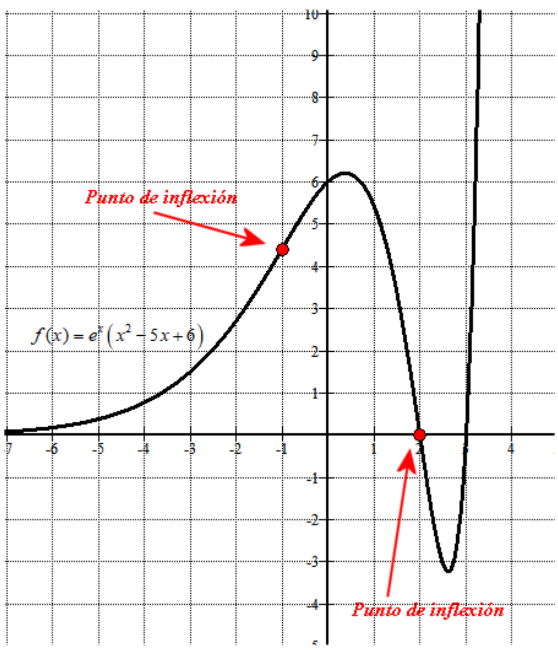
Valoramos estos valores obtenidos en la derivada tercera para ver si su valor es nulo o no.

$f'''(2)=e^2\left(2^2+2-3\right)=3e^2\neq0$ → $x = 2$ es punto de inflexión.

$f'''(-1)=e^{-1}\left((-1)^2-1-3\right)=-3e^{-1}\neq0$ → $x = -1$ es punto de inflexión.

Estudiamos el cambio de signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ la derivada segunda $f''(-2)=e^{-2}\left((-2)^2+2-2\right)=4e^{-2}>0$ es positiva y en $(-\infty,-1)$ la gráfica es convexa ($\cup$).
- En $(-1,2)$ tomamos $x = 0$ la derivada segunda $f''(0)=e^0\left(0^2-0-2\right)=-2<0$ es negativa y en $(-1,2)$ la gráfica es cóncava ($\cap$).
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ la derivada segunda $f''(3)=e^3\left(3^2-3-2\right)=4e^3>0$ es positiva y en $(2,+\infty)$ la gráfica es convexa ($\cup$).



<u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi} xsen^2(x)dx$.

$$\int_0^{\pi} xsen^2(x)dx = \ldots$$

$$\underline{\left|\int xsen^2(x)dx\right.} = \int xsen(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = \left\{\begin{array}{c}\text{Integración por partes}\\ u = xsenx \Rightarrow du = \left(senx + x\cos x\right)dx \\ dv = senxdx \Rightarrow v = \int senxdx = -\cos x\end{array}\right\} =$$

$$= xsenx\left(-\cos x\right) - \int\left(-\cos x\right)\left(senx + x\cos x\right)dx = -xsenx\cos x + \int\left(\cos xsenx + x\cos^2 x\right)dx =$$

$$= -xsenx\cos x + \int \cos xsenxdx + \int x\cos^2 xdx = -xsenx\cos x + \frac{sen^2 x}{2} + \int x\left(1 - sen^2 x\right)dx =$$

$$= -xsenx\cos x + \frac{sen^2 x}{2} + \int xdx - \int xsen^2 xdx = \underline{-xsenx\cos x + \frac{sen^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} - \int xsen^2 xdx\Big|}$$

En la igualdad obtenida despejamos y obtenemos ....

$$\underline{\left|\int xsen^2(x)dx\right.} = \underline{-xsenx\cos x + \frac{sen^2 x}{2} + \frac{x^2}{2} - \int xsen^2 xdx\Big|}$$

$$2\int xsen^2(x)dx = -xsenx\cos x + \frac{sen^2 x}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$\int xsen^2(x)dx = \frac{-xsenx\cos x}{2} + \frac{sen^2 x}{4} + \frac{x^2}{4} + K$$

$$\ldots = \left[\frac{-xsenx\cos x}{2} + \frac{sen^2 x}{4} + \frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{-\pi sen\pi\cos\pi}{2} + \frac{sen^2\pi}{4} + \frac{\pi^2}{4}\right] - \left[\frac{-0\cdot sen0\cos 0}{2} + \frac{sen^2 0}{4} + \frac{0^2}{4}\right] = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

<u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ m & 4 & -2\\ 0 & m+2 & -3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}2\\ 2m\\ 1\end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1.5 puntos)**

b) Para $m=-2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

a) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ m & 4 & -2\\ 0 & m+2 & -3\end{vmatrix}=-12+m^2+2m-6m+2m+4=m^2-2m-8$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0\Rightarrow m^2-2m-8=0\Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{2+6}{2}=4=m\\[2mm] \dfrac{2-6}{2}=-2=m\end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones que discutimos por separado.

CASO 1. $m\neq -2\ y\ m\neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m=-2$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\quad A/B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Como la fila 2ª es proporcional a la 1ª y la columna 2ª es proporcional a la 1ª, considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix}4 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-12\neq 0.$$

El rango de A es 2.

¿El rango de A/B es 3?

Como la columna 2ª es proporcional a la 1ª considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna → $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 4 & -2 & -4\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ 4 & -2 & -4\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}=4-24-4+24=0$

El rango de A/B no es 3 y por lo tanto es igual al rango de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < Nº de incógnitas = 3.

El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $m=4$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & 4 & -2\\ 0 & 6 & -3\end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 4 & 4 & -2 & 8\\ 0 & 6 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Como la columna 2ª es proporcional a la 3ª, considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=4+8=12\neq 0$.

El rango de A es 2.

¿El rango de A/B es 3?

Como la columna 2ª es proporcional a la 3ª considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna → $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & -2 & 8\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & -2 & 8\\ 0 & -3 & 1\end{vmatrix}=-2-24-4+24=-6\neq 0$

Rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B

El sistema es incompatible.

b) Para $m=-2$ el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Hallamos la expresión de estas soluciones.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow\begin{cases}x-2y+z=2\\ -2x+4y-2z=-4\\ -3z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y+z=2\\ -2x+4y-2z=-4\\ \boxed{z=-\dfrac{1}{3}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y-\dfrac{1}{3}=2\\ -2x+4y+\dfrac{2}{3}=-4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x-6y-1=6\\ -6x+12y+2=-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-6y=7\\ -6x+12y=-14\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª} = -2\cdot\text{Ecuación 1ª}\\ \text{Quito Ecuación 2ª}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-6y=7\Rightarrow\boxed{x=\frac{7+6y}{3}}$$

¿Existe alguna solución con $z=0$? NO, pues $z=-\dfrac{1}{3}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla *a* sabiendo que π es paralelo a *r*. **(1.5 puntos)**
b) Determina el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto *P(1,2,3)*. **(1 punto)**

a) Si la recta *r* es paralela al plano π se cumple que vector director de recta y normal del plano son perpendiculares y el producto escalar de ambos debe ser 0.

Vector normal del plano → $\pi \equiv x - y + az = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, a)$

Vector director de la recta → $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r} = (4, -3, 4) \times (3, -2, 1)$

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 12j - 8k + 9k - 4j + 8i = 5i + 8j + k = (5, 8, 1)$$

Producto escalar es cero → $\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (5, 8, 1)(1, -1, a) = 5 - 8 + a = -3 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

Para *a = 3* el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.
Compruebo que la recta no está contenida en el plano viendo que un punto cualquiera de la recta no está en el plano.

$$r \equiv \left.\begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ z = -3x + 2y \end{cases} \Rightarrow 4x - 3y + 4(-3x + 2y) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 3y - 12x + 8y = 1 \Rightarrow -8x + 5y = 1; \text{ tomo } \boxed{x = 3} \Rightarrow -24 + 5y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 25 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow z = -9 + 10 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

Un punto de la recta es *A(3, 5, –1)*. Veamos si pertenece al plano y cumple su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} ¿A(3, 5, -1) \in \pi? \\ \pi \equiv x - y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿3 - 5 - 3 = 0?$$

La respuesta es NO. Recta y plano son paralelos para *a = 3*.

b) El plano π´ perpendicular a la recta *r* debe tener como vector normal el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} P(1, 2, 3) \in \pi' \\ \vec{n'} = \vec{v_r} = (5, 8, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} P(1, 2, 3) \in \pi' \\ \pi': 5x + 8y + z + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 + 16 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -24$$

$$\boxed{\pi': 5x + 8y + z - 24 = 0}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ 1-x\ln x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano)
a) Determina los valores de *a* y *b*. **(1.75 puntos)**
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.
(0.75 puntos)

a) Si es derivable también es continua, y debe serlo en *x = 1* que es punto en el que cambia de definición.

- Existe $f(1)=1-1\cdot\ln 1=1$
- Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$. Calculo los límites laterales y deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{2ax-4b}=e^{2a-4b} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(1-x\ln x\right)=1-0=1 \end{array}\right\}\Rightarrow e^{2a-4b}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a-4b=0\Rightarrow 2a=4b\Rightarrow \boxed{a=2b}$$

- Ambos valores deben ser iguales. $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

Las tres condiciones se cumplen cuando *a = 2b*.

Nuestra función queda con esta expresión: $f(x)=\begin{cases} e^{4bx-4b} & si \quad x<1 \\ 1-x\ln x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

Para que sea derivable en *x = 1* sus derivadas laterales deben ser iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{4bx-4b}\left(2a\right)=4b\cdot e^{4bx-4b} & si \quad x<1 \\ -\ln x-x\dfrac{1}{x}=-1-\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=4b\cdot e^{4b-4b}=4b\cdot e^0=4b \\ f'(1^+)=-1-\ln 1=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow 4b=-1\Rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{4}}$$

Como $a=2b\Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}}$

b) La función queda con la expresión $f(x)=\begin{cases} e^{-x+1} & si \quad x<1 \\ 1-x\ln x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

La tangente a *f(x)* en *x = 2* tiene la expresión $y-f(2)=f'(2)\left(x-2\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=1-2\ln 2 \\ f'(2)=-1-\ln 2 \end{array}\right\}\Rightarrow y-1+2\ln 2=\left(-1-\ln 2\right)\left(x-2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-1+2\ln 2=\left(-1-\ln 2\right)x+2+2\ln 2\Rightarrow \boxed{y=\left(-1-\ln 2\right)x+3}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

a)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos cuando $f(x) = g(x) \Rightarrow |x| = x^2 - 2$:

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 = x \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 = x \text{ No es válida, } -1 < 0 \end{cases}$$

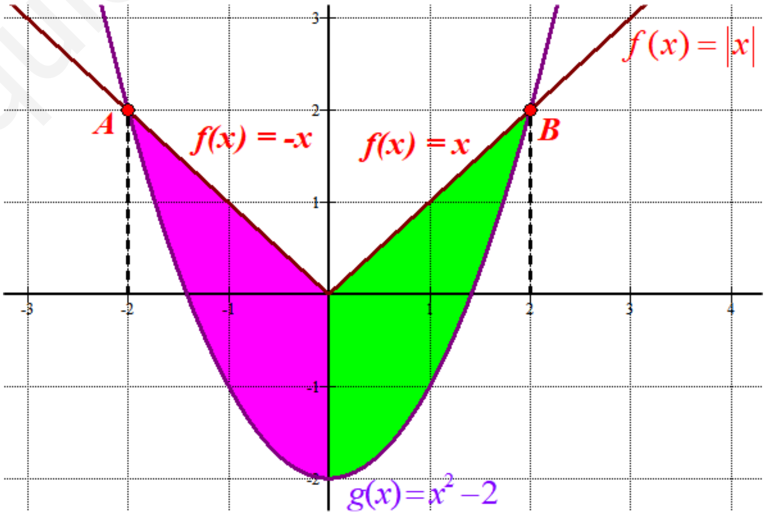
$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow -x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 = x, \text{No es válida. } 1 > 0 \\ \dfrac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas de estos dos puntos de corte.

$x = -2 \to f(-2) = |-2| = 2 \Rightarrow A(-2, 2)$

$x = 2 \to f(2) = |2| = 2 \Rightarrow B(2, 2)$



b) Por la simetría del recinto calculamos solo el área de la parte verde y el área total será el doble de lo hallado.

$$\text{Área de recinto verde} = \int_0^2 x - (x^2 - 2)\,dx = \int_0^2 x - x^2 + 2dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 4\right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} + 0\right] = 2 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{\textbf{Área} = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} = 6,66\, u^2}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

a) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I|=0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**

b) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I)X=0$. ¿Existe alguna solución tal que $z=1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

a)

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&3\\0&-\lambda&2\\0&1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\0&-\lambda&2\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\lambda(1-\lambda)(1-\lambda)-2(1-\lambda)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda)-2\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)\left[-\lambda+\lambda^2-2\right]=0\Rightarrow\begin{cases}1-\lambda=0\Rightarrow\lambda=1\\[2ex]\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{2}=2=\lambda\\[1ex]\dfrac{1-3}{2}=-1=\lambda\end{cases}\end{cases}$$

Los valores de λ son $\lambda=1;\ \lambda=-1;\ \lambda=2$.

b) $A-I=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$

$$(A-I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&2&3\\0&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2y+3z=0\\-y+2z=0\\\boxed{y=0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}3z=0\\2z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{z=0}$$

Las soluciones del sistema son $x=t;\ y=z=0$.

No hay ninguna solución con $z=1$.

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**

Considera el plano $\pi \equiv x-y+z=2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre *r* y π. **(1 punto)**
b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a *r*. **(1.5 puntos)**

a) Hallamos primero la posición relativa de recta y plano.

$$\pi \equiv x-y+z=2 \Rightarrow \vec{n}=(1,-1,1)$$

$$r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,-1,-2) \\ \overrightarrow{v_r}=(2,1,-1) \end{cases}$$

Calculamos el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano.

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)(2,1,-1)=2-1-1=0$$

Recta y plano son paralelos o coincidentes.
Comprobamos si el punto $P_r(0,-1,-2)$ pertenece al plano $\pi \equiv x-y+z=2$.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_r(0,-1,-2)\in\pi ? \\ \pi \equiv x-y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0+1-2=0?$$

No es cierto. Recta y plano son paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,-1,-2) \\ \pi \equiv x-y+z-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|0+1-2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{3}=1.732\,u}$$

b) El plano π´ perpendicular a π tiene como uno de sus vectores directores el normal del plano π. El otro vector director es el director de la recta *r* ya que la contiene. Y un punto del plano π´ es $P_r(0,-1,-2)$, pues contiene a la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,-1,-2) \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi´: \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$x+2y+2+z+2+2z+4+y+1-x=0$$

$$3y+3z+9=0$$

$$\boxed{\pi´: y+z+3=0}$$