1.

Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -\lambda x + \ y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + \ y + z = 1 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resuelve el sistema para λ = 0

Solución:

a) Sean las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A = \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$|C| = -\lambda^2 + \lambda + 1 - \lambda^2 + \lambda - 1 = -2\lambda^2 + 2\lambda \Rightarrow -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \ \lambda = 1$

Para todo valor $\lambda \neq 0,\ \ \lambda \neq 1 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

$$\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow R\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$R(C) = R(A) = 2 < 3$ = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado.

Para $\lambda = 1$

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 1^a+2^a \\ 1^a+3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2^a+3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Es el caso en que $\lambda = 0$, pasando de la última matriz al sistema se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{array}\right\} \quad y = 1 - z \ ;\ x = 2 - z$$

En paramétricas: $x = 2 - \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$

2.

Enunciado

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Obtén los valores del número real a para los que A tiene matriz inversa.

b) Halla, si es posible, la matriz inversa de A en el caso $a = 0$

Solución:

a) A posee inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2,\ a = 1$$

Por tanto A posee matriz inversa si $a \neq -2$ y $a \neq 1$

b) Para $a = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3.
Enunciado
Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + mz = m - 1 \\ x + (m+1)y + (2m+1)z = m \quad , m \in R \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Estudia para los distintos valores del parámetro m y resuélvelo cuando sea compatible (calcula todas sus soluciones.)
Solución:
Discusión:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 2m+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 2m+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$m = 1$, $m = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & m-1 \\ 1 & m+1 & 2m+1 & m \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Para $m \neq -1$, $m \neq 1$ $\Rightarrow R(C) = R(A) =$ n.º de incógnitas $= 3$, sistema compatible determinado.

b) Para $m = -1$, se estudiamos los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R(A) = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a + 1^a \end{matrix} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(C) = 2 = R(A) = 2 < 3$, sistema compatible indeterminado.

El sistema equivalente es $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = -3 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

La solución implícita es $x - z = 3$, $y = 1/2$

La solución paramétrica es $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$

c) Para m = 1, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R(A)=R\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\1&2&3&1\\-1&-2&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\2^a-1^a\\3^a+2^a\end{array}=R\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&4&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\3^a-2\cdot2^a\end{array}=R\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3$, sistema incompatible.

4.

Enunciado

Si B es una matriz cuadrada de dimensión 3 × 3 cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de $5B$ y el de B^2

Solución:

Determinante de $5B$:

Multiplicar una matriz por un número supone multiplicar todos los elementos de la matriz por dicho número.

Si multiplicamos una fila (o columna) de una matriz por un número k, el determinante se multiplica también por ese número.

Utilizando las dos afirmaciones anteriores, en nuestro caso, multiplicar por 5 la matriz implica multiplicar las 3 filas de la matriz B por 5, por tanto, su determinante se multiplicará tres veces (una vez por cada una de las filas) por 5:

$$|5\cdot B|=5^3\cdot|B|=125\cdot 4=500$$

Determinante de B^2:

Sabemos que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, por tanto, como $B^2 = B \cdot B$, tenemos:

$$|B^2|=|B\cdot B|=|B|\cdot|B|=4\cdot 4=16$$

5.

Enunciado

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}4&5\\-3&-4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases}2X+3Y=A\\X+Y=B\end{cases}$

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n\in N$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B)

Solución:

a) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\begin{cases}2X+3Y=A\\X+Y=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2X+3Y=A\\-2X-2Y=-2B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y=A-2B\\X=3B-A\end{cases}$$

Sustituyendo:

$$X=3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&5\\-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2\\6&4\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}4&5\\-3&-4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\-5&-4\end{pmatrix}$$

b) $B^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$ siendo I = Matriz identidad de orden 2.

Como $B^2 = I \Rightarrow B$ es una matriz cíclica de orden 2, por tanto las potencias pares dan de resultado la matriz identidad $I_{2\times 2}$ y las potencias impares la matriz B

Seguimos calculando las potencias: $B^3=B^2\cdot B=I\cdot B=B$

$$B^n=\begin{cases}B \text{ si } n \text{ es impar}\\I \text{ si } n \text{ es par}\end{cases}\quad\text{donde } n\in N$$

6.
Enunciado
Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda z = 2 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

Se pide:
a) Discute el sistema según los valores del parámetro λ
b) Resuelve el sistema para λ = 1
Solución:
a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes C

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\lambda \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq 0$ rango de C = rango A = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si λ = 0, se obtiene rango C = 2 ≠ rango A = 3 ⇒ sistema incompatible.

b) Si λ = 1 el sistema quedaría: $\begin{cases} x + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$ cuya solución se puede calcular por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

7.
Enunciado
Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

se pide:
a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A(A - 2I)$
b) Justifica razonadamente que
b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A - 2I$
b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A - I$
c) Determina el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$

Solución:

a) Cálculo de las matrices:

$$A-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow (A-I)^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A(A-2I)=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I$$

b) Razonamientos:

b.1) Existencia de las matrices inversas:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{vmatrix}=-12-6-6+9+12+4=1\neq 0\Rightarrow A \text{ es regular y tiene inversa.}$$

$$\det(A-2I)=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{vmatrix}=-6-6+3+8=-1\neq 0\Rightarrow\ A-2I \text{ es regular y tiene inversa.}$$

b.2) No existe matriz inversa ya que dicha matriz tiene todas sus filas iguales y por tanto su determinante es nulo e indica que dicha matriz es singular.

c) Determinación del valor del parámetro real λ

En primer lugar calculamos la matriz inversa de A:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&-1&-2\\3&3&4\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&-1&-2\\3&3&4\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda=-1$$

8.

Enunciado

Calcula las matrices de la forma $X=\begin{pmatrix}x&1\\y&0\end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $X\cdot X^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, donde X^t es la matriz traspuesta de X

Solución:

$$X^t=\begin{pmatrix}x&y\\1&0\end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix}x&1\\y&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+1&xy\\xy&y^2\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases}x^2+1=1\\xy=0\\y^2=1\end{cases}$

Obtendríamos dos pares de soluciones $x = 0$, $y = -1$ e $x = 0$, $y = 1$

Por lo tanto las matrices pueden ser $X=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ o $X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

9.

Enunciado

a) Sean C_1, C_2, C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con $det(M) = 4$. Calcula, enunciando las propiedades de determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $-C_2$, $2C_1-C_3$, C_2+C_3

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos los valores de a y b para los que $A^{-1} = A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A

Solución:

a) Utilizamos las propiedades de los determinantes para obtener el valor del segundo en función del primero:

$$\left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_2 + C_3 \right| \overset{\text{(1) Multilinealidad}}{=} \overset{\text{(2) Este determinante es nulo}}{\left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_2 \right|} + \left| -C_2 \quad 2C_1 - C_3 \quad C_3 \right| =$$

$$\overset{\text{(1) Multilinealidad}}{=} \left| -C_2 \quad 2C_1 \quad C_3 \right| - \overset{\text{(2) Este determinante es nulo}}{\left| -C_2 \quad C_3 \quad C_3 \right|} \overset{\text{(1) Multilinealidad}}{=} -2\left| C_2 \quad C_1 \quad C_3 \right| \overset{\text{(3) Permutar columnas}}{=}$$

$$= 2\left| C_1 \quad C_2 \quad C_3 \right| = 2 \cdot 4 = 8$$

Enunciamos las propiedades empleadas:

(1) – Multilinealidad: (lo ejemplificamos para columnas y matrices de orden 3)

(a) Si una fila o columna es la suma de otras dos, el determinante puede descomponerse de la siguiente forma: $|C_{1a} + C_{1b}, C_2, C_3| = |C_{1a}, C_2, C_3| + |C_{1b}, C_2, C_3|$

(b) Si una fila o columna está multiplicada por un número verifica:

$$|k \cdot C_1, C_2, C_3| = k \cdot |C_1, C_2, C_3|$$

(2) – El determinante de una matriz con dos filas (o columnas) iguales, proporcionales, o donde una fila (o columna) es combinación lineal de otras, es cero.

(3) – Si permutamos dos filas (o columnas) entre sí, el determinante cambia de signo.

b) Calculamos A^t y A^{-1}

Matriz traspuesta: $A^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -b/a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos los valores de a y b mediante la igualdad: $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -b/a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtenemos las ecuaciones: $a = 1/a$, $b = 0$, $-b/a = 0$

Los valores de a y b que verifican la igualdad son: $a = 1$, $b = 0$ y $a = -1$, $b = 0$

10.

Enunciado

Demuestra, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$

Indica en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 & 1 \\ x & x+3 & 1 \\ x & x+5 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 1 \\ 1 & x+3 & 1 \\ 1 & x+5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Utilizamos las propiedades:

a) En un determinante se puede sumar a una fila o columna otra multiplicada por un número. Hacemos $C_3 \equiv C_3 - C_2$

b) Si un número multiplica a una fila o columna el determinante queda multiplicado por dicho número.

c) Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales el determinante es nulo.

11.
Enunciado
Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$S = \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2 z = m \end{cases}$$

a) Discute su compatibilidad en función del parámetro m
b) Resuelve el sistema para $m = 0$

Solución:
a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son:

$$C(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix}, \quad A(m) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{array}\right)$$

$|C(m)| = 5m^2 + 8 + 18 - (15 + 4m^2 + 12) = m^2 - 1;\ m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

Si $m \neq -1, m \neq 1,\ R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.
Estudio para $m = -1$ se obtiene rango(C) = 2 = rango(A) $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
Estudio para $m = 1$ se obtiene rango(C) = 2 $\neq$ rango(A) = 3$\Rightarrow$ Sistema incompatible

b) Si $m = 0$, el sistema queda $S = \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ y es compatible determinado como se ha visto en el apartado anterior.
Utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = 6, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = -2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = -1$$

La solución es: $x = 6, y = -2, z = -1$

12.
Enunciado
Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$

se pide:
a) Discute según los distintos valores del parámetro k
b) Resuelve cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:
a) Sean las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

$|C| = 2k^2 - 5k + 2 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2, k = 1/2$

Para todo valor $k \neq 2$, $k \neq 1/2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$\text{Para } k = 2 \Rightarrow R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2\cdot 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right) = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

$R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Para $k = 1/2$

$$R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right)\begin{array}{l} 2\cdot 1^a \\ 2\cdot 2^a \\ 2\cdot 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2\cdot 2^a - 1^a \\ 1^a + 2\cdot 3^a \end{array} =$$

$$= R\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 5^a\cdot 2^a + 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Es el caso en que $k = 2$, pasando de la última matriz al sistema se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 2z = -1 \\ 5y + 3z = -4 \end{array}\right\} y = \frac{-4-3z}{5} \Rightarrow x = \frac{7-z}{5}$$

En paramétricas:

$$x = \frac{7-\lambda}{5}, y = \frac{-4-3\lambda}{5}, z = \lambda, \lambda \in \mathrm{R}$$

13.
Enunciado
Resuelve por el método de Gauss y discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \quad = 1 \\ 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} x + y \quad = 1 \\ 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 1^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y \quad = 1 \\ 2y + z = 0 \\ 2y + 2z = 2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a - 2^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y \quad = 1 \\ 2y + z = 0 \\ z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

La solución es: $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$
El sistema es heterogéneo compatible determinado.

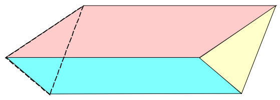
14.
Enunciado
Resuelve por el método de Gauss e interpreta gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \end{array}\right\}$$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 8 \\ 3x - 2y + 4z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 3\cdot 1^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ y + z = 4 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ 2^a - 3^a \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ y + z = 5 \\ 0 = 3 \end{array}\right\}$$

Se llega a una contradicción. No tiene solución. El sistema es heterogéneo incompatible.
Interpretación gráfica
Los tres planos no tienen ningún punto en común. Forman una superficie prismática



15.
Enunciado
Un tren transporta 470 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 4250 €. Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que asciende a 10 €; cuántos han pagado el 80% del billete y, cuántos han pagado el 50%, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 50% es la mitad del número de viajeros que pagaron el 80%
Solución
a) Entérate: incógnitas, datos y preguntas
Viajeros que pagan el 100%: x
Viajeros que pagan el 80%: y
Viajeros que pagan el 50%: z
b) Manos a la obra

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 470 \\ 10x + 8y + 5z = 4250 \\ z = y/2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 320,\ y = 100,\ z = 50$$

c) Solución
320 viajeros pagan el 100% del billete.
100 viajeros pagan el 80% del billete.
50 viajeros pagan el 50% del billete.

16.
Enunciado
Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 € por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva.
Plantea un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que un litro de aceite cuesta el triple de un litro de leche y que un kilo de jamón cuesta igual que cuatro litros de aceite más cuatro litros de leche.
Solución
a) Entérate: incógnitas, datos y preguntas
Precio del litro de leche: x
Precio del kilo de jamón: y
Precio del litro de aceite: z

b) Manos a la obra

$$\left.\begin{array}{l} 24x+6y+12z=156 \\ z=3x \\ y=4z+4x \end{array}\right\} \Rightarrow x=1,\ y=16,\ z=3$$

c) Solución
Precio del litro de leche es 1 €
Precio del kilogramo de jamón es 16 €
Precio del litro de aceite es 3 €

17.
Enunciado
Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\ \text{ y } C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula $A \cdot C$ y $B \cdot C$. Del resultado obtenido ¿qué propiedad muy elemental se ha probado que no se verifica?
Solución

$$A \cdot C=\begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix} \qquad B \cdot C=\begin{pmatrix} 38 & -19 \\ 54 & -27 \end{pmatrix}$$

No se verifica la propiedad de simplificar. Si $A \cdot C = B \cdot C$ no se deduce que $A = B$

18.
Enunciado
Resuelve el sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{l} 3A-B=\begin{pmatrix} 9 & -7 & 7 \\ 20 & 3 & -10 \end{pmatrix} \\ 6A+B=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 20 \\ 25 & -3 & -8 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Solución

Sumando las dos ecuaciones se obtiene A

$$9A=\begin{pmatrix} 18 & -9 & 27 \\ 45 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se le resta a la 2ª el doble de la 1ª: es decir: 2ª – 2 · 1ª y se obtiene B

$$3B=\begin{pmatrix} -9 & 12 & 6 \\ -15 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

19.
Enunciado
Sea la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla la expresión de A^k
Solución

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por recurrencia se obtiene:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

20.

Enunciado

Tres supermercados, *A*, *B* y *C*, se distribuyen los clientes de una ciudad. Inicialmente, *A* tiene la mitad de la cuota de mercado, *B* y *C* un cuarto cada una. Como consecuencia de una campaña publicitaria, un mes después se constata que:

El supermercado *A* conserva el 80% de sus clientes, gana el 10% de los de *B* y el 2% de los de *C*

El supermercado *B* conserva el 70% de sus clientes, gana el 14% de los de *A* y el 8% de los de *C*

El supermercado *C* conserva el 90% de sus clientes, gana el 6% de los de *A* y el 20% de los de *B*

a) Escribe matricialmente los cambios producidos en los porcentajes y la cuota de mercado. ¿Qué propiedad tiene la matriz de los cambios producidos en los porcentajes?

b) Usa la matriz obtenida para calcular la cuota de mercado que tiene cada supermercado después de la campaña.

c) Al mes siguiente vuelven a realizar otra campaña publicitaria y obtienen los mismos resultados. Calcula la cuota de mercado que tiene cada supermercado después de la segunda campaña.

d) Qué supermercado es el más beneficiado con la campaña de publicidad.

e) Qué supermercado es el más perjudicado con la campaña de publicidad.

Solución

a)

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 80 & 10 & 2 \\ 14 & 70 & 8 \\ 6 & 20 & 90 \end{pmatrix} \end{array} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

La matriz de los cambios producidos en los porcentajes tiene la propiedad de que la suma de cada columna es 100, que es como se distribuye su porcentaje.

b)

$$\begin{pmatrix} 80 & 10 & 2 \\ 14 & 70 & 8 \\ 6 & 20 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 26{,}5 \\ 30{,}5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 80 & 10 & 2 \\ 14 & 70 & 8 \\ 6 & 20 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}43 \\ 0{,}265 \\ 0{,}305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37{,}66 \\ 27{,}01 \\ 35{,}33 \end{pmatrix}$$

d) El más beneficiado es *C* que ha subido de un 25% a un 35,33%

e) El más perjudicado es *A* que ha bajado de un 50% a un 37,66%

21.
Enunciado
Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

Calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

En el 1.^er^ paso hemos descompuesto el determinante en la suma de otros dos que tienen la 2.ª y 3.ª columna iguales y la suma de las dos primeras columnas coincide con la 1.ª columna inicial. En el 2.º paso hemos cambiado en el 1.^er^ determinante la 2.ª columna con la 3.ª y por tanto el determinante cambia de signo y el 2.º determinante es cero porque la 1.ª columna es el doble de la 3.ª

22.
Enunciado
Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & -9b & 4c \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son no nulos. Calcula el rango de A
Solución

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & -9b & 4c \end{vmatrix} = 9\text{abc}$$

Como a, b y c son no nulos $|A| \neq 0$, por tanto rango$(A) = 3$

23.
Enunciado
Halla todas las matrices X que permutan con A, es decir, tales que $XA = AX$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b \text{ cualquier número} \\ c = 0 \\ d = a \end{array} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

24.

Enunciado

a) Determina para qué valores de x no existe la inversa de A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

b) Calcula la inversa de A cuando $x = 2$

Solución

a) No existirá la inversa cuando el determinante sea cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 1$$

La matriz A no tiene inversa para $x = 3$, y para $x = 1$

b) Para $x = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

25.

Enunciado

Resuelve si es posible el siguiente sistema por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + 2z = 5 \end{array}\right\}$$

Solución

Como $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, el sistema es de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{45}{27} = \frac{5}{3}; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{27} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

26.

Enunciado

Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y \quad\;\; = 4 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array}\right\}$$

Solución
Se escribe el sistema en forma matricial:

$$CX = B \Rightarrow X = C^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de los coeficientes:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$

27.
Enunciado
Dado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= a \\ ax + y + z &= 1 \\ 2x + y + az &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Estudia la compatibilidad del siguiente sistema, en función del valor de a
b) Resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado.
Solución
a) $|C| = -a^2 + 3a - 2$
$a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$
Para todo valor de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ se verifica que:
$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

- Para a = 1 se tiene:

$R(C) = R(A) = 2$ < número de incógnitas y, por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

- Para a = 2 se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto el sistema es incompatible.

b) Para $a = 1$ la solución del sistema es:
$x = 0$, $y = 1 - z$
La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \text{ con } \lambda \in \mathbf{R}$$

28.
Enunciado
Discute, según los valores del parámetro *k*, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ kx+y+z=1 \\ x-y+3z=-3 \\ 4x+2y=k \end{array}\right\}$$

Solución
Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.
$|A| = -2k^2 + 12k - 18$
$2k^2 - 12k + 18 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0$
$k = 3$
Para todo valor de $k \neq 3$ se verifica que:
$R(C) < R(A) = 4$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

- Para $k = 3$ se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

29.
Enunciado
a) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-3z=0 \\ 2x+3y-z=5 \end{array}\right\}$$

b) Halla la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4
Solución:
a)
Sustituyendo la 2.ª ecuación por : 2.ª – 2 · 1.ª, se obtienen la solución: $\left\{\begin{array}{l} x=-5+8t \\ y=5-5t \\ z=t \end{array}\right. \quad ; t \in R$

b) Queda el siguiente sistema que se resuelve por Gauss: $\left.\begin{array}{r} x+y-3z=0 \\ 2x+3y-z=5 \\ x+y+z=4 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 3$, $y = 0$, $z = 1$

30.
Enunciado
En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.
Solución:
Peso de la sortija: *x*
Peso de la moneda: *y*
Peso de los pendientes: *z*

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 4x+3y+2z=90 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene la solución: $x = t$; $y = 30 - 2t$; $z = t$

El objeto no puede ser ni sortija ni pendiente ya que éstos pesan lo mismo y los dos juntos pesarían 36 g que contradice la 1.ª ecuación. Luego debe ser una moneda. Se tiene:
$30 - 2t = 18 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow x = 6, y = 18, z = 6$
Con lo que se tiene que la sortija pesa 6 g, la moneda, 18 g y los pendientes, 6 g

31.
Enunciado
La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?
Solución:
N.º de partidos ganados: x
N.º de partidos empatados: y
N.º de partidos perdidos: z

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ 2x+y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 20, y = 10, z = 10$$

El número de partidos ganados es 20, el de empatados, 10 y perdidos, 10

32.
Enunciado
A, B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de a A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de a A a B. Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de a A a C. Calcula las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros.
Solución:
Distancia AB: x
Distancia BC: y
Distancia AC: z

$$\left.\begin{array}{l} y+z=3x \\ x+y=2z \\ x+y+z=120 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 30, y = 50, z = 40$$

La distancia de A a B es de 30 km, la de B a C, 50 km y la de A a C, 40 km

33.
Enunciado
Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=1 \\ x-4y-2z=0 \\ x-6y-5z=-1 \end{array}\right\}$$

Solución:
Resolviendo por Gauss se obtiene: $x = 0$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{2}$

34.
Enunciado
Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x-z=1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Resolviendo por Gauss se obtiene: $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \quad ;t\in R \\ z=t \end{cases}$

35.
Enunciado
Da un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible. Interprétalo geométricamente.
Solución:
El siguiente sistema es incompatible. Son dos planos paralelos (la 1ª y la 2ª ecuación) y otro secante.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=-1 \\ 3x+3y-6z=7 \\ x-3y-z=1 \end{array}\right\}$$

36.
Enunciado
Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y-x=z \\ x-z=y \\ y+z=x \end{array}\right\}$$

Solución:

Resolviendo por Gauss se obtiene: $\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=t,\ y=t,\ z=0;\ t\in R$

37.
Enunciado
Da un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea compatible indeterminado. Interprétalo geométricamente
Solución:
El siguiente sistema es compatible indeterminado. Las tres ecuaciones representan el mismo plano.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x+6y-2z=2 \\ 5x+15y-5z=5 \end{array}\right\}$$

38.

Enunciado

En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Solución:

	Migato	**Catomeal**	**Comecat**
Tanto por uno	x	y	z
Carne	$600x$	$300y$	$200z$
Pescado	$300x$	$400y$	$600z$
Verdura	$100x$	$300y$	$200z$

$$\left.\begin{array}{l}600x+300y+200z=470\\300x+400y+600z=370\\100x+300y+200z=160\end{array}\right\} \Rightarrow x = 0{,}62;\ y = 0{,}22;\ z = 0{,}16$$

De Migato se debe poner el 62%, de Catomeal el 22% y de Comecat el 16%

39.

Enunciado

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ calcula:

$M = A + A^2 + \cdots + A^{10}$

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{todas las potencias de } A \text{ son } A$$

$$M = A + A^2 + \cdots + A^{10} = 10A = 10\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

40.

Enunciado

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula:

$M = A + A^2 + \cdots + A^{10}$

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{todas las potencias de } A \text{ son } A$$

$$M = A + A^2 + \cdots + A^{10} = 10A = 10\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

41.
Enunciado
Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$2A+3B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix}$$

$$5A-2B=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}$$

Solución:
Se resuelve por reducción:

a) Se multiplica la 1.ª ecuación por 2 y la 2ª por 3 y se suman:

$$4A+6B=\begin{pmatrix}8 & 16\\ 14 & 22\end{pmatrix}$$

$$15A-6B=\begin{pmatrix}30 & 3\\ 24 & 54\end{pmatrix}$$

$$19A=\begin{pmatrix}38 & 19\\ 38 & 76\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

b) Se multiplica la 1ª ecuación por 5 y la 2ª por –2 y se suman:

$$10A+15B=\begin{pmatrix}20 & 40\\ 35 & 55\end{pmatrix}$$

$$-10A+4B=\begin{pmatrix}-20 & -2\\ -16 & -36\end{pmatrix}$$

$$19B=\begin{pmatrix}0 & 38\\ 19 & 19\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

42.
Enunciado
Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, es cierto que:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

Solución:
No, porque el producto de matrices no siempre es conmutativo, solo se cumple si $AB = BA$
Contraejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^2=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ y } A^2+B^2+2AB=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

43.
Enunciado
Si A es una matriz cuadrada cualquiera, es cierto que:

$$(A + I)(A - I) = A^2 - I$$

Solución:
Sí, por la siguiente justificación:
$(A + I)(A - I) = A^2 - AI + IA - I^2 = A^2 - A + A - I = A^2 - I$

44.
Enunciado
Sean A, B y C tres matrices tales que el producto $A \cdot B \cdot C$ es una matriz 3×2 y el producto $A \cdot C^t$ es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C
Solución:
Para que se pueda multiplicar las dimensiones de las matrices tiene que ser: $A_{3\times n}$, $B_{n\times m}$, $C_{m\times 2}$
$A_{3\times n} \cdot (C_{m\times 2})^t = A_{3\times n} \cdot C^t_{2\times m} = D_{3\times m}$, luego $n = 2$ y como D tiene que ser cuadrada $m = 3$
Las dimensiones de las matrices son: $A_{3\times 2}$, $B_{2\times 3}$, $C_{3\times 2}$

45.
Enunciado
Demuestra que toda matriz cuadrada de dimensión 3 se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.
Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+d}{2} & \frac{c+g}{2} \\ \frac{b+d}{2} & e & \frac{f+h}{2} \\ \frac{c+g}{2} & \frac{f+h}{2} & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-d}{2} & \frac{c-g}{2} \\ -\frac{b-d}{2} & 0 & \frac{f-h}{2} \\ -\frac{c-g}{2} & -\frac{f-h}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

46.
Enunciado
Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula $A \cdot B$; $A \cdot C$, $A^t \cdot B^t$ y $C^t \cdot A^t$, siendo A^t, B^t y C^t las matrices traspuestas de A, B y C, respectivamente.
Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\ ,\ A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ C^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

47.
Enunciado
Dada la siguiente matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^2, A^3, A^4
b) Calcula A^{2012}
Solución:
a) Hallamos las potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 01 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A es cíclica de periodo 2, dividiendo 183 entre 2 da de resto 1
b) Hallamos las potencias sucesivas para hallar el periodo.
Como $A^4 = -A \Rightarrow A^5 = -A^2 \Rightarrow A^6 = I$
Se tiene que A es cíclica de periodo 6, dividiendo 2012 entre 6 da de resto 2, por tanto:

$$A^{2012} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

48.
Enunciado
Dada la siguiente matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula A^k
Solución:
Lo hacemos por recurrencia, hallamos las primeras potencias y luego lo generalizamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

49.
Enunciado
Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes:

a) $\det(3A)$ b) $\det(A^{-1})$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Solución:
a) $|3A| = 3^3|A| = 27 \cdot 2 = 54$

b) $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

c) Dividiendo la 1.ª columna por 3, dividiendo la 2.ª columna por 2 e intercambiando la 1.ª y 2.ª filas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2.^{a}-2\cdot 1.^{a} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3.^{a} \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

50.
Enunciado
Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro a

Solución:
Se calcula el determinante y se iguala a cero: $|A| = 12 - 12a \Rightarrow 12 - 12a = 0 \Rightarrow a = 6$
Para todo valor de $a \neq 6 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow R(A) = 4$

Para $a = 6$, $R(A) = 3$

51.
Enunciado

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$

Solución:

$$AP = PA \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

Se tiene que cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ d = 2c+d \end{array}\right\} \Rightarrow c = 0,\ a = d$$

La matriz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con a y b números cualesquiera.

52.
Enunciado

Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a
b) Determina para qué valores de $\boldsymbol{a}$ existe matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$

Solución:

a) $|M| = -2a^3 + 2a \Rightarrow 2a^3 - 2a = 0 \Rightarrow a = -1,\ a = 0,\ a = 1$
Para todos los valores $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $\mathrm{R}(M) = 3$
Para $a = -1$, $R(M) = 2$
Para $a = 0$, $R(M) = 2$
Para $a = 1$, $R(M) = 2$
b) La matriz inversa existe para todos los valores de $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$

Para $a = 2$, $|M| = -12$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

53.
Enunciado

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que el $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y que $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$
b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple que $\det(M^2) = (\det(M))^2$? Razona la respuesta.
c) Encuentra todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^2) = 1$

Por otra parte:

$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$, luego, $\det(A^2) = (\det(A))^2$

$\det(A + I) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

$\det(A) = -1$; $\det(I) = 1 \Rightarrow \det(A) + \det(I) = -1 + 1 = 0$

Se verifica que $\det(A + I) = \det(A) + \det(I)$

b) Como el determinante del producto de dos matrices cuadradas es el producto de sus determinantes, se tiene: $\det(M^2) = \det(M \cdot M) = \det(M) \cdot \det(M) = (\det(M))^2$

c) Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M + I = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$

$\det(M + I) = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + a + d + 1$

$\det(M) + \det(I) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 1$

Debe cumplirse: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + a + d + 1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 1 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow a = -d$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con a, b y c cualquier número real.

54.

Enunciado

Halla una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$A^{-1}XA = B \Rightarrow X = ABA^{-1}$

Se calcula A^{-1}

$|A| = -1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; $X = A\,B\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

55.

Enunciado

Resuelve $AB^t X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

$AB^tX = -2C$

Si llamamos $D = AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |D| = -28$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{5}{28} & \frac{1}{28} \end{pmatrix}$

Multiplicando por la izquierda por la inversa de D en la ecuación inicial:
$X = -2D^{-1}C$

$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

56.
Enunciado

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.
b) Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de B

Solución:

a) $|A| = -7 \Rightarrow$ La matriz A tiene inversa, $A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

b) $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t \Rightarrow A \cdot X = B \cdot B^t - C \cdot B^t \Rightarrow$
$A \cdot X = (B - C) \cdot B^t \Rightarrow X = A^{-1}(B - C) \cdot B^t$

$B - C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (B - C) \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$; $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -26 \end{pmatrix}$

57.
Enunciado

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$ b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$

Solución:

a) Al multiplicar una matriz por un número, se multiplica el número por todos los elementos de la matriz. Si en un determinante se multiplica una línea por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.
$|-3A| = -3(-3)(-3)\,|A| = -27 \cdot 2 = -54$

Como el determinante de un producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes, se tiene:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -4$

Se han aplicado dos propiedades:

- Si se multiplica una línea de un determinante por un número, éste queda multiplicado por dicho número.
- Si se intercambian dos líneas paralelas de un determinante, éste cambia de signo.

c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

Se han aplicado dos propiedades:

- Si una línea de un determinante está formada por dos sumandos, el determinante puede descomponerse en dos determinantes, cada uno de los cuales tiene un sumando y el resto de las líneas iguales.
- Si un determinante tiene dos líneas iguales, su valor es cero.

58.

Enunciado

Sea A una matriz 2×2 de columnas C_1, C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz 2×2 de determinante 2. Si C es la matriz de columnas $C_1 + C_2$ y $3C_2$, calcúlese el determinante de la matriz $B \cdot C^{-1}$

Solución:

Se calcula el determinante de la matriz C:

$|C| = |\, C_1 + C_2 \;\; 3C_2| = |C_1 \;\; 3C_2| + |C_2 \;\; 3C_2| = |C_1 \;\; 3C_2| = 3|C_1 \;\; C_2| = 3 \cdot 4 = 12$

Por otro lado: $C \cdot C^{-1} = I \Rightarrow \; |C \cdot C^{-1}| = |I| \Rightarrow |C| \cdot |C^{-1}| = 1 \Rightarrow |C^{-1}| = \dfrac{1}{|C|} = \dfrac{1}{12}$

Se tiene: $|B \cdot C^{-1}| = |B| \cdot |C^{-1}| = 2\,\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$

59.

Enunciado

Despeja la matriz X en función de A e I en la ecuación

$(X + A)^2 = X^2 + XA + I$

siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I la matriz identidad de orden dos.

Solución:

Se calcula la potencia: $(X + A)^2 = (X + A)(X + A) = X^2 + XA + AX + A^2$

La igualdad queda:

$X^2 + XA + AX + A^2 = X^2 + XA + I \Rightarrow AX + A^2 = I \Rightarrow AX = I - A^2$

Si la matriz A tiene inversa:

$X = A^{-1}(I - A^2) = A^{-1}\, I - A^{-1}\, A^2 = A^{-1} - A$

60.
Enunciado
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que $A \cdot B$ tiene inversa.
Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

Para que tenga inversa, el determinante debe ser distinto de cero.
$|A \cdot B| = -(1-m)(2+2m)$,
$(1-m)(2+2m) = 0 \Rightarrow m = 1, m = -1$
Para todos los valores $m \neq 1$, $m \neq -1$, la matriz tiene inversa.

61.
Enunciado
Resuelve la siguiente ecuación en la variable x

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:
Se calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

Se aplica el teorema del factor y haciendo la división por Ruffini se obtiene:
$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$

62.
Enunciado
Halla los valores de k para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

a) no tenga inversa.
b) tenga rango 3
Solución:
a) Se calcula el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 1 & -k & -k & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 4^a - 3^a \end{matrix} = -k \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{vmatrix} = -k^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -k & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -k^2(-3k+9)$; $-k^2(-3k+9) = 0 \Rightarrow k = 0, k = 3$
Para $k = 0$ y $k = 3$ la matriz no tiene inversa.

b) Si $k \neq 0$, $k \neq 3$, el rango de la matriz es cuatro. Se estudian los casos:

Para $k = 0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango se puede eliminar la 1.ª columna, que es de ceros, y la 4.ª fila que es igual a la 3.ª. Nos queda:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango es } 3$$

Para $k = 3$

$$R\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 1^a-2^a \\ 1^a-3^a \\ 1^a-4^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a:3 \\ \\ \\ \end{matrix} = R\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 7\cdot 2^a-3^a \\ 7\cdot 2^a-4^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ 3^a+2\cdot 4^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

63.
Enunciado
Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averigua para qué valores de k tiene soluciones distin*t*as de $x = y = z = 0$. Resuelve en tales casos.

Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2 \ ; k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 2$$

Tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$ para $k = -1$, $k = 2$
Solución para $k = -1$, $x = t$, y = 0, z = t, $t \in$ R
Solución para $k = 2$, $x = -t/5$, y = $3t/5$, z = t, $t \in$ R

64.
Enunciado
Resuelve:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:
Pasamos al sistema de ecuaciones y lo resolvemos por Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 2x \qquad + 5z = \ \ 7 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + \ z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1,\ y = -1,\ z = 1$$

65.
Enunciado

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \qquad 2y + \ z = 3 \\ \qquad (1+a)y + \ z = 4 \\ x + \qquad 2y + az = 4 \end{cases}$

a) Discute el sistema según el valor del parámetro a
b) Resuelve el sistema para $a = 2$

Solución:

a) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$; $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = -1,\ a = 1$

Para $a \neq -1$, $a \neq 1$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Para $a = -1$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible.
Para $a = 1$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Para $a = 2 \Rightarrow x = 0,\ y = 1,\ z = 1$

66.
Enunciado

A un compañero le piden que clasifique *y* resuelva el sistema $\begin{cases} 3x - ky \qquad = 3 \\ \qquad y + 3z = 6 \\ x + \qquad kz = 5 \end{cases}$ para el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, *y* que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es $x = 1 + 2t$, $y = \ldots$, $z = \ldots$ Determina para qué valor del parámetro k ha clasificado *y* resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas y y z que le faltan.

Solución:

$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$ para todos los valores de k se obtiene que $R(C) = 2$

Para que el sistema sea compatible indeterminado $R(A) = 2$, por tanto los siguientes determinantes tienes que ser cero.

$$R\begin{pmatrix} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & k & 5 \end{pmatrix}_{3 \cdot 3^{a} - 1^{a}} = R\begin{pmatrix} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & k & 3k & 12 \end{pmatrix}$$

Para que las dos últimas filas sean proporcionales tiene que ser $k = 2$
Resolvemos el sistema para $k = 2$, $x = 1 + 2t$

$$\left.\begin{array}{r} 3(1+2t) - 2y \qquad = 3 \\ y + 3z = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 3t,\ z = 2 - t$$

La solución es $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 - t$, $t \in \mathbb{R}$

67.

Enunciado

La terna (0, 0, 0) es siempre solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - az = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 2ax + y - z = 0 \end{cases}$$

Independientemente del valor del parámetro *a*

a) Indica para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema.

b) Indica algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula *y* mostrar estas soluciones. *(Nota: Si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos.*

Solución:

a) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3a^2 + 6a$; $3a^2 - 6a = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2$

Tiene soluciones distintas de la terna (0, 0, 0) para $a = 0$, $a = 2$

b) Solo se pide resolver para uno de estos valores, aquí lo haremos para los dos.

Solución para $a = 0$, $x = -2t$, $y = t$, $y = t$, $t \in$ R

Solución para $a = 2$, $x = 0$, $y = t$, $y = t$, $t \in$ R

68.

Enunciado

Dado el sistema $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de *a*

b) Resuélvelo cuando sea posible.

Solución:

a) $|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2a + 2$; $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Para $a \neq 1$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Para $a = 1$, $R(C) = R(A) = 2 <$ N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Siempre tiene solución:

Para $a \neq 1$, $x = 1/2$, $y = 1/2$, $y = -a/2 + 1/2$

Para $a = 1 \Rightarrow x = 1 - t$, $y = t$, $y = 0$, $t \in$ R

69.

Enunciado

Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ x + by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

Según los valores de *b*

Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = 2b^2 - 2b \;;\; b^2 - b = 0 \Rightarrow b = 0,\ b = 1$$

Para $b \neq 0$, $b \neq 1$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Para $b = 0$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible.
Para $b = 1$, $R(C) = R(A) = 2$ < N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

70.
Enunciado
a) Discute e interprete geométricamente, según los diferentes valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = m \\ mx - y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para los casos $m = 0$ *y* $m = 2$
Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = m - 2 \;;\; m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

Para $m \neq 2$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado, los tres planos se cortan en un punto.
Para $m = 2$, $R(C) = R(A) = 2$ < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. El 1.er plano *y* el 3.º son el mismo *y* el 2.º los corta en una recta.

Para $m = 0$, $x = y = z = 0$

$$\text{Para } m = 2,\ x = \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}t \\ y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}t \;;\; t \in \mathrm{R} \\ z = t \end{cases}$$

71.
Enunciado
Estudia, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} ax + ay \quad &= a \\ x - y + az &= a \\ x + 2y + 3z &= a \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -a^2 - 6a \;;\; a^2 + 6a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = -6$$

Para $a \neq 0$, $a \neq -6$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Para $a = 0$, $R(C) = R(A) = 2$ < N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
Para $a = -6$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

72.

Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, y

$$\begin{cases} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcula para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x, y, x) = (0, 0, 0)$

b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtén todas sus soluciones.

c) Explica la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$

Solución:

El sistema es homogéneo.

a) $|C| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda$; $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -3$

Para $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -3$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

b) Para $\lambda = 0$, $x = -t/5$, $y = 3t/5$, $y = t$, $t \in \mathrm{R}$

Para $\lambda = -3$, $x = u - t$, $y = t$, $y = u$, $t, u \in \mathrm{R}$

c) Para $\lambda = -3$, los tres planos son el mismo, porque sus coeficientes son proporcionales.

73.

Enunciado

Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$

b) Calcula A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) Halla todas las matrices X que satisfacen $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$

Se tiene que cumplir:

$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 2;\ \beta = -1$

b) Utilizando la expresión del apartado anterior, se tiene que $A^2 = 2A - I$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$

$A^5 = A^4 \cdot A = (4A - 3\mathrm{I})A = 4A^2 - 3A = 4(2A - I) - 3A = 5A - 4I$

$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2 \Rightarrow A^2 + AX - XA - X^2 = A^2 - X^2 \Rightarrow AX - XA = \mathrm{O}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$AX - XA = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 2c & -2a+2d \\ 0 & -2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2c = 0 \\ -2a+2d = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = d,\ c = 0$

La matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

74.
Enunciado
Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Halla A^{10}
d) Halla la matriz inversa de B
e) En el caso particular $k = 0$, halla B^{10}

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

$|B| = 1,\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

75.
Enunciado

Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

a) Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) Calcula, en función de a, los determinantes $2A$ y A^t, siendo A^t la traspuesta de A

c) ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

Solución:

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 4$

b) $|2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2$ $\qquad$ $|A^t| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2$

c) Para que A sea simétrica debe coincidir con su traspuesta.

$A^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \neq A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow$ No es simétrica.

76.
Enunciado
Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&2\end{pmatrix}$$

halla las matrices X que satisfacen $XC+A=C+A^2$
Solución:

$$XC+A=C+A^2 \Rightarrow X=\left(C+A^2-A\right)C^{-1}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$X=\left(C+A^2-A\right)C^{-1} \Rightarrow X=\left(C+A-A\right)C^{-1} \Rightarrow X=CC^{-1}=I$$

77.
Enunciado
Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$. Calcula el determinante de A sabiendo que $A^2-2A+Id=O$, donde Id es la matriz identidad y O es la matriz nula.
Solución:
$|A|=ac$

$$A^2-2A+Id=O \Rightarrow \begin{pmatrix}a^2-2a+1 & ab+bc-2b\\ 0 & c^2-2c+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}a^2-2a+1=0\\ ab+bc-2b=0\\ c^2-2c+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=1,\ b \text{ cualquier número},\ c=1$$

El $|A|=ac=1\cdot 1=1$

78.
Enunciado
Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases}kx+y+z=1\\ x+ky+z=k\\ x+y+kz=k^2\end{cases}$$

a) Discute según los valores de k e interprétese geométricamente el resultado.
b) Resuelve el sistema para $k=2$
Solución:

a) $|C|=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=k^3-3k+2$; $k^3-3k+2=0\Rightarrow k=-2,\ k=1$

Para $k\neq-2$, $k\neq1$, $R(C)=R(A)=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.
Para $k=-2$, $R(C)=2\neq R(A)=3$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible. Los tres planos se cortan dos *a* dos, porque no hay dos paralelos

Para $k = 1$, $R(C) = 1 = R(A) = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Es el mismo plano.

b) Para $k = 2 \Rightarrow x = -3/4$, $y = 1/4$, $z = 9/4$

79.
Enunciado
Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde **λ** es un número real.
a) Encuentra los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa.

b) Dados *a* y *b* números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado con *A* la matriz del enunciado?

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 2\lambda+3 \\ -\lambda+1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |AB| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2$; $2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$; $\lambda = 1/2$

Para todo valores $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq 1/2$, la matriz *AB* tiene inversa.

b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2y+\lambda z \\ x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+\lambda z = a \\ x-y-z = b \end{matrix}\right\}$

Para que el sistema sea compatible determinado, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. Como el rango de la matriz de los coeficientes es 2 e igual al rango de la matriz ampliada, el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de *a* y *b*

80.
Enunciado
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

donde *x* es un número real. Halla:
a) Los valores de *x* para los que la matriz *A* posea inversa.
b) La inversa de *A* para $x = 2$
c) Con $x = 5$, el valor de $b \in$ R para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1
Solución:
a) $|A| = -x^2 + 4x - 3$; $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$, $x = 3$
Para todo valor $x \neq 1$, $x \neq 3$, la matriz *A* tiene inversa.

b) Para $x = 2$, $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) Para $x = 5$ se tiene:

$$|b \cdot A| = b^3\,|A| = b^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -8b^3 \Rightarrow -8b^3 = 1 \Rightarrow b = -1/2$$

81.

Enunciado

En un cajero automático se introducen billetes de 10, 20 y 50 euros. El número total de billetes es 130 y el total de dinero es 3000 €. Se sabe que el número de billetes de 10 € es α veces los billetes de 50 €

a) Calcula el número de billetes de cada tipo suponiendo que $\alpha = 2$

b) Para $\alpha = 3$ ¿qué ocurre con la situación del cajero planteada?

c) Siguiendo con $\alpha = 3$, si se tuvieran 100 billetes en el cajero ¿cuánto dinero debería haber para que sea posible una composición del cajero?

Solución:

a) N.º de billetes de 10 €: x

N.º de billetes de 20 €: y

N.º de billetes de 50 €: z

Se obtiene el sistema para $\alpha = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 130 \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x = \alpha z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 130 \\ x + 2y + 5z &= 300 \\ x \quad\;\; - 2z &= 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 80,\ y = 10,\ z = 40$$

Habrá 80 billetes de 10 €, 10 de 20 € y 40 de 50 €

b) Si $\alpha = 3$

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 130 \\ x + 2y + 5z &= 300 \\ x \quad\;\; - 3z &= 0 \end{array}\right\}$$ El sistema es incompatible. No se puede dar la situación planteada.

c) Para $\alpha = 3$ y con 100 billetes.

Sea la cantidad de dinero en el cajero dividido por 10 = m

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 100 \\ x + 2y + 5z &= m \\ x \quad\;\; - 3z &= 0 \end{array}\right\}$$

Para que el sistema sea compatible el rango de la matriz de los coeficientes, C, debe ser igual rango de la matriz ampliada, A.

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & 2 & 5 & m \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2^a - 1^a \\ 1^a - 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 4 & m-100 \\ 0 & 1 & 4 & 100 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 2^a - 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 4 & m-100 \\ 0 & 0 & 0 & m-200 \end{pmatrix}$$

El R(C) = 2. Para que $R(A) = 2$ se tiene que cumplir que $m - 200 = 0 \Rightarrow m = 200$. Luego con 200 € se puede dar la disposición del cajero.

82.

Enunciado

Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$$ donde $m \in \mathbb{R}$

a) Prueba que M es una matriz regular.

b) Para m = – 1 considera el sistema de ecuaciones lineales $(M - sI)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $s \in$ R e I es la matriz unidad (identidad) de orden tres. Resuélvelo según los valores de s.

c) Para m = – 1 obtén los vectores $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que verifican $M^{-1} \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v}$ para algún número real r

Indicación: no es necesario calcular M^{-1}, basta con probar que $r \neq 0$ y $r^{-1} \cdot \vec{v} = M \cdot \vec{v}$ y utilizar el apartado anterior.

Solución:

a) $|M| = -1 \Rightarrow$ La matriz M siempre es regular para todo valor de m

b) Para $m = -1$

$$(M - sI)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} (-s+1)x - y - z = 0 \\ x - (s+1)y = 0 \\ x - (s+1)z = 0 \end{array}\right\}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1-s & -1 & -1 \\ 1 & -s-1 & 0 \\ 1 & 0 & -s-1 \end{vmatrix} = -s^3 - s^2 - s - 1; -s^3 - s^2 - s - 1 = 0 \Rightarrow s = -1$$

Para s $\neq -1$, $R(C) = 3 = R(A)$ = n.º de ecuaciones. Sistema compatible determinado. La solución es

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Para $s = -1$, $R(C) = 2 = R(A)$ < N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. La solución es $x = 0, y = -t, z = t; t \in$ R

c) $M^{-1} \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{v} \Rightarrow M \cdot M^{-1} \cdot \vec{v} = M \cdot r \cdot \vec{v} \Rightarrow I \cdot \vec{v} = r \cdot M \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot I \cdot \vec{v} = M \cdot \vec{v} \Rightarrow$

$$\left(M - \frac{1}{r} \cdot I\right) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Para $m = -1$, se ha obtenido una expresión similar *a* la del apartado anterior con s: $-1 = 1/r$. Luego para $r = -1$ los vectores son de la forma: $\begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ con $t \in$ R

83.

Enunciado

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores del parámetro m para los que A tiene inversa.
b) Para $m = 0$, calcula A^3 y A^{25}
c) Para $m = 0$, calcula la matriz X que verifica $X \cdot A = B$, siendo $B = (0 \quad -1 \quad -1)$

Solución:

a) $|A| = m^2 - 1$; $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = -1$, $m = 1$

Para todo valor $m \neq -1$, $m \neq 1$, la matriz A tiene inversa.

b) $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \Rightarrow A^6 = A^3 \cdot A^3 = -I \cdot (-I) = I$. Se tiene:

$$\begin{array}{l|l} 25 & 6 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

$A^{25} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

84.

Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m-1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$

a) Discute según los distintos valores de m
b) Resuelve cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) $|C| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & 3 \\ 1 & 2 & m-2 \end{vmatrix} = m^3 - 5m^2 + 2m + 8$; $m^3 - 5m^2 + 2m + 8 = 0 \Rightarrow$

$m = -1$, $m = 2$, $m = 4$

Para $m \neq -1$, $m \neq 2$, $m \neq 4$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Para $m = -1$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Para $m = 2$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Para $m = 4$, $R(C) = 2$ $R(A) = 2 <$ Nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $m = 4 \Rightarrow x = 2/5$, y $= 9/5 - t$, $z = t$, $t \in$ R

85.

Enunciado

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \lambda x - y - z = -1 \\ x + \lambda y + z = 4 \\ x + y + z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$

Solución:

El sistema es homogéneo.

a) $|C| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$; $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = 1$

Para $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 1$, $R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
Para $\lambda = -1$, $R(C) = R(A) = 2 <$ N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
Para $\lambda = 1$, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Para $\lambda = 2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$

86.

Enunciado

Sea m un número real. Discute, en función de m, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2 & m+1 & 2 \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1$; $m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para m $\neq$ 1, $R(C) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado, única solución $x = y = z = 0$
Para m = 1, $R(C) = 1 <$ N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

87.

Enunciado

Clasifica en función del parámetro $a \in$ R el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax - 3y - 2z = 0 \\ -x + (5+a)z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

y resuélvelo, si es posible, para $a = -4$

Solución:

$|C| = \begin{vmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3a^2 - 21a - 36$; $a^2 + 7a + 12 = 0 \Rightarrow a = -4, a = -3$

Para $a \neq -4$, $a \neq -3$, $R(C) = 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado, única solución $x = y = z = 0$
Para $a = -4$, $R(C) = 2 <$ N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
Para $a = -3$, R(C) $= 2 <$ N.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Solución para $a = -4 \Rightarrow x = t$, $y\ -2t$, $z = t$, $t \in$ R