PROBLEMAS CAMPO GRAVITATORIO. FÍSICA 2ºBTO

1. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es –4,5 x 10^9 J y su velocidad es 7610 m s^{-1}. Calcule:

a) El módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
b) El período de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.

Datos:* *Masa de la Tierra	***$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg***
Radio de la Tierra	***$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m***
Constante de Gravitación Universal	***$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}***

a) La expresión de la velocidad de un satélite en una órbita alrededor de la Tierra es:

$$F_c = F_G \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

Luego el radio de la órbita es:

$$R = G\frac{M}{v^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{(7610)^2} = 6887438 \approx 6{,}89\cdot 10^6 \quad \text{m}$$

Se obtiene la expresión de la energía mecánica del satélite en la órbita:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$$

Como se conoce el radio de la órbita, se puede aprovechar esta expresión para calcular el valor de la masa del satélite:

$$m = \frac{-2\,RE_m}{GM} = -\frac{2\cdot 6{,}89\cdot 10^6\cdot(-4{,}5\cdot 10^9)}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}} = 155 \quad \text{kg}$$

Se calculan los módulos del momento lineal y del momento angular:

$$|\vec{p}| = mv = 155 \cdot 7610 = 1,18 \cdot 10^6 \quad \text{kg·m/s}^2$$

$$|\vec{L}| = R \cdot mv = 6,89 \cdot 10^6 \cdot 1,18 \cdot 10^6 = 8,13 \cdot 10^{12} \quad \text{kg·m}^2\text{/s}^2$$

b) Como el satélite viaja a velocidad constante, esta será igual al espacio dividido entre el tiempo:

$$v = \frac{e}{T} = \frac{2\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 6,89 \cdot 10^6}{7610} = 5689 \quad \text{s = 1h 34 minutos.}$$

La altura sobre la superficie se calcula restando el radio de la Tierra del radio de la órbita:

$$h = 6,89 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 5,174 \cdot 10^5\, m = 517,44\, Km$$

2. Llamando g_0 y V_0 a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad de campo gravitatorio es $g_0/2$.
b) La altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_0/2$.

1. a) El valor de la gravedad se reduce a la mitad cuando se adquiere cierta altura:

$$\frac{g_0}{2} = G\frac{M}{r^2}; \quad (siendo\ r = R + h) \quad G\frac{\frac{M}{R^2}}{2} = G\frac{M}{r^2}$$

$$\frac{1}{2R^2} = \frac{1}{r^2} \quad r^2 = 2R^2 \quad r = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}\, R$$

$$R + h = \sqrt{2}\, R$$

$$h = \sqrt{2}\, R - R = (\sqrt{2} - 1)\, R$$

b) Hacemos lo mismo lo mismo con el potencial:

$$\frac{V_0}{2} = -G\frac{M}{r}; \qquad \frac{\frac{-GM}{R}}{2} = -G\frac{M}{r}$$

$$\frac{1}{2R} = \frac{1}{r}; \quad r = 2R; \quad h = 2R - R; \quad h = R$$

3. Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre), calcule:

a) **la relación entre las densidades medias $\rho_{Luna} / \rho_{Tierra}$;**

b) **la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(v_e)_{Luna} / (v_e)_{Tierra}$.**

1. a) Hay que escribir las expresiones que se piden en función de los datos que se tienen:

$$g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow M=\frac{gR^2}{G} \qquad \rho=\frac{M}{V}=\frac{\frac{R^2 g}{G}}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3g}{4\pi GR}$$

La relación entre las densidades es:

$$g_L=\frac{g_T}{6};\ R_L=0,27\,R_T$$

$$\frac{\rho_L}{\rho_T}=\frac{\frac{3g_L}{4\pi GR_L}}{\frac{3g_T}{4\pi GR_T}}=\frac{g_L R_T}{g_T R_L}=\frac{g_T R_T}{6g_T(0,27)R_T}=\frac{1}{6\cdot 0,27}=0,62$$

b) Se procede igual que en el apartado anterior, calculamos en primer lugar, la expresión de la velocidad de escape:

$$\frac{\frac{gR^2}{G}}{R}$$

$$0=E_T;\quad 0=\frac{1}{2}mv_e^2-G\frac{Mm}{R};\qquad v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2G ¿\frac{¿}{¿}}=\sqrt{2gR}¿$$

La relación entre ambas será:

$$\frac{v_{eL}}{v_{eT}}=\sqrt{\frac{2g_L R_L}{2g_T R_T}}=\sqrt{\frac{g_T(0,27)\cdot R_T}{6g_T R_T}}=\sqrt{\frac{0,27}{6}}=0,21$$

4.-

a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media?

b) ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?

Datos: Radio de la Tierra R_T= 6371 km
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra g = 9,8 m s^{-2}

a) Se introducen los datos que se conocen en la fórmula del campo gravitatorio:

$$M_P = V_p \rho_{T;} \qquad M_p = V_p \frac{M_T}{V_T} = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \cdot \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \left(\frac{R_T}{2}\right)^3 \frac{M_T}{R_T^3} = \frac{M_T}{8}$$

$$g_p = G\frac{M_p}{R_p^2} = G\frac{M_T}{8 \cdot \frac{R_T^2}{4}} = \frac{1}{2} G \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{2} g_T = 4{,}9 \ \ m \ s^{-2}$$

b) Se calcula la velocidad que debe tener en satélite para mantenerse en órbita a esa altura:

$$F_c = F_N; \qquad m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{G\frac{M_p}{r}}$$

Como no se conoce el valor del producto GM se expresa como:

$$g_p = G\frac{M_p}{R_p^2} \quad \Rightarrow \quad GM_p = g_p R_p^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g_p R_p^2}{r}} = \sqrt{\frac{4{,}9 \cdot 1{,}01 \cdot 10^{13}}{3185900}} = 3941{,}58 \ \ m \ s^{-1}$$

El período es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(3185500)}{3941{,}3} = 5078 \ s = 1\text{h} \ 24 \min \ 38 \, s$$

Problema 5.- Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre el mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).

a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita?
b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?

Datos: Constante de Gravitación Universal ***G = 6,67 × 10⁻¹¹ N m² kg⁻²***
Masa de la Tierra ***M_T = 5,96 × 10²⁴ kg***
Radio de la Tierra ***R_T = 6371 km***

a) Cuando un cuerpo está en órbita alrededor de un planeta, se cumple que la fuerza centrípeta coincide con la fuerza atracción entre el cuerpo que orbita y el planeta:

$$F_c = F_N; \qquad m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Por otra parte, se conoce el período del planeta T = 24 h:

$$T=\frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{Tv}{2\pi}=\frac{24\cdot 60\cdot 60}{2\pi}\cdot\left(6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5,96\cdot 10^{24}}{6,371\cdot 10^{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=1,086\cdot 10^{8}\ m$$

b) Se denomina E_{COM} a la energía que hay que comunicar para que alcance esa órbita:

$$E_{PT}+E_{COM}=E_{Orb}$$

$$-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_T}+E_{COM}=-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

$$E_{COM}=\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,96\cdot 10^{24}\cdot 20\cdot\left(\frac{1}{6371000}-\frac{1}{1,086\cdot 10^{8}}\right)=5,87\cdot 10^{8}\ J$$

6. ¿A qué velocidad debe ser puesta en órbita una nave espacial para que circunde la Tierra prácticamente a ras del suelo?
Datos: radio de la Tierra = 6,4 · 10^6 m
masa de la Tierra = 6 · 10^{24} kg.

Solución:
Tenemos un objeto orbitando circularmente la Tierra prácticamente a ras de tierra, por tanto el radio de la órbita es aproximadamente el radio de la Tierra.
Dado que se trata de un movimiento circular bajo una fuerza gravitatoria tenemos:

$$m\cdot\frac{v^2}{R_T}=G\cdot\frac{M_T\cdot m}{R_{T^2}} \;\Rightarrow\; v^2=\frac{G\cdot M_T}{R_T} \quad .$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$v=\left(\frac{6,67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6\cdot 10^{24}kg}{6,4\cdot 10^{6}m}\right)=7,9\cdot 10^{3}\frac{m}{s}$$

7. La aceleración de la gravedad en Marte es 3,7 m/s². Si el diámetro del planeta es 6,8 · 10^6 m. Determinar la velocidad de escape.

Solución:
Dado que el diámetro es de 6.8 · 10^6 m, el radio del planeta será: 3.4 · 10^6 m. Por tanto, la velocidad de escape será: $v_e=\sqrt{2\cdot g\cdot R}=\sqrt{2\cdot 3.7\cdot 6.8\cdot 10^{6}}=7\ 093,7$ m/s.

8. Calcular la velocidad a la que debe viajar un satélite geoestacionario;
Dato: M_T= 6·10^{24} kg.

Solución:

Dado que $G\cdot\frac{M_T\cdot m}{r^2}=m\cdot\frac{v^2}{r}$, despejamos la velocidad $v=\left(\frac{G\cdot M_T}{R_T}\right)^{1/2}$. O, de otra manera, conocido el período

T = 24 h sabemos que $v=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot 42,25\cdot 10^{6}}{24\cdot 60\cdot 60}=3.1\cdot 10^{3}m/s$.

9. Un cierto rifle tiene una velocidad de salida de 600 m/s. Si se dispara desde la superficie de la Luna en dirección vertical hacia arriba, ¿escaparía la bala del campo gravitatorio de la Luna? Suponga la masa de la Luna 7,35 · 10^{22} kg y su radio 1 738km. Si no escapa calcula la altura máxima.

Solución:
Para averiguar si la bala escapará de la Luna, calcularemos la velocidad de escape. Esta viene dada por:

$$v_e=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_L}{R_L}}=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot 7.35\cdot 10^{22}}{1738\cdot 10^3}}=2\ 375\ m/s$$

. Dado que la bala tiene una velocidad de salida menor que la velocidad de escape, la bala no podrá escapar del campo gravitatorio lunar. La mayor distancia con respecto al centro de la Luna a la que la bola podría llegar se obtiene también a través de la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2-\frac{G\cdot M_L\cdot m}{R_L}=-\frac{G\cdot M_L\cdot m}{R}\ \Rightarrow\ R=1856\ km$$

La altura sobre la superficie lunar será: $h = R - R_L$ = 1 856 km - 1 738 km = 118 km

10. ¿Cómo se relaciona la velocidad de lanzamiento de un objeto desde la Tierra con la velocidad de lanzamiento del mismo objeto desde otro planeta con mismo radio pero masa 80 veces mayor?

Solución:

Sabiendo que la velocidad de lanzamiento es: $v_T=\sqrt{G\cdot M_T\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_2}\right)}$

$$v_P=\sqrt{G\cdot M_P\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_2}\right)}=\sqrt{80\cdot M_T\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

por tanto, la relación será $v_P=\sqrt{80}\cdot v_T$

11. Si tenemos dos planetas con idéntica masa, ¿cómo se relacionan las velocidades de escape de ambos planetas si uno tiene doble radio que el otro?

Solución:

La velocidad de escape viene dada por: $v_e=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R}}$

si los radios se relacionan por $R'=2\cdot R$

y las masas son iguales $v_e=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R}}$ y $v'_e=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{R'}}=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{2\cdot R}}$

Por tanto: $v'_e=\frac{v_e}{\sqrt{2}}$

12. Desde un lugar situado a una distancia del centro de la Tierra igual a las 5/4 partes del radio terrestre se desea poner en órbita un satélite terrestre.
¿Qué velocidad inicial hay que comunicarle?
¿Cuál será su periodo?
¿Cuál será el valor de la aceleración de la gravedad en su interior?

Solución:
Para calcular la velocidad orbital del satélite sólo hay que igualar la fuerza gravitatoria newtoniana de la Tierra y la fuerza centrífuga del satélite: $G\frac{M_T\cdot m}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$. De la igualdad anterior se deduce que:

$v=\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}}$. Ya que según el enunciado $r=\frac{5}{4}R_T$ y como además, $g_0=\frac{G\cdot M_T}{R_T^2}$, se concluye:

$v=\sqrt{\frac{4}{5}g_0 \cdot R_T}$ = 7 155 m/s. El periodo será: $T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{5\pi R_T}{2v}$ = 7,025 s.

La aceleración de la gravedad en el interior del satélite es nula, por existir equilibrio entre las fuerzas gravitatoria y centrífuga.

13. El primer satélite español “Minisat”, que fue lanzado en 1997 desde las Islas Canarias, se encuentra actualmente en una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de revolución de 10,5 horas .
a) Calcula el radio de la órbita.
b) Calcula la energía mecánica del satélite.
c) Calcula el radio de la órbita que debería tener el satélite para que su periodo de revolución fuera el doble que el actual.

Datos: G= $6{,}67\cdot10^{-11}$Nm$^{2/}$ kg^2; M_T= $5{,}97\cdot10^{24}$ kg; $m_{satélite}$=100kg

a) Para calcular el radio de la órbita empleamos la segunda ley de Newton en conjunción con la ley de la gravitación universal:

$$m_s\vec{a}=\vec{F}_{Gravitatoria}\xrightarrow{\text{movimiento circular}} m_s\frac{v^2}{R}=\frac{GM_Tm_s}{R^2}\xrightarrow{v=R\omega=R\,2\pi/T} R\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{GM_T}{R^2}$$

$$\longrightarrow R^3=\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}\longrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}\times(10{,}5\times3600)^2}{4\pi^2}}$$

$$=2{,}43\times10^7\,\text{m} \quad .$$

b) La energía mecánica del satélite es $E=E_C+E_P=\frac{1}{2}m_sv^2-\frac{GM_Tm_s}{R}$. Dado que, como acabamos de ver, de la segunda ley de Newton

$m_s\frac{v^2}{R}=\frac{GM_Tm_s}{R^2}\longrightarrow\frac{1}{2}m_sv^2=\frac{GM_Tm_s}{2R}$, concluimos que:

$$E=\frac{1}{2}m_sv^2-\frac{GM_Tm_s}{R}=\frac{GM_Tm_s}{2R}-\frac{GM_Tm_s}{R}=-\frac{GM_Tm_s}{2R}$$

$$=-\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}\times100}{2\times2{,}43\times10^7}=-8{,}19\times10^8\,\text{J} \quad .$$

c) Empleamos la tercera ley de Kepler obtenida en el apartado (a) y llamamos $T_{(a)}$ y $R_{(a)}$ respectivamente al período y al radio allí calculados:

$$R=\sqrt[3]{\frac{GM_TT^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{GM_T(2T_{(a)})^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{\frac{GM_TT_{(a)}^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{4}R_{(a)}=1{,}59\times2{,}43\times10^7=3{,}86\times10^7\,\text{m}$$

14. Saturno es el sexto planeta del Sistema Solar, es el segundo en tamaño después de Júpiter y es el único con un sistema de anillos visible desde la Tierra. Su masa es 95,2 veces la masa terrestre, y su radio es 9,5 veces el radio de la Tierra. Determina:
a) El valor de la aceleración de la gravedad en su superficie en relación con el terrestre, (g_S/g_T).
b) El periodo de revolución de Titán, uno de sus satélites, sabiendo que se encuentra a una distancia de 1221850 km de Saturno y en órbita circular.
c) El periodo de revolución de Saturno alrededor del Sol sabiendo que la Tierra tarda 365 días en completar una órbita y que podemos considerar ambas órbitas circulares.

Datos G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm^2 /kg^2, M_T = $5{,}98\cdot10^{24}$ kg; R_T=6370 km,

Distancia Tierra-Sol=1,496·10⁸ km,
Distancia Saturno-Sol=1,429·10⁹ km.

a) La aceleración de la gravedad g_P en la superficie de un planeta de masa M_P y radio R_P se obtiene aplicando la segunda ley de Newton conjuntamente con la ley de la gravitación universal a un cuerpo de masa m situado sobre la superficie del planeta bajo el único efecto de su gravedad:

$$m\vec{g}_P = \vec{F}_{\text{gravitatoria}} \longrightarrow mg_P = \frac{GM_P m}{R_P^2} \longrightarrow g_P = \frac{GM_P}{R_P^2} \quad .$$

Así pues, el cociente entre las gravedades en Saturno y la Tierra es:

$$\frac{g_S}{g_T} = \frac{\dfrac{GM_S}{R_S^2}}{\dfrac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{M_S}{M_T}\times\frac{R_T^2}{R_S^2} = \frac{95,2\times M_T}{M_T}\times\frac{R_T^2}{\left(9,5\times R_T\right)^2} = \frac{95,2}{9,5^2} = 1,05 \quad .$$

b) Para calcular el período de la órbita de Titán empleamos de nuevo la segunda ley de Newton en conjunción con la ley de la gravitación universal teniendo en cuenta que el radio la órbita de Titán es

$$R = R_S + h = 9,5\times 6,37\times 10^6 + 1,22\times 10^9 = 1,28\times 10^9\,\text{m} \quad :$$

$$m_{\text{Titán}}\vec{a} = \vec{F}_{\text{Gravitatoria}} \xrightarrow{\text{movimiento circular}} m_{\text{Titán}}\frac{v^2}{R} = \frac{GM_S m_{\text{Titán}}}{R^2} \xrightarrow{v=R\omega=R\,2\pi/T} R\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_S}{R^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\left(1,28\times 10^9\right)^3}{6,67\times 10^{-11}\times\left(95,2\times 5,98\times 10^{24}\right)}} = 1,48\times 10^6\,\text{s} = 17\,\text{días} \quad .$$

c) Para obtener el período de revolución de Saturno a partir del de la Tierra empleamos la tercera ley de Kepler deducida en el apartado (b) realizando el cociente entre ambos períodos:

$$\frac{T_S}{T_T} = \frac{\sqrt{\dfrac{4\pi^2R_{S/Sol}^3}{GM_{Sol}}}}{\sqrt{\dfrac{4\pi^2R_{T/Sol}^3}{GM_{Sol}}}} = \sqrt{\frac{R_{S/Sol}^3}{R_{T/Sol}^3}} \longrightarrow \frac{T_S}{365} = \sqrt{\frac{\left(1,429\times 10^9\right)^3}{\left(1,496\times 10^8\right)^3}} \longrightarrow T_S = 10.775\,\text{días}$$

15. El 19 de octubre de 2006 se lanzó un nuevo satélite de la familia Meteosat, el *MetOp-A*. Este satélite tiene una masa de 4 085 kg y describe una órbita polar (órbita que pasa por los polos y es perpendicular al plano del ecuador) a una altura de 800 km sobre la superficie de la Tierra.

Calcule:

a) A qué velocidad orbita.

b) Cuántas veces pasa por el Polo Norte diariamente.

c) Cuánto vale su energía mecánica.

DATOS: $M_T = 5,98\cdot 10^{24}$ **kg;** $R_T = 6\,400$ **km;** $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ **N· m²·kg⁻²**

a) Se iguala la fuerza de atracción gravitatoria a la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en órbita:

$$F_C = F_G ; \quad m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Se sustituyen los datos, teniendo en cuenta que la distancia a la que orbita debe medirse desde el centro de la Tierra hasta la órbita:

$$v = \sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{7{,}2\cdot 10^{6}}} = 7443\ m\ s^{-1}$$

b) Se calcula su período dividiendo la longitud de la órbita entre la velocidad con que se recorre:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 7{,}2\cdot 10^{6}}{7743} = 6078{,}5\ s$$

Dividiendo la duración del día entre el período se obtiene el número de veces que pasa por un mismo punto:

$$n^o\ veces = \frac{t_{día}}{T} = \frac{24\cdot 60\cdot 60}{6078{,}5} = 14{,}21$$

16. Tres masas puntuales, m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg y m_3 = 3 kg, están situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $a=\sqrt{3}$ m, en una región del espacio en la que no hay otro campo gravitatorio que el creado por las masas. Determina:

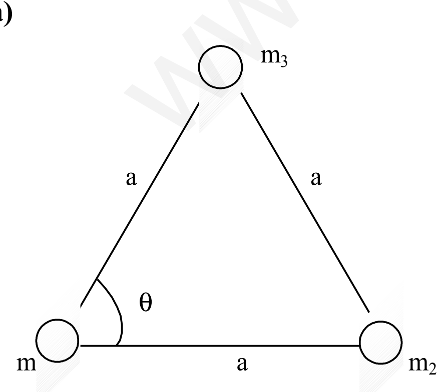
a) **El trabajo que se ha hecho para llevar las masas desde el infinito hasta la configuración actual (este trabajo coincide con la energía potencial gravitatoria de la configuración).**

b) **El potencial gravitatorio en el punto medio del segmento que une m_1 y m_3.**

c) **El módulo de la fuerza de atracción gravitatoria que experimente la masa m_1.**

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2

P-1.
a)



Calculamos la energía potencial que cada masa tiene por ocupar su posición con respecto a las otras dos masas:

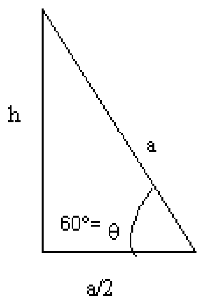
$$E_p = \sum_{i,j} -G\frac{m_i\cdot m_j}{r}$$

$$E_p = -G\left(\frac{m_1\cdot m_2}{a} + \frac{m_1\cdot m_3}{a} + \frac{m_2\cdot m_3}{a}\right)$$

Sustituyendo los valores de las masas y las distancias dados:

$$E_p = -4{,}2 \cdot 10^{-10}\ J$$

b)



Para calcular la distancia de m_2 al punto medio del lado opuesto del triángulo, consideramos el triángulo que resulta al dividir el equilátero por la mitad. La distancia que queremos conocer es la altura de este triángulo *h*:

$$h = a \cdot sen\,\theta = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\ m$$

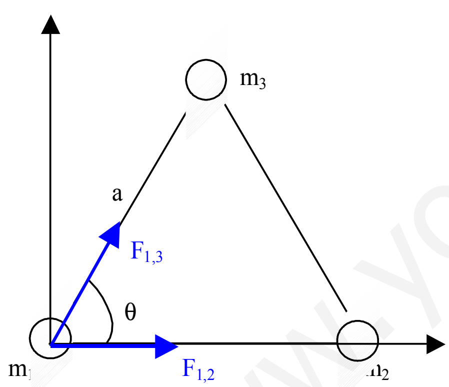
El potencial en dicho punto será la suma de los potenciales que crean cada una de las masas.

El potencial en dicho punto será la suma de los potenciales que crean cada una de las masas:

$$V = \sum_i -G\frac{m_i}{r}$$

$$V = -G\left(\frac{m_1}{a/2} + \frac{m_2}{a/2} + \frac{m_3}{asen\,\theta}\right) = -3{,}7 \cdot 10^{10}\ J/kg$$

c) Dibujamos las fuerzas que actúan sobre la masa m_1:



Aplicamos la fórmula de la fuerza teniendo en cuenta que tiene carácter vectorial:

$$\vec{F}_{1,2} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{a^2}(1{,}0)$$

$$\vec{F}_{1,3} = G\frac{m_1 \cdot m_3}{a^2}(\cos\theta\,,\,sen\,\theta)$$

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} = G\left(\frac{2}{3},0\right) + G\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = G\left(\frac{7}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ N$$

$$|F_T| = 9{,}7 \cdot 10^{-11}\ N$$