Matrices

1. Calcular la matriz X, tal que $XB+A=C$; siendo

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}0&3&0\\2&0&1\\0&-3&2\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&4&-6\end{pmatrix}$$

Solución:

$X\cdot B+A=C\Rightarrow X\cdot B=C-A\Rightarrow X\cdot B\cdot B^{-1}=(C-A)\cdot B^{-1}\Rightarrow X\cdot I=(C-A)\cdot B^{-1}\Rightarrow X=(C-A)\cdot B^{-1}$.

Por un lado: $C-A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\-2&4&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2&1\\5&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1&4\\-7&3&-3\end{pmatrix}$.

Por otro, el determinante de la matriz B es (regla de Sarrus):

$|B|=\begin{vmatrix}0&3&0\\2&0&1\\0&-3&2\end{vmatrix}=(0+0+0)-(0+12+0)=-12$. Como $|B|\neq 0$, existe B^{-1}, que la calcularemos mediante la fórmula: $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t$, donde B^d es la matriz adjunta de B. Esta última es $B^d=\left(B_{ij}\right)$, en la que B_{ij} son los adjuntos de la matriz $B: B_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}=\begin{cases}\Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es par}\\ -\Delta_{ij} & \text{si } i+j \text{ es impar}\end{cases}$, y donde Δ_{ij} es el menor complementario de orden 2 correspondiente a la fila i y a la columna j (determinante de orden 2 que resulta de eliminar la fila i y la columna j):

$B_{11}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&2\end{vmatrix}=0-(-3)=3$, $B_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}=-(4-0)=-4$, $B_{13}=\begin{vmatrix}2&0\\0&-3\end{vmatrix}=-6-0=-6$,

$B_{21}=-\begin{vmatrix}3&0\\-3&2\end{vmatrix}=-(6-0)=-6$, $B_{22}=\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}=0-0=0$, $B_{23}=-\begin{vmatrix}0&3\\0&-3\end{vmatrix}=-(0-0)=0$,

$B_{31}=\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix}=3-0=3$, $B_{32}=-\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}=-(0-0)=0$, $B_{33}=\begin{vmatrix}0&3\\2&0\end{vmatrix}=0-6=-6$.

Por tanto $B^d=\begin{pmatrix}3&-4&-6\\-6&0&0\\3&0&-6\end{pmatrix}$ y $\left(B^d\right)^t=\begin{pmatrix}3&-6&3\\-4&0&0\\-6&0&-6\end{pmatrix}$, y la matriz inversa de B es:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}3&-6&3\\-4&0&0\\-6&0&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{12}&\frac{6}{12}&-\frac{3}{12}\\\frac{4}{12}&0&0\\\frac{6}{12}&0&\frac{6}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Así pues $X = \left(C - A\right) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -7 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{12} & -\frac{3}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. †

---

2. Encontrar la matriz X , Sabiendo que $B\left(A - I\right) = A X A$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$B \cdot \left(A - I\right) = A \cdot X \cdot A \Rightarrow A^{-1} \cdot B \cdot \left(A - I\right) \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot \left(A - I\right) \cdot A^{-1}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+4+0) - (-2+8+0) = 7 - 6 = 1$. Entonces A tiene inversa y es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$.

Procediendo como en el ejercicio anterior, la matriz adjunta de A es $A^d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Entonces: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $X = A^{-1} \cdot B \cdot \left(A - I\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 2 & 5 \\ 62 & 6 & 12 \\ -50 & -4 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 73 \\ 50 & 106 & 168 \\ -40 & -84 & -133 \end{pmatrix}$. †

---

3. Resolver la ecuación matricial $A^2 \cdot X - B = A^2$ y determinar la matriz X , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$A^2 \cdot X - B = A^2 \Rightarrow A^2 \cdot X = A^2 + B \Rightarrow X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot \left(A^2 + B\right)$.

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\left|A^2\right| = 4$ (A^2 es diagonal y el determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal principal). Por tanto A^2 tiene inversa, que es $\left(A^2\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|A^2\right|}\left(\left(A^2\right)^d\right)^t$. La matriz adjunta de A^2 es (procediendo de manera similar a cómo se hizo en el ejercicio 1): $\left(A^2\right)^d = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Por tanto: $\left(A^2\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|A^2\right|}\left(\left(A^2\right)^d\right)^t = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, finalmente:

$$X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot \left(A^2 + B\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \dagger$$

---

4. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a+1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de a existe A^{-1}.

Solución:

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad según la cual el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos. Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left((a+1)^2 + 0 - a\right) - \left(-a^2(a+1) + 1 + 0\right) = \left(a^2 + a + 1\right) - \left(-a^3 - a^2 + 1\right) = a^3 + 2a^2 + a.$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(0 + 2a^2 + a\right) - \left(a^2(a+1) + 0 + 2a(a+1)\right) = \left(2a^2 + a\right) - \left(a^3 + 3a^2 + 2a\right) = -a^3 - a^2 - a.$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a+1 & -a & a \\ 1 & 0 & 2a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(0 - 2a^3 + a\right) - \left(0 + 0 + 2a(a+1)\right) = \left(-2a^3 + a\right) - \left(2a^2 + 2a\right) = -2a^3 - 2a^2 - a.$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a+1 & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(0-2a^2+a\left(a+1\right)\right)-\left(0+0+2a\right)=\left(-a^2+a\right)-2a=-a^2-a .$$

Observemos ahora que:

$A_1 = 0 \Leftrightarrow a^3+2a^2+a=0 \Leftrightarrow a\left(a^2+2a+1\right)=0 \Leftrightarrow a\left(a+1\right)^2=0 \Leftrightarrow a=0$ ó $a=-1$.

$A_2 = 0 \Leftrightarrow -a^3-a^2-a=0 \Leftrightarrow -a\left(a^2+a+1\right)=0 \Leftrightarrow a=0$ (la ecuación $a^2+a+1=0$ no tiene soluciones reales).

$A_3 = 0 \Leftrightarrow -2a^3-2a^2-a=0 \Leftrightarrow -a\left(2a^2+2a+1\right)=0 \Leftrightarrow a=0$ (la ecuación $2a^2+2a+1=0$ no tiene soluciones reales).

$A_4 = 0 \Leftrightarrow -a^2-a=0 \Leftrightarrow -a\left(a+1\right)=0 \Leftrightarrow a=0$ ó $a=1$.

Por tanto $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0 \Leftrightarrow a=0$. En este caso la matriz A es: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es claramente 2 (es fácil encontrar un menor de orden 2 distinto de cero).

Sin embargo si $a \neq 0$ alguno de los determinantes $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_4|$ será necesariamente distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

Resumiendo: $rango(A)=\begin{cases} 3 & \text{si } a\neq 0 \\ 2 & \text{si } a=0 \end{cases}$

No existe ningún valor de a para el que exista A^{-1}, pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas). †

---

5. Determinar la matriz X, sabiendo que $X\cdot A^2+B\cdot A=A^2$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$X\cdot A^2+B\cdot A=A^2 \Leftrightarrow X\cdot A^2=A^2-B\cdot A \Leftrightarrow X=\left(A^2-B\cdot A\right)\cdot\left(A^2\right)^{-1}$.

$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$ y, en este caso se tiene que $\left(A^2\right)^{-1}=I^{-1}=I$.

Entonces $X=\left(A^2-B\cdot A\right)\cdot\left(A^2\right)^{-1}=\left(I-B\cdot A\right)\cdot I=I-B\cdot A=$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. †$$

6. Estudiar el rango de A, según los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & t & 1 & 0\\ 1 & t+1 & t & t+1\end{pmatrix}$$

Razonar si para algún valor de t, existe A^{-1}.

Solución:

El rango de esta matriz es a lo sumo 3. Utilizaremos la propiedad que dice que el rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

Los menores de orden 3 de la matriz A son:

$$A_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & t & 1\\ 1 & t+1 & t\end{vmatrix}=\left(t^2+1+0\right)-\left(0+0+t+1\right)=t^2-t.$$

$$A_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & t & 0\\ 1 & t+1 & t+1\end{vmatrix}=\left(t\left(t+1\right)+0+0\right)-\left(t+0+0\right)=\left(t^2+t\right)-t=t^2.$$

$$A_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & t & t+1\end{vmatrix}=\left(t+1+0+0\right)-\left(1+0+0\right)=t.$$

$$A_4=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ t & 1 & 0\\ t+1 & t & t+1\end{vmatrix}=\left(t+1+0+t^2\right)-\left(t+1+0+0\right)=t^2.$$

Observemos ahora que:

$A_1=0 \Leftrightarrow t^2-t=0 \Leftrightarrow t\left(t-1\right)=0 \Leftrightarrow t=0$ o $t=1$. $A_2=0 \Leftrightarrow t^2=0 \Leftrightarrow t=0$.

$A_3=0 \Leftrightarrow t=0$. $A_4=0 \Leftrightarrow t^2=0 \Leftrightarrow t=0$.

Por tanto $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0 \Leftrightarrow t=0$. En este caso la matriz A es: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, cuyo rango es claramente 2, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero.

Sin embargo si $t \neq 0$ cualquiera de los determinantes $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_4|$ será distinto de cero y en este caso el rango de la matriz A será 3.

Resumiendo: $rango(A)=\begin{cases}3 & \text{si } t\neq 0\\ 2 & \text{si } t=0\end{cases}$

No existe ningún valor de t para el que exista A^{-1}, pues A no es una matriz cuadrada (no tiene sentido hablar de inversas de matrices no cuadradas ya que para éstas no está definido el determinante). †

7. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}$, hallar los valores de x para los cuales la matriz no es invertible. Hallar la inversa de A para $x=2$.

Solución:

Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo. Calculemos pues los valores de x que anulan el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\end{vmatrix}=(1+0+0)-\left(x^2+0+0\right)=1-x^2.\ |A|=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ó } x=-1.$$

Por tanto, A no tiene inversa cuando $x=1$ o cuando $x\neq -1$, ya que en estos casos $|A|=0$.

Si $x=2$, la matriz A es: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, y su determinante será $|A|=1-2^2=-3$. La inversa de la matriz A será $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$. Procediendo como en el ejercicio 1: $A^d=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & -3 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}. \dagger$$

8. Determinar la matriz X que verifica $AXA-B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Solución:

$$AXA-B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow AXA=B \Leftrightarrow X=A^{-1}BA^{-1}.\ |A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-3-(-2)=-1.$$

La matriz adjunta de A es $A^d=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, luego: $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$X=A^{-1}BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -13 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}. \dagger$$

9. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}$ y $X+3Y=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}$.

Solución:

Como $X+3Y=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3Y$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $3X-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}\Rightarrow 3\left[\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3Y\right]-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}18&36\\-6&81\end{pmatrix}-9Y-2Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}\Rightarrow -11Y=\begin{pmatrix}7&3\\16&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}18&36\\-6&81\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow -11Y=\begin{pmatrix}-11&-33\\22&-77\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\frac{1}{-11}\begin{pmatrix}-11&-33\\22&-77\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\-2&7\end{pmatrix}$.

Sustituyendo: $X=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3Y=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&3\\-2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12\\-2&27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&9\\-6&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\4&6\end{pmatrix}$. †

10. Hallar una matriz X que verifique la condición $A+BX=C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&6&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

Solución:

$A+BX=C\Leftrightarrow BX=C-A\Leftrightarrow X=B^{-1}(C-A)$.

$|B|=\begin{vmatrix}-1&1&0\\2&0&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\2&0\end{vmatrix}=0-2=-2\neq 0$. Por tanto, B tiene inversa. La adjunta de B es:

$B^d=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&-1&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$. Entonces: $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-2&-1&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow X=B^{-1}(C-A)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0&2&1\\1&2&0\\0&-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&6&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&-4&2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-2&1\\0&-2&2\end{pmatrix}$. †

11. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A.

b) Calcula la matriz X que verifique la ecuación $AX=B$.

Solución:

a) Determinante de A: $|A|=\begin{vmatrix}3&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=3(0-1)=-3$ (desarrollando por los elementos de la primera columna). Como el determinante de A es distinto de cero, la matriz A tiene inversa.

Matriz adjunta de A: $A^d=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&0&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}$ (sígase el proceso explicado en el ejercicio 1).

Traspuesta de la adjunta de A: $\left(A^d\right)^t=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}$.

Matriz inversa de A: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&-3\\0&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

b) $AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1/3&-2/3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. †

12. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$

1º) Halla la inversa de $A-BC$. 2º) Resuelve la ecuación matricial $AX-BCX=A$.

Solución:

1º) Hallemos la inversa de $A-BC$:

$$A-BC=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-3&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

$$|A-BC|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(-6+0+3)-(-3+0+1)=-3-(-2)=-1.$$

Por tanto, la matriz $A-BC$ tiene inversa. Hallemos su adjunta: $(A-BC)^d=\begin{pmatrix}-7 & -5 & 6\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

Y, por último, la inversa: $\left(A-BC\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A-BC|}\left(\left(A-BC\right)^d\right)^t=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-7 & 1 & 3\\ -5 & 1 & 2\\ 6 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

2º) $AX-BCX=A\Leftrightarrow\left(A-BC\right)X=A\Leftrightarrow X=\left(A-BC\right)^{-1}A$.

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -13 & 21\\ 8 & -9 & 16\\ -10 & 12 & -18\end{pmatrix}$. †

---

13. Resuelve la ecuación matricial $XA-2B+3C=D$, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 6\end{pmatrix}$.

Solución:

$XA-2B+3C=D\Leftrightarrow XA=2B-3C+D\Leftrightarrow X=\left(2B-3C+D\right)A^{-1}$.

$2B-3C+D=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 9\\ 6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -7 & 14\end{pmatrix}$.

Hallemos ahora la inversa de A:

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-2=2$; $A^d=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$.

Entonces: $X=\left(2B-3C+D\right)A^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -7 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23/2 & -14\\ -14 & 21\end{pmatrix}$. †

---

14. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde λ es un número real. Encuentra los valores de λ para los que la matriz $A\cdot B$ es invertible.

Solución:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{pmatrix}.$$

$A\cdot B$ no tendrá inversa siempre que $|A\cdot B|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+2\lambda-(1-\lambda)(3+2\lambda)=0 \Leftrightarrow 1+2\lambda-3-2\lambda+3\lambda+2\lambda^2=0 \Leftrightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-2)}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \lambda_2=-\dfrac{8}{4}=-2\end{cases}.$$

Por tanto $A\cdot B$ será invertible siempre que $\lambda\neq\frac{1}{2}$ y $\lambda\neq -2$. †

---

15. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

a) Comprueba que se verifica $A^3+I=O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Justifica que A tiene inversa.

Solución:

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}.$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$

$A^3+I=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O.$

b) Se puede hacer comprobando que el determinante de A es distinto de 0. Pero lo haremos utilizando el apartado anterior: $A^3+I=O \Leftrightarrow -A^3=I \Leftrightarrow -A^2\cdot A=A\cdot\left(-A^2\right)=I$.

De aquí se deduce claramente que $A^{-1}=-A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$. †

16. a) Determina la matriz X para que tenga solución la ecuación $C\left(A+X\right)B=I$ donde A, B y C son matrices con inversa de orden n e I es la matriz identidad de orden n.

b) Aplica el resultado anterior para $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Solución:

a) $C\left(A+X\right)B=I \Leftrightarrow A+X=C^{-1}B^{-1} \Leftrightarrow X=C^{-1}B^{-1}-A$.

b) $|C|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$. Por tanto, C tiene inversa: $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}\left(C^{d}\right)^{t}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

$|B|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$. Por tanto, B tiene inversa: $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\left(C^{d}\right)^{t}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Entonces: $X=C^{-1}B^{-1}-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. †

17. Sean A y B las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Ambas son de rango 3. ¿Qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ.

Solución:

Ocurre que el rango no tiene porqué conservarse. Veámoslo con las matrices A y B:

$$A+\lambda B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1+\lambda\\ \lambda & 2+\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2\lambda\end{pmatrix}.$$

$$|A+\lambda B|=\begin{vmatrix}1 & \lambda & 1+\lambda\\ \lambda & 2+\lambda & 0\\ 1 & 1 & 2\lambda\end{vmatrix}=(4\lambda+2\lambda^2+\lambda+\lambda^2)-(2+3\lambda+\lambda^2+2\lambda^3)=-2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-2.$$

$|A+\lambda B|=0 \Leftrightarrow -2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-2=0 \Leftrightarrow -2(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ó $\lambda=1$. Por tanto:

- ✓ Si $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq1 \Rightarrow rango\left(A+\lambda B\right)=3$.
- ✓ Si $\lambda=-1$, $A+\lambda B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow rango\left(A+\lambda B\right)=2$, pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1-1=-2$.

✓ Si $\lambda=1$, $A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&0\\1&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow rango\left(A+\lambda B\right)=2$, pues hay un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=3-1=2$. †

---

18. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de $\left(A-I\right)$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

b) Halla la matriz X solución de la ecuación $X\cdot A-2B=X$.

Solución:

a) $A-I=\begin{pmatrix}3&0&3\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

$\left|A-I\right|=\begin{vmatrix}2&0&3\\1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=-1(2-3)=1$ (desarrollando por los elementos de la tercera fila). Entonces

$\left(A-I\right)^{-1}=\dfrac{1}{\left|A-I\right|}\left(\left(A-I\right)^{d}\right)^{t}=\dfrac{1}{1}\left(\left(A-I\right)^{d}\right)^{t}=\left(\left(A-I\right)^{d}\right)^{t}$.

La matriz adjunta de $A-I$ es: $\left(A-I\right)^{d}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$. Por tanto: $\left(A-I\right)^{-1}=\left(\left(A-I\right)^{d}\right)^{t}=\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$.

b) $X\cdot A-2B=X \Leftrightarrow X\cdot A-X=2B \Leftrightarrow X(A-I)=2B \Leftrightarrow X=2B(A-I)^{-1}$.

Luego: $X=2\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&0&0\\2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&0\\0&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&8&2\\-2&6&0\\0&2&-2\end{pmatrix}$. †

---

19. Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&2&m\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2\\m&0\\0&2\end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que $A\cdot B$ tiene inversa.

Solución:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{pmatrix}.$$

$A\cdot B$ no tiene inversa $\Leftrightarrow |A\cdot B|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -(2+2m)(1-m)=0 \Leftrightarrow m=-1$ ó $m=1$. †

---

20. a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $\left(X+A\right)^2=X^2+X\cdot A+I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

    b) Resuelve la ecuación $B\cdot X+B^2=I_2$, si $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

Solución:

a) Por un lado, $\left(X+A\right)^2=\left(X+A\right)\left(X+A\right)=X^2+X\cdot A+A\cdot X+A^2$.

Entonces: $\left(X+A\right)^2=X^2+X\cdot A+I_2 \Leftrightarrow X^2+X\cdot A+A\cdot X+A^2=X^2+X\cdot A+I_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\cdot X+A^2=I_2 \Leftrightarrow A\cdot X=I_2-A^2 \Leftrightarrow X=A^{-1}\left(I_2-A^2\right)$.

b) $B\cdot X+B^2=I_2 \Leftrightarrow B\cdot X=I_2-B^2 \Leftrightarrow X=B^{-1}\left(I_2-B^2\right)$.

$|B|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1$; $B^d=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; $\left(B^d\right)^t=B^d=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Por tanto: $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Por otro lado, $I_2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Entonces $X=B^{-1}\left(I_2-B^2\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. †

---

21. Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ -1 & 2\lambda & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$. ¿Para qué valores del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ tiene inversa la matriz A? (No se pide hallarla).

Solución:

Como en la matriz A hay un menor de orden 2 distinto de 0, $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2$, el rango de A es al menos 2, sea quien sea el valor de λ.

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 0\\ -1 & 2\lambda & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\left(4\lambda^2-2+0\right)-\left(0-2+2\lambda\right)=4\lambda^2-2\lambda .$$

$$|A|=0\Leftrightarrow 4\lambda^2-2\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda\left(2\lambda-1\right)=0\Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ó } \lambda=\frac{1}{2}.$$

De aquí se deduce que: $rango(A)=\begin{cases}2 & \text{si } \lambda=0 \text{ ó } \lambda=\dfrac{1}{2}\\ 3 & \text{si } \lambda\neq 0 \text{ y } \lambda\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ y que la matriz A tendrá inversa siempre que $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$. †

---

22. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X+X=B$, donde X es una matriz de orden 2×2.

b) Resuelve el sistema $\begin{cases}2X+2Y=A\\ 4X+3Y=B\end{cases}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2.

Solución:

a) $A\cdot X+X=B\Leftrightarrow\left(A+I\right)X=B\Leftrightarrow X=\left(A+I\right)^{-1}B$.

$A+I=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; $|\mathrm{A+I}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5-4=1$.

Entonces $\left(A+I\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A+I|}\left(\left(A+I\right)^d\right)^t=\dfrac{1}{1}\left(\left(A+I\right)^d\right)^t=\left(\left(A+I\right)^d\right)^t$.

Pero $\left(A+I\right)^d=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\left(\left(A+I\right)^d\right)^t$. Por tanto: $\left(A+I\right)^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

De este modo, la matriz X es: $X=\left(A+I\right)^{-1}B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

b) Despejemos Y de la primera ecuación: $2X+2Y=A\Leftrightarrow 2Y=A-2X\Leftrightarrow Y=\dfrac{1}{2}\left(A-2X\right)$ **(*)**.

Sustituyamos en la 2ª y despejemos X: $4X+3\dfrac{1}{2}\left(A-2X\right)=B\Leftrightarrow 4X+\dfrac{3}{2}A-3X=B\Leftrightarrow X=B-\dfrac{3}{2}A$.

Entonces tenemos que la matriz X es: $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & -5\end{pmatrix}$.

Y sustituyendo en **(*)**: $Y=\dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & -5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix}$. †

23. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

b) Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

Solución:

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,… Así sucesivamente es fácil darse cuenta de que

$$A^n=A^{n-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\n-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

b) $|A^n|=\begin{vmatrix}1&0&0\\n&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow A^n$ tiene inversa para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

En este caso $\left(A^n\right)^{-1}=\frac{1}{|A^n|}\left(\left(A^n\right)^d\right)^t=\frac{1}{1}\left(\left(A^n\right)^d\right)^t=\left(\left(A^n\right)^d\right)^t$ y la matriz inversa de A^n coincide con la traspuesta de su adjunta: $\left(A^n\right)^{-1}=\left(\left(A^n\right)^d\right)^t=\begin{pmatrix}1&-n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. †

24. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\lambda&0&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$, donde $\lambda\in\mathbb{R}$.

a) Estudia, en función del parámetro λ, el rango de $A\cdot B$.

b) Razona que la matriz $B\cdot A$ tiene inversa para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$, y calcula dicha matriz inversa.

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ \lambda & 0 & 1\end{pmatrix}$. El rango de esta matriz es al menos dos, pues contiene por lo menos un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo, $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$. Como $A\cdot B$ es cuadrada de orden 3, su rango será 3 cuando su determinante sea distinto de cero. En caso contrario su rango será 2. Pero como $|A\cdot B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ \lambda & 0 & 1\end{vmatrix}=(-\lambda+2+\lambda)-2=0$, entonces el rango de $A\cdot B$ es 2 sea quien sea el valor de λ.

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -\lambda\\ 3 & -3\end{pmatrix}$. En este caso tenemos una matriz cuadrada de orden 2, cuyo determinante es $|B\cdot A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -\lambda\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-3(\lambda+1)-(-3\lambda)=-3\lambda-3+3\lambda=-3\neq 0$. Esto quiere decir que la matriz $B\cdot A$ tiene inversa sea quien sea $\lambda\in\mathbb{R}$.

Para calcular la matriz inversa de $B\cdot A$ comenzaremos por calcular su adjunta y la traspuesta de su adjunta:

$(B\cdot A)^d=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ \lambda & \lambda+1\end{pmatrix}$, $\left((B\cdot A)^d\right)^t=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ \lambda & \lambda+1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-3 & \lambda\\ -3 & \lambda+1\end{pmatrix}$.

Entonces: $(B\cdot A)^{-1}=\dfrac{1}{|B\cdot A|}\left((B\cdot A)^d\right)^t=\dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3 & \lambda\\ -3 & \lambda+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{\lambda}{3}\\ 1 & -\dfrac{\lambda+1}{3}\end{pmatrix}$. †

---

25. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula A^2.

b) Resuelve a ecuación matricial $6A^{10}\cdot X=3X+I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}=A$.

b) Del apartado anterior se deduce que $A^3=A^2\cdot A=A\cdot A=A^2=A$, $A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=A$. Así podríamos seguir sucesivamente. Es decir, hemos demostrado que $A^n=A$ sea quien sea $n\in\mathbb{N}$.

Entonces, en la ecuación matricial podemos sustituir A^{10} por A, quedando de la forma $6A\cdot X=3X+I_3$.

Despejando X:

$$6AX = 3X + I_3 \Rightarrow 6AX - 3X = I_3 \Rightarrow (6A - 3I_3)X = I_3 \Rightarrow X = (6A - 3I_3)^{-1} I_3 \Rightarrow X = (6A - 3I_3)^{-1}$$

Tenemos que $6A - 3I_3 = 6\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Su determinante es $|6A - 3I_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 27 = -27$. Calculemos ahora su adjunta y la traspuesta de su adjunta: $(6A - 3I_3)^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\left((6A - 3I_3)^d\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (6A - 3I_3)^d$. Finalmente:

$$(6A - 3I_3)^{-1} = \frac{1}{|6A - 3I_3|}\left((6A - 3I_3)^d\right)^t = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. †