MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2
- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Septiembre, Ejercicio 2
- Septiembre, Ejercicio 6

(2'5 puntos) Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \cdot e^{3x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot e^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Calculamos el área haciendo la integral por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array}}$$

$$A = \int_0^a x \cdot e^{3x}\, dx = \left[\frac{1}{3} x \cdot e^{3x}\right]_0^a - \frac{1}{3}\int_0^a e^{3x}\, dx = \left[\frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}\right]_0^a = \left(\frac{1}{3} a \cdot e^{3a} - \frac{1}{9} e^{3a}\right) - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} a \cdot e^{3a} - \frac{1}{9} e^{3a} = 0 \Rightarrow e^{3a}\left(\frac{1}{3} a - \frac{1}{9}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} a - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Sea *f* la función dada por: $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x\neq 2$

a) (2 puntos) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) (0'5 puntos) Calcula la primitiva de *f* que pasa por el punto $(3,5)$

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

La función $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}=\dfrac{3x^2+4}{x^2-4x+4}$

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}\,dx=\int 3\,dx+\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx=3x+\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{12x-8}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo, luego:

$$x=2\Rightarrow 16=B$$
$$x=0\Rightarrow -8=-2A+B\Rightarrow -8=-2A+16\Rightarrow A=12$$

Con lo cual:

$$\int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}\,dx=3x+\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx=3x+\int \frac{12}{x-2}\,dx+\int \frac{16}{(x-2)^2}\,dx=$$
$$=3x+12\ln|x-2|+16\int (x-2)^{-2}\,dx=3x+12\ln|x-2|+16\,\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C=$$
$$=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C$$

b) Calculamos la primitiva que pasa por $(3,5)$

$$F(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C\Rightarrow F(3)=5\Rightarrow 9+12\ln|1|-16+C=5\Rightarrow C=12$$

Luego: $F(x)=3x+12\ln|x-2|-\dfrac{16}{x-2}+12$

(2'5 puntos) Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{-x^3+2x-3}{x^2-x}$ para $x\neq 0$, $x\neq 1$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(2,3\ln 2)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}\,dx=\int (-x-1)\,dx+\int \frac{x-3}{x^2-x}\,dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x-3}{x^2-x}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-3}{x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x\cdot(x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$x=0\Rightarrow -3=-A\Rightarrow A=3$
$x=1\Rightarrow -2=B\Rightarrow B=-2$

Con lo cual:

$$F(x)=\int \frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}\,dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x-3}{x^2-x}\,dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{3}{x}\,dx-\int \frac{2}{x-1}=$$

$$=-\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+C$$

Calculamos la función que pasa por el punto $(2,3\ln 2)$

$$F(x)=-\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+C\Rightarrow 3\ln 2=-2-2+3\ln 2-2\ln 1+C\Rightarrow C=4$$

Luego, la función que nos piden es: $F(x)=-\dfrac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+4$

(2’5 puntos) Calcula $\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$ donde ln denota logaritmo neperiano.

(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x+1$).

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$t = x+1 \Rightarrow x = t-1$$
$$dt = dx$$

Sustituimos:

$$\int \ln\left[(t-1)^2+2(t-1)+2\right]dt = \int \ln\left(t^2+1-2t+2t-2+2\right)dt = \int \ln\left(t^2+1\right)dt$$

Hacemos la integral por partes

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(t^2+1);\ du = \dfrac{2t}{t^2+1}\,dt \\ dv = dt \quad ; \quad v = t \end{array}}$$

$$\int \ln\left(t^2+1\right)dt = t\cdot\ln\left(t^2+1\right) - \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt$$

Dividimos los dos polinomios y descomponemos la integral

$$\int \ln\left(t^2+1\right)dt = t\cdot\ln\left(t^2+1\right) - \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = t\cdot\ln\left(t^2+1\right) - \left[\int\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt\right] =$$
$$= t\cdot\ln\left(t^2+1\right) - \int 2\ dt + 2\int\frac{dt}{t^2+1} = t\cdot\ln\left(t^2+1\right) - 2t + 2\,arc\,tg\,t + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \ln\left(t^2+1\right)dt = t\cdot\ln\left(t^2+1\right) - 2t + 2\,arc\,tg\,t + C = (x+1)\cdot\ln\left((x+1)^2+1\right) - 2(x+1) + 2\,arc\,tg\,(x+1) + C =$$
$$= (x+1)\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right) - 2(x+1) + 2\,arc\,tg\,(x+1) + C$$

(2’5 puntos) Calcula $\int_0^{\pi} x\cdot sen^2(x)\ dx$

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Por trigonometría, sabemos que: $sen^2(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, luego

$$\int_0^{\pi} x\cdot sen^2(x)\ dx=\int_0^{\pi} x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\ dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\ dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cdot\cos 2x\ dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cdot\cos 2x\ dx$$

Calculamos por partes la integral $\int_0^{\pi} x\cdot\cos 2x\ dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos 2x\,dx;\ v=\dfrac{sen\,2x}{2}\end{array}}$$

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos 2x\ dx=\left[\frac{x\cdot sen\,2x}{2}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} sen\,2x\ dx=\left(\frac{\pi\cdot sen\,2\pi}{2}\right)-\left(\frac{0\cdot sen\,0}{2}\right)-\left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi}=$$
$$=0-0+\left(\frac{\cos 2\pi}{4}\right)-\left(\frac{\cos 0}{4}\right)=0$$

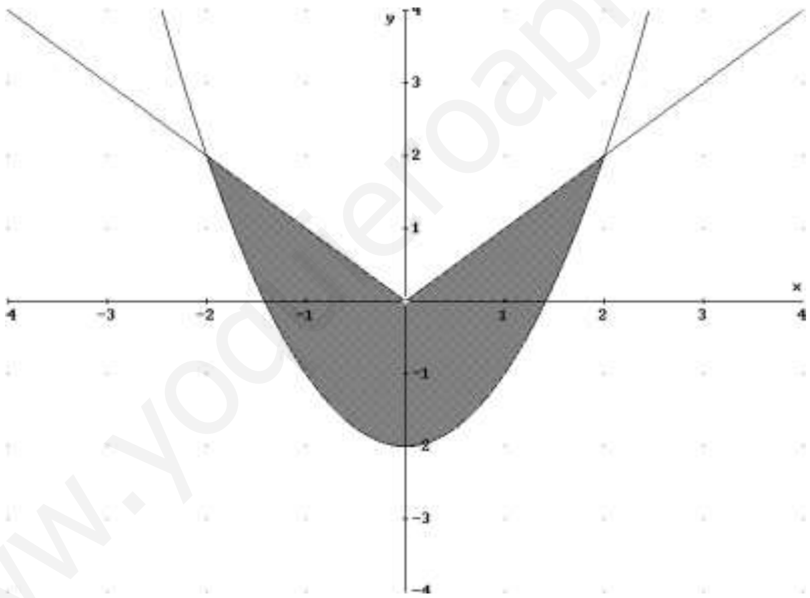
Por lo tanto:

$$\int_0^{\pi} x\cdot sen^2(x)\ dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cdot\cos 2x\ dx=\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{\pi^2}{4}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.
a) (1 punto) Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza el recinto que determinan.
b) (1'5 puntos) Determina el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3er cuadrante.
La función $f(x) = x^2 - 2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0, -2)$ y corta al eje X en los puntos $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$.



Calculamos los puntos de corte de las gráficas.
$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \,;\, x = 2$. Sólo sirve $x = 2$
$x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \,;\, x = -2$. Sólo sirve $x = -2$
Luego, los puntos de corte son: $(-2, 2)$ y $(2, 2)$

b) Calculamos el área del recinto

$$A = 2 \cdot \int_0^2 \left[(x) - (x^2 - 2) \right] dx = 2 \cdot \int_0^2 (-x^2 + x + 2)\, dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) = \frac{20}{3} \ u^2$$