PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2020

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 5
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 5
- Septiembre, Ejercicio 1
- Septiembre, Ejercicio 5

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,\,-1$

a) (1'25 puntos) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) (1'25 puntos) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{1,-1\}$.

Asíntotas Verticales: En principio son las rectas $x=1$ y $x=-1$. Vamos a comprobarlo

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{-4}{0^-}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

Luego $x=1$ es una asíntota vertical

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to -1^-}\frac{2x-2}{2x}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to -1^+}\frac{2x-2}{2x}=\frac{-4}{-2}=2$$

Luego, no tiene asíntota vertical en $x=-1$

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{2x-2}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \text{L'H}\hat{\text{o}}\text{pital}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{2}=1$$

Luego $y=1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota Oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{2x^2+4x+2}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow$ No sirve, ya que no está en el dominio

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	+
Función	C	C	C

Creciente: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{sen(x)}{2-\cos(x)}$

a) (2 puntos) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde de obtienen y valores que se alcanzan).
b) (0'5 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisas $x=\dfrac{\pi}{3}$.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot(2-\cos x)-sen\,x\cdot sen\,x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-\cos^2 x-sen^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x-1}{(2+\cos x)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\ ;\ x=\frac{5\pi}{3}$$

	$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$
Signo f'	+	−	+
Función	C	D	C

Máximo relativo en $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y mínimo relativo en $\left(\dfrac{5\pi}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Calculamos los valores que toma la función en los extremos

$$f(0)=\frac{sen\,0}{2-\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

$$f(2\pi)=\frac{sen\,2\pi}{2-\cos 2\pi}=\frac{0}{1}=0$$

Luego, el máximo absoluto es $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y el mínimo absoluto $\left(\dfrac{5\pi}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) Tangente: $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{sen\dfrac{\pi}{3}}{2-\cos\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \\ f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{\sqrt{3}}{3}=0\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow y=\frac{\sqrt{\ }}{3}$$

Normal: $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}\cdot(x-a)\Rightarrow y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{1}{0}\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$

(2’5 puntos) Calcula *a* sabiendo que $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

$$\frac{7}{2}=\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x \to 0}\frac{x-(ax-1)\ln(1-x)}{x\cdot\ln(1-x)}=\frac{0}{0}\to L'H\hat{o}pital=$$

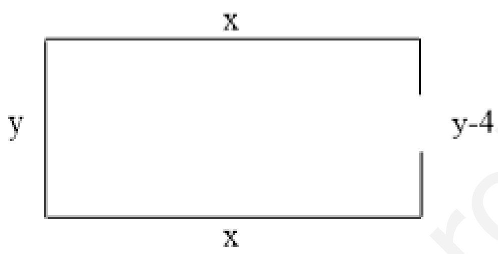
$$=\lim_{x \to 0}\frac{1-a\ln(1-x)-(ax-1)\cdot\left(\frac{-1}{1-x}\right)}{1\cdot\ln(1-x)+x\cdot\left(\frac{-1}{1-x}\right)}=\lim_{x \to 0}\frac{1-a\ln(1-x)+\frac{ax-1}{1-x}}{\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}}=\frac{0}{0}\to L'H\hat{o}pital=$$

$$=\lim_{x \to 0}\frac{\frac{a}{1-x}+\frac{a\cdot(1-x)+1\cdot(ax-1)}{(1-x)^2}}{-\frac{1}{1-x}-\frac{1\cdot(1-x)+1\cdot x}{(1-x)^2}}=\lim_{x \to 0}\frac{\frac{a}{1-x}+\frac{a-1}{(1-x)^2}}{-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{(1-x)^2}}=\frac{a+a-1}{-1-1}=\frac{2a-1}{-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a-1=-7\Rightarrow 2a=-6\Rightarrow a=-3$$

(2’5 puntos) Una familia desea acotas una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor del área.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $96 = 2x + y + y - 4 \Rightarrow y = \dfrac{100 - 2x}{2} = 50 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot y = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25\ m$$

e) Comprobamos que es un máximo

$$S''(x) = -2 \Rightarrow S''(25) = -2 < 0 \Rightarrow máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = 25\ m$; $y = 25\,m$.

El área máxima es: $S_{\max} = x \cdot y = 25 \cdot 25 = 625\ m^2$

(2'5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = e^x (x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f* y los puntos de inflexión de su gráfica.
MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = e^x (x^2 - 5x + 6) + (2x - 5) \cdot e^x = e^x \left(x^2 - 3x + 1\right)$$

$$f''(x) = e^x (x^2 - 3x + 1) + (2x - 3) \cdot e^x = e^x \left(x^2 - x - 2\right) = 0 \Rightarrow x = -1 \ ; \ x = 2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f''	+	—	+
Función	Cx	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-1, 2)$ y convexa en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Puntos de inflexión en $\left(-1, \frac{12}{e}\right)$ y $(2, 0)$

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ 1-x\ln x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) (1'75 puntos) Determina los valores de *a* y *b*.

b) (0'75 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 5.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} e^{2ax-4b}=e^{2a-4b} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 1-x\ln x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{2a-4b}=1\Rightarrow (2a-4b)\ln e=\ln 1=0\Rightarrow 2a-4b=0\Rightarrow a=2b$$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases} 2a\cdot e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ -\ln x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

Como es derivable se cumple que: $f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow 2a\cdot e^{2a-4b}=-1-\ln 1\Rightarrow 2a\cdot e^{2a-4b}=-1$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} a=2b \\ 2a\cdot e^{2a-4b}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4b\cdot e^{0}=-1\Rightarrow 4b=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{4}\ ;\ a=-\frac{1}{2}$$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$f(2)=1-2\ln 2$

$f'(2)=-1-\ln 2$

Luego la recta tangente es $y-1+2\ln 2=(-1-\ln 2)\cdot(x-2)\Rightarrow (1+\ln 2)x+y-3=0$