PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2020

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3
- Reserva 1, Ejercicio 3
- Reserva 2, Ejercicio 7
- Reserva 3, Ejercicio 7
- Reserva 4, Ejercicio 7

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{m+2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{m+1} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

a) (1’5 puntos) Estudia el rango de *A* según los valores de *m*.
b) (1 punto) Para $m=2$, calcula la inversa de 2020*A*.
MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *A*:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{vmatrix}=5-m\cdot(m+1)-m\cdot(m+2)=-2m^2-3m+5=0 \Rightarrow m=1\ ;\ m=-\frac{5}{2}$$

Para $m=1\ y\ m=-\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow Rango(A)=2$

Luego:

	Rango(*A*)
$m=1$	2
$m=-\frac{5}{2}$	2
$m\neq 1\ y\ -\frac{5}{2}$	3

b) Calculamos la inversa de 2020*A* para $m=2$:

$$|2020A|=2020^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=2020^3\cdot(5-6-8)=2020^3\cdot(-9)$$

$$(2020A)^{Adj}=2020^2\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left((2020A)^{Adj}\right)^t=2020^2\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2020A)^{-1}=\frac{\left((2020A)^{Adj}\right)^t}{|2020A|}=\frac{2020^2\cdot\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{2020^3\cdot(-9)}=-\frac{1}{18180}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2'5 puntos) Considera $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**,** $B=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ***y*** $C=\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$**. Determina** ***a, b*** **y** ***c*** **sabiendo que** $A\cdot B=C$ **y la matriz** ***A*** **tiene rango 2.**

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 3.

R E S O L U C I Ó N

$$A\cdot B=C\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 1+a+b=2 \\ c+1+4=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+b=1 \\ c=-4 \end{cases}$$

$$R(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 4a+b\cdot c+1-a\cdot c-4-b=0\Rightarrow 4a+b\cdot c-a\cdot c-b=3$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, obtenemos que: $a=\frac{8}{13}$; $b=\frac{5}{13}$; $c=-4$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) (1’5 Puntos). Calcula A^{37} y A^{41}.

b) (1 Punto). Halla el determinante de la matriz $3A^{52}(A^t)^4$, donde A^t es la traspuesta de la matriz A

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$$A^{37}=A^{3\cdot 12+1}=\left(A^3\right)^{12}\cdot A=\left(I\right)^{12}\cdot A=A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{41}=A^{3\cdot 13+2}=\left(A^3\right)^{13}\cdot A^2=\left(I\right)^{13}\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $|A|=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

Calculamos el determinante de la matriz que nos piden

$$\left|3A^{52}(A^t)^4\right|=\left|3A\cdot A^{51}\cdot(A^t)^4\right|\xrightarrow{Paso\,1}=|3A|\cdot\left|A^{51}\right|\cdot\left|(A^t)^4\right|\xrightarrow{Paso\,2}3^2|A|\cdot|A|^{51}\cdot|A|^4=$$
$$=3^2\cdot 1\cdot 1^{51}\cdot 1^4=9$$

Paso1: Propiedad $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

Paso 2: Propiedad $|k\cdot A_n|=k^n|A_n|$ y propiedad $|A^t|=|A|$

Considera las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) (1 Punto). Sabiendo que una matriz $\boldsymbol{X}$ **verifica** $\boldsymbol{X^3AX=B^2}$**, halla los posibles valores de su determinante.**

b) (1'5 Puntos). Determina, si existe, una matriz $\boldsymbol{Y}$ **que verifique** $\boldsymbol{A^2YB^{-1}=A}$

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los determinantes de A y B

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1 \qquad ; \qquad |B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0-2=-2$$

$$|X^3AX|=|B^2| \xrightarrow{Paso1} =|X|\cdot|X|\cdot|X|\cdot|A|\cdot|X|=|B|\cdot|B| \Rightarrow |X|^4\cdot 1=(-2)\cdot(-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow |X|=\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}$$

En el paso 1 hemos aplicado la propiedad: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

b) Si multiplicamos por $(A^2)^{-1}$ a la izquierda y por B a la derecha, nos queda:

$$(A^2)^{-1}\cdot A^2\cdot Y\cdot B^{-1}\cdot B=(A^2)^{-1}\cdot A\cdot B\Rightarrow Y=A^{-1}\cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$Y=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) (1 Punto). Determina los valores de m **para los que la ecuación** $AX+B=C$ **tiene solución única.**
b) (1'5 Puntos). Para $m=0$, **halla** X **tal que** $AX+B=C$.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) $AX+B=C \Rightarrow AX=C-B$. Esta ecuación tiene solución si la matriz A tiene inversa, es decir, si su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8+3m-3-2m^2+2m+4m=0 \Rightarrow -2m^2+9m+5=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}\ ;\ m=5$$

Por lo tanto, la ecuación tiene solución única para todos los valores de $m\neq -\frac{1}{2}$ y $m\neq 5$.

b) Calculamos la matriz inversa de A para $m=0$.

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{5}=\frac{\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{5}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X.

$$AX+B=C \Rightarrow AX=C-B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C-B) \Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$$

$$X=A^{-1}(C-B)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{14}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$