Inecuaciones con valor absoluto

Se considerarán sólo los tipos:

$|A(x)| < k$ y $|A(x)| \geq k$, con $k \geq 0$. (También con $\leq$ y $>$).

- La inecuación $|A(x)| < k \Leftrightarrow -k < A(x) < k$.

Su solución son los valores de x que <u>cumplen, a la vez</u>, las inecuaciones: $-k < A(x)$ y $A(x) < k$.

- La inecuación $|A(x)| \geq k \Leftrightarrow A(x) \leq -k$ o $A(x) \geq k$.

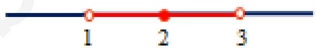
Su solución son los valores de x que <u>cumplen alguna</u> de las inecuaciones $A(x) \leq -k$ o $A(x) \geq k$.

Las <u>inecuaciones de primer grado</u> se estudiaron en el tema 1, en el apartado de intervalos. Aquí las recordamos.

Ejemplos:

a) $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

b) $|x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1$. Esto es: $1 \leq x \leq 3 \to x \in [1, 3]$.



Para obtener ese resultado puede sumarse 2 a los tres miembros de las desigualdades: $-1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow -1 + 2 \leq x - 2 + 2 \leq 1 + 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$.

c) $|2x-1| > 3 \Leftrightarrow 2x-1 < -3$ o $2x-1 > 3 \Rightarrow 2x < -2$ o $2x > 4 \Rightarrow x < -1$ o $x > 2$.

<u>Inecuaciones de segundo grado</u>: $|ax^2 + bx + c| < k$, con $a \neq 0$ (también vale $\leq$, $>$ o $\geq$)

Ejemplo:

La inecuación $|x^2 - 3x| \geq 2 \Leftrightarrow \underline{x^2 - 3x \leq -2}$ o $\underline{x^2 - 3x \geq 2}$.

La primera: $\underline{x^2 - 3x \leq -2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$, que se cumple si $x \in [1, 2]$.

La segunda: $\underline{x^2 - 3x \geq 2} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 \geq 0$, se cumple si $x \leq \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ o si $x \geq \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

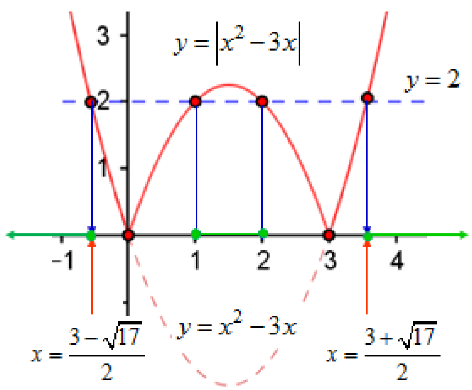
(Las soluciones de $x^2 - 3x + 2 = 0$ son: $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$).

En definitiva, su solución serán todos los valores de

$$x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [1,\ 2] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2},\ +\infty\right).$$

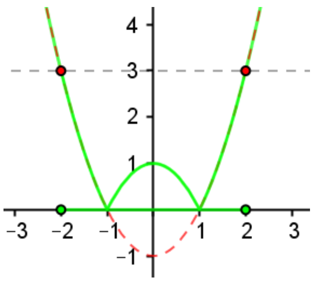
<u>Interpretación geométrica</u>:

Como puede observarse, la gráfica del valor absoluto de $y = x^2 - 3x$ es mayor o igual que 2 cuando la x toma valores en los intervalos indicados: cuando sobrepasa la línea horizontal de altura 2, la recta $y = 2$.



También puede verse que los valores solución de $|x^2 - 3x| < 2$ son $x \in (-1,\ 1) \cup (2,\ 4)$. En todos esos puntos, la gráfica toma valores menores que 2.

b) La inecuación $\left|x^2-1\right|<3$ se cumple cuando $x^2-1<-3$ o $x^2-1<3$.



La primera: $x^2-1<-3 \Rightarrow x^2<-2$, que no sucede nunca.
La segunda: $x^2-1<3 \Rightarrow x^2<4$, se cumple si $-2<x<2$.
Por tanto, $\left|x^2-1\right|<3$ cuando $x\in(-2,\ 2)$.

Si se hace la gráfica de la parábola $y=x^2-1$, línea de trazos roja, puede observarse que:

$x^2-1=0$ en $x=-1$ y $x=1$; $x^2-1<0$ si $x\in(-1,\ 1)$; $x^2-1>0$ si $x<-1$ o $x>1$;

$x^2-1>3$ si $x<-2$ o $x>2$, esto es equivalente a $\left|x^2-1\right|>3$.