Ejercicios resueltos de Selectividad. Matemáticas II.

Ana de la Fuente Cantarino

29 de mayo de 2018

Si encuentras algún error, por favor, envíame un correo para corregirlo: afuentecan@educa.jcyl.es.

Índice

Parte I

Recopilación de ejercicios

1. Junio 2010. Fase general. Opción A.

1. a) **Dadas dos funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 1 - 2x$, hallar el área del recinto plano limitado por las rectas $x = 1$, $x = 2$ y las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.**

   Solución

   b) **Dar un ejemplo de función continua en un punto y que no sea derivable en él.**

   Solución

2. a) **Si el término independiente de un polinomio $p(x)$ es -5 y el valor que toma $p(x)$ para $x = 3$ es 7, ¿Se puede asegurar que $p(x)$ toma el valor 2 en algún punto del intervalo $[0, 3]$?.**

   Solución

   b) **Calcular:**

$$\int \frac{\cos(x)}{1 + \text{sen}^2(x)} dx$$

   Solución

3. a) **Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3x3 que verifica que $B^2 = 16 \cdot I$, siendo I la matriz unidad. Calcular el determinante de B.**

   Solución

   b) **Hallar todas las matrices X que satisfacen la ecuación:**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Solución

4. **Se considera la recta** $\mathbf{r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}}$ **y el plano** $\mathbf{\pi \equiv x + y + z - 2 = 0}$.

   a) **Hallar los valores de a para los que r es paralela a** π.

   b) **Para** $\mathbf{a = 2}$, **hallar la distancia de r a** π.

   c) **Para** $\mathbf{a = 1}$, **hallar la distancia de r a** π.

Solución

2. Junio 2010. Fase general. Opción B.

1. **Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 270 cm**^{3}. **Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 5 €/cm**^{2} **y para la base un 50 % más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo.**

Solución

2. **Hallar el valor de a para que se verifique:**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x + a}{2x - 1} \right)^{x+5} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x^3}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

Solución

3. **Consideramos el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\begin{cases} 2x - y + az &= 1 + a \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + 3z &= a \end{cases}$$

   a) **Discutir el sistema para los distintos valores de a**

   b) **Resolver el sistema para** $\mathbf{a = 1}$

Solución

4. **Dados el punto** $\mathbf{P(1, 1, -1)}$, **la recta** $\mathbf{r \equiv x = \frac{y + 6}{4} = z - 3}$ **y el plano** $\mathbf{\pi \equiv 6x + 6z - 12 = 0}$, **se pide:**

   a) **Hallar el punto simétrico de P respecto del plano** π

   b) **Hallar los puntos Q de r que distan** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **unidades de longitud de** π

Solución

3. Junio 2010. Fase específica. Opción A.

1. **Dada la parábola $y = \frac{1}{3}x^2$, y la recta $y = 9$, hallar las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima que tiene un lado en la recta y los otros dos vértices en la gráfica de la parábola.**

Solución

2. **Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ se pide**

   a) **Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, y las asíntotas.**

Solución

   b) **Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 2\,, x = 4$.**

Solución

3. **Dadas las matrices:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) **Para qué valores de m existe B^{-1}?. Para m=1, calcular B^{-1}**

   b) **Para $m = 1$, hallar la matriz X tal que $X \cdot B + C = D$**

Solución

4. **Se consideran las rectas r y s dadas por las ecuaciones:**

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a}$$

   a) **Hallar el valor del parámetro a para que r y s sean perpendiculares.**

   b) **Hallar la recta t paralela a r y que pasa por el punto de s cuya coordenada z es 0.**

Solución

4. Junio 2010. Fase específica. Opción B.

1. **Calcular b y c sabiendo que la función**

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

es derivable en el punto x=0

Solución

2. **Calcular la siguiente integral:**

$$\int_{-1}^{2} |x^2 - 3x + 2| \, dx$$

Solución

3. **Discutir según los valores del parámetro a, y resolver cuando sea posible, el sistema:**

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$$

Solución

4. **Dadas las rectas:**

$$s \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-1}{2} \quad \text{y} \quad t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$$

Se pide hallar la perpendicular común a s y a t y la distancia entre ambas rectas.

Solución

5. Septiembre 2010. Fase general. Opción A.

1. **Se divide un alambre de 100m de longitud en dos segmentos de longitud x y $100 - x$. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero, y con el otro un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas. ¿Para qué valor de x dicha suma es mínima?**

Solución

2. **Determinar la función $f(x)$ tal que $f'(x) = \dfrac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$ con $f(1) = 2$.**

Solución

3. a) **Determinar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades del mismo.**

Solución

   b) **Probar que el punto $P(1, 1, 2)$ pertenece a π, y calcular la recta perpendicular a π que pasa por P.**

Solución

4. **Discutir, y resolver en los casos que sea posible, el sistema:**

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Solución

6. Septiembre 2010. Fase general. Opción B.

1. **Sea la función $f(x) = x\sqrt{(4 - x^2)}$**

   a) **Determinar el dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.**

   b) **Esbozar su gráfica.**

Solución

2. **Determinar el área limitada por la parábola de la ecuación $y^2 = x$, y la recta de ecuación $y = x - 2$.**

Solución

3. **Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 1}{2} = z$.**

Solución

4. a) **Si se sabe que el determinante** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **vale 5, calcular razonadamente:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_2 \\ b_1 & 2b_2 & 3b_3 \\ c_1 & 2c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_3 & b_2+b_3 & c_2+c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

b) **Si A es una matriz de tamaño** 2×2 **para la cual se cumple que** $A^{-1} = A^t$ **(**A^t **= traspuesta de la matriz A), ¿Puede ser el determinante de A igual a 3?**

Solución

7. Junio 2011. Opción A.

1. **Calcular el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función** $f(x) = x^3 - x + 1$**, y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1.**

Solución

2. a) **Estudiar si la función** $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ **dada por:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x - 1 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

verifica la hipótesis del Teorema de Rolle. Enunciar dicho teorema.

Solución

b) **Calcular**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - e^{-x} - x}{x \cdot \operatorname{sen}(x)}$$

Solución

3. a) **Calcular el rango de la matriz:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

b) **Si B es una matriz cuadrada de dimensión 3×3 cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de $5B$ y el de B^2.**

Solución

4. a) **Determinar la posición relativa de la recta** $r \equiv \begin{cases} y - x = 1 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$

y el plano $\pi \equiv x - y = 0$

b) **Hallar el plano perpendicular a π que contiene a r.**

Solución

8. Junio 2011. Opción B.

1. **Sea** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

a) **Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas.**

b) **Esbozar su gráfica.**

Solución

2. a) **Hallar el valor de los parámetros reales a y b para los que la función**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - ax}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$.

Solución

b) **Calcular**

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Solución

3. **Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m:**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = m + 1 \end{cases}$$

Solución

4. a) **Hallar la recta r que pasa por el punto $A = (1, -1, 0)$, está contenida en el plano $\pi \equiv x + y = 0$, y corta a la recta $s \equiv x = y = z$.**

Solución

b) **Hallar la distancia del punto $B(2, -2, 2)$ a la recta $s \equiv x = y = z$.**

Solución

9. Septiembre 2011. Opción A.

1. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Calcular dicha área.**

Solución

2. a) **Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = |x - 1|$ en el intervalo $[-2, 2]$. Calcular la función derivada de $f(x)$ en ese intervalo.**

Solución

b) **Calcular el área del recinto limitado en el primer cuadrante, por la gráfica de la función $y = \ln(x)$ y las rectas $y = 0$, $y = 1$, y $x = 0$.**

Solución

3. a) **Averiguar para qué valores de m la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.**

b) **Calcular la matriz inversa de A para m=0.**

c) **Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz $2 \cdot A$ vale -16 ¿Cuál es el orden de la matriz A?**

Solución

4. **Sean la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + (m + 1)y + mz = m + 1$. Estudiar la posición relativa de la recta y el plano según los valores de m.**

Solución

10. Septiembre 2011. Opción B.

1. **Dada la función $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$, determinar su dominio de definición, sus asíntotas, extremos relativos y puntos de inflexión. Hacer un esbozo de su representación gráfica.**

   Solución

2. **Hallar el valor de m para que el área delimitada, en el primer cuadrante, por la función $y = 4x^3$ y la recta $y = mx$ sea de 9 unidades cuadradas.**

   Solución

3. **Discutir según los valores de m y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales** $\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = m \\ x + y = 2 \end{cases}$

   Solución

4. a) **Calcular un vector unitario y ortogonal a los vectores $\tilde{v} = (1, 2, 0)$ y $\tilde{w} = (-1, 0, 1)$**

   Solución

   b) **Calcular el plano que contiene a las rectas $r \equiv \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{0} = z - 2$.**

   Solución

11. Junio 2012. Opción A.

1. **Sea $f(t) = \dfrac{1}{1 + e^t}$**

   a) **Calcular $\int f(t)dt$.**

   b) **Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$**

   Solución

2. **Dada la función $f(x) = \dfrac{a \cdot e^{2x}}{1+x}$ se pide:**

   a) **Hallar a para que la pendiente de la recta tangente a la función en $x = 0$ valga 2.**

   b) **Para $a = 1$, estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.**

   c) **Para $a = 1$, hallar sus asíntotas.**

Solución

3. **Se considera el sistema de ecuaciones** $\begin{cases} ax + y + z = (a-1)(a+2) \\ x + ay + z = (a-1)^2(a+2) \\ x + y + az = (a-1)^3(a+2) \end{cases}$

   a) **Discutir el sistema según los valores del parámetro a.**

   b) **Resolver el sistema para $a = 1$.**

   c) **Resolver el sistema para $a = -2$.**

Solución

4. **Se consideran las rectas:** $r \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$; $s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$

   a) **Justificar razonadamente que ambas rectas se cruzan.**

   b) **Hallar la perpendicular común y que corta a las dos rectas.**

Solución

12. Junio 2012. Opción B.

1. a)

$$\text{Calcular} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$$

Solución

   b) **Calcular los valores del parámetro a para que las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$ en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$ sean perpendiculares.**

Solución

2. **Se considera la función $f(x) = e^x + \ln(x)$, $x \in (0, \infty)$ donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.**

   a) **Estudiar la monotonía y las asíntotas de $f(x)$**

   b) **Demostrar que la ecuación $x^2e^x - 1 = 0$ tiene una única solución c en el intervalo $[0, 1]$**

   c) **Deducir que f presenta un punto de inflexión en c. Esbozar la gráfica de f**

Solución

3. **Sea M una matriz cuadrada que cumple la ecuación $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad.**

   a) **Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo expresar M^{-1} en términos de M e I.**

   b) **Hallar todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2 - 2M = 3I$**

Solución

4. **Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos P(2,1,3) y Q(1,3,1); los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto R(-4,7,-6).**

   a) **Calcular la ecuación de la recta r.**

   b) **Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.**

   b) **Hallar las coordenadas de uno de los otros vértices.**

Solución

13. Septiembre 2012. Opción A.

1. **Sea la función $f(x) = (2x^2 + 3)e^x$.**

   a) **Estudiar asíntotas, crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, concavidad, convexidad, y puntos de inflexión.**

   b) **Esbozar su gráfica**

Solución

2. a) **Calcular**

$$\int \frac{\sin(2x)}{3+\sin^2(x)}dx$$

Solución

b) **Calcular**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x\sin(x)}$$

Solución

3. **Se considera el sistema** $\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ x+y-z=a+1 \end{cases}$ **donde a es un parámetro real.**

Se pide:

a) **Discutir el sistema en función del valor de a.**

b) **Hallar la solución del sistema para a=1, si procede.**

Solución

4. **Dado el punto A(2,1,1) y las rectas**

$$r \equiv x = \frac{y+2}{2} = z-1 \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=2 \end{cases}$$

Se pide:

a) **Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y corta a r y s.**

b) **Hallar la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.**

Solución

14. Septiembre 2012. Opción B.

1. a) **Determinar en que puntos de la gráfica de la función**

$$y = x^3 - 6x^2 + 4x + 8$$

la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = 4x^3 + 7$

Solución

b) **Hallar el área de la región comprendida entre las rectas $x = 1$, $x = 4$ limitada por dichas rectas, la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ y el eje OX.**

Solución

2. a) **Determinar los extremos absolutos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 4$ en el intervalo [1,4].**

Solución

b) **Aplicando la definición, estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f dada por:**

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\ln^2(x)}{x - 1} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución

3. a) **Determinar, en función del valor del parámetro real a, el rango de la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$

b) **Sea C una matriz 2x2 de columnas C_1 y C_2 y de determinante 5, y sea B una matriz 2x2 de determinante 2. Si D es la matriz de columnas $4C_2$ y $C_1 - C_2$, calcular el determinante de la matriz BD^{-1}.**

Solución

4. **Sea s la recta de ecuaciones paramétricas** $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$

a) **Hallar la ecuación de recta r que pasa por el punto P(1,0,5) y corta perpendicularmente a la recta s .**

b) **Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a s.**

Solución

15. Junio 2013. Opción A.

1. **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a) **Calcular, cuando sea posible, las matrices** $C \cdot B^t$, $B^t \cdot C$, $B \cdot C$.

   Solución

   b) **Hallar a para que el sistema** $xA + yB = 4C$ **de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y, sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de a.**

   Solución

2. **Sean los puntos A(1,2,-1), P(0,0,5), Q(1,0,4) y R(0,1,6)**

   a) **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A, es paralela al plano que pasa por los puntos P,Q y R, y tal que la primera componente de su vector director es doble que la segunda.**

   Solución

   b) **Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por P,Q yR**

   Solución

3. **Sea la función**

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + bx & 0 \leq x \leq 1 \\ c\ln(x) & 1 < x \end{cases}$$

   Hallar a, b y c sabiendo que f(x) es continua en $(0, \infty)$**, la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa** $x = \dfrac{1}{16}$ **es paralela a la recta** $y = -4x + 3$ **y se cumple que** $\int_1^e f(x)dx = 2$

   Solución

4. a) **Estudiar el crecimiento de la función** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$.

   b) **Probar que la ecuación** $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ **tiene exactamente tres soluciones reales.**

   Solución

16. Junio 2013. Opción B

1. **Sea la matriz** $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

   a) **¿Para qué valores de a la matriz A es invertible?**

   b) **Estudiar el rango según los valores de a.**

   c) **Hallar a para que se cumpla** $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

Solución

2. **Sean los puntos P(1,4,-1), Q(0,3,-2) y la recta** $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 4 \end{cases}$

   a) **Hallar la ecuación del plano que pasa por P, por un punto R de la recta r y es perpendicular a la recta que pasa por Q y por R.**

   b) **Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano** $\pi \equiv x - y - 3 = 0$.

Solución

3. **Sea la función** $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

   a) **Calcular sus asíntotas y estudiar su crecimiento y decrecimiento.**

Solución

   b) **Dibujar el recinto comprendido entre la recta** $y = 1$ **, la gráfica de la función** $f(x)$ **, el eje OY y le recta** $x = 2$ **; Calcular el área de dicho recinto.**

Solución

4. **Determinar, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.**

Solución

17. Septiembre 2013. Opción A

1. a) **Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m.**

$$\begin{cases} 3x - y + mz = 0 \\ x + y = m \\ mx - 3y + mz = -2m \end{cases}$$

   b) **Resolverlo para m=0.**

Solución

2. **Sea el plano** $\pi \equiv x + y + z = 0$ **, la recta** $r \equiv x = y = z$ **, y el punto A(3,2,1)**

   a) **Hallar la recta que pasa por A, es paralela a** π **y corta a r**

Solución

   b) **Hallar los puntos de r que equidistan de A y de** π**.**

Solución

3. **Sea** $f(x) = (x + 1)e^{-x}$**. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.**

Solución

4. a) **Hallar**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x + 1)}{x^2 + 1}$$

Solución

   b) **Calcular**

$$\int \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{x + 1}dx$$

Solución

18. Septiembre 2013. Opción B

1. **Sea la matriz** $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) **Calcular** $\mathbf{M^{-1}}$

b) **Calcular la matriz X que cumple** $\mathbf{X \cdot M + M = 2M^2}$

Solución

2. **Sean las rectas** $\mathbf{r \equiv x = -y = z - 1 \quad s \equiv x - 2 = y = z - m}$

a) **Determinar m para que las rectas sean coplanarias.**

Solución

b) **Para m=2, calcular la distancia entre las rectas.**

Solución

3. a) **Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange. Dar su interpretación geométrica.**

Solución

b) **Estudiar la continuidad de la función**

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ k & x = 0 \\ \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} & x > 0 \end{cases}}$$

en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ **según los valores de k**

Solución

4. a) **Determinar las asíntotas horizontales y verticales de la función**

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}}$$

Solución

b) **Calcular** $\mathbf{\int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx}$

Solución

19. Junio 2014. Opción A

1. **Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m**

$$\begin{cases} \mathbf{mx + y = 1} \\ \mathbf{x + my = m} \\ \mathbf{2mx + 2y = m + 1} \end{cases}$$

Solución

2. **Sea π el plano que pasa por los puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) y r la recta dada por $r \equiv \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y+6}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$**

   a) **Calcular el ángulo que forman la recta r y el plano π.**

   Solución

   b) **Calcular los puntos de r que distan 6 unidades del plano π .**

   Solución

3. **Hallar la función polinómica de grado 3 sabiendo que su gráfica pasa por el punto P(1,0), que tiene por tangente en el punto de abscisa x=0 la recta de ecuación $y = 2x + 1$ y que su integral entre 0 y 1 vale 3.**

Solución

4. **Sea la función $f(x) = e^{-x^2}$. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.**

Solución

20. Junio 2014. Opción B

1. **Sea la matriz** $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$

   a) **Discutir su rango en función de los valores de a**

b) **Para $a = 1$, resolver la ecuación matricial $A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.**

Solución

2. **Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$, paralela al plano $\pi_2 \equiv x = 0$, y que pasa por el punto simétrico de B(-1,1,1) respecto de π_2.**

Solución

3. **Sea la función $f(x) = +2\sqrt{x}$.**

   a) **Hallar el dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

   b) **Calcular el punto de la gráfica de $f(x)$ más cercano al punto (4,0).**

Solución

4. **Sea la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$**

   a) **Calcular un punto de su gráfica tal que la recta tangente en dicho punto sea paralela al eje OX. Escribe la ecuación de la recta tangente.**

Solución

   b) **Calcular el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 5$.**

Solución

21. Septiembre 2014. Opción A

1. a) **Resolver la siguiente ecuación matricial $X \cdot A = B - C$, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) **Sean F_1, F_2, F_3 las filas de una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $3F_1 - F_3$, F_2 , $2F_3$.**

Solución

2. **Sea el punto $A(1,1,3)$ y la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$**

   a) **Calcular el plano perpendicular a la recta r que pase por A**

   Solución

   b) **Calcular la distancia del punto A a la recta r.**

   Solución

3. **Sea la función $f(x) = x^2e^{-x}$. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.**

   Solución

4. a) **Hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x + 4$ es paralela a la recta de ecuación $y = 5x - 7$**

   Solución

   b) **Calcular el área limitada por la parábola de ecuación $y = 2x^2$ y la recta $y = 2x + 4$.**

   Solución

22. Septiembre 2014. Opción B

1. **Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$**

   a) **Discutir el sistema según los valores de m.**

   b) **Hallar los valores de m para los que el sistema tenga alguna solución en la que $x = 2$.**

   Solución

2. a) **Dados el punto $A(3,5,1)$, la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = z + 1$ y el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$, determinar el punto B de π tal que la recta AB sea paralela a la recta r.**

b) **Hallar las coordenadas de un vector de módulo 1 que sea perpendicular a los vectores $\tilde{PQ}$, y $\tilde{PR}$, siendo P(1,3,-1), Q(2,0,1) y R(-1,1,0).**

Solución

3. **Se desea construir un depósito de chapa (en forma de prisma recto, abierto y de base cuadrada) con una capacidad de 32000 litros. ¿Cuáles han de ser las dimiensiones del depósito para que se precise la menor cantidad de chapa posible en su construcción**

Solución

4. a) **Enunciar e interpretar el Teorma de Rolle.**

Solución

b) **Hallar la primitiva de $f(x) = x^2 \ln x$ cuya gráfica pasa por el punto (1,2).**

Solución

23. Junio 2015. Opción A

1. **Dada la matriz A=** $\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ **, se pide**

a) **Hallar los valores de m para que la matriz A^{10} tenga inversa.**

b) **Para $m = 0$, calcular, si es posible, la matriz inversa de A.**

Solución

2. a) **Calcular la recta que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto P(1,2,3).**

b) **Estudia en función del parámetro a, la posición relativa de la recta** $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ **y el plano $\pi \equiv x + y + az = 1$.**

Solución

3. **Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene lados paralelos a los ejes coordenados y vértices en el borde del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x^2$.**

Solución

4. a) **Sea $g(x)$ una función continua y derivable en toda la recta real tal que $g(0) = 0 \quad g(2) = 2$. Probar que existe algún punto c del intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.**

Solución

b) **Hallar la función $f(x)$ que cumple $f'(x) = x\ln(x^2 + 1)$ y $f(0) = 1$.**

Solución

24. Junio 2015. Opción B

1. **Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my = -1 \\ (1 - 2m)x - y = m \end{cases}$, se pide:**

   a) **Discutir el sistema según los valores del parámetro m.**

   b) **Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única.**

   c) **Calcular los valores de m para que $x = -3$ y $y = 2$ sea solución.**

Solución

2. a) **¿Puede haber dos vectores $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $\tilde{u} \cdot \tilde{v} = -3$; $|\tilde{u}| = 1$ y $|\tilde{v}| = 2$?**

   b) **Hallar el valor de a para que exista una recta que pase por el punto $P(1 + a, 1 - a, a)$, corte a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ y sea paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$**

Solución

3. **Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, determinar su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.**

Solución

4. a) **Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x + 1)} \right)$**

Solución

   b) **Calcular el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, y la recta $x = e$.**

Solución

25. Septiembre 2015. Opción A

1. **Consideremos el sistema** $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ (a+3)y=0 \\ (a+2)z=1 \end{cases}$

   a) **Discutir el sistema según los valores del parámetro a.**

   b) **Resolverlo cuando sea posible.**

Solución

2. **Sean las rectas** $r \equiv x=y=z$ y $s \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ x-3z=1 \end{cases}$

   a) **Comprobar que las rectas r y s se cruzan**

   b) **Calcular la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.**

Solución

3. **Consideramos la función** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **Calcular dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.**

Solución

4. a) **Enunciar e interpretar geométricamente el Teorema de Rolle.**

Solución

   b) **Hallar la primitiva de la función** $f(x)=x^2\ln x$ **cuya gráfica pasa por el punto (1,0).**

Solución

26. Septiembre 2015. Opción B

1. **Consideremos la matriz** $M=\begin{pmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{pmatrix}$

   a) **Calcular el rango de M en función del parámetro a.**

   b) **Para a=1, resolver la ecuación** $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Solución

2. a) **Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos A(0,-1,3) y B(2,-1,1) y que pasa por el punto medio de dicho segmento.**

   b) **Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes del plano $2x + y + 2z - 2 = 0$ con los ejes coordenados.**

Solución

3. **Consideremos la función definida a trozos** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

   Hallar los valores de a, b y c para que f(x) sea continua en toda la recta real y tenga un extremo relativo en el punto (1,-1).

Solución

4. a) **Calcular** $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Solución

   b) **Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones** $\cos x$ **y** $\sin x$ **y las rectas** $x = 0$ **y** $x = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

27. Junio 2016. Opción A

1. a) **Discutir para qué valores de** $a \in \mathbb{R}$ **la matriz** $M = \begin{pmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{pmatrix}$ **tiene inversa. Calcular** M^{-1} **para a=0.**

   b) **Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y** $|B| = -5$ **, calcular** $|2B^t|$ **, donde** B^t **denota la matriz traspuesta de B.**

Solución

2. a) **Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido que el vector** $\tilde{v} = (2, 1, -2)$ **.**

   b) **Calcular un punto de la recta** $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$ **, cuya distancia al punto A=(-1,2,0) sea mínima.**

Solución

3. a) **Calcular a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto (1,1) de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto.**

   b) **Probar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una única solución real positiva.**

Solución

4. a) **Calcular** $\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$

Solución

   b) **Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$.**

Solución

28. Junio 2016. Opción B

1. a) **Discutir, según el valor del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{cases} x + y + mz = 2 \\ x + my + z = 2m \\ x + y - mz = 0 \end{cases}$$

   b) **Resolverlo para $m = 1$.**

Solución

2. **Consideremos las rectas** $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ **, y** $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

   a) **Comprobar que las rectas r y s se cruzan.**

   b) **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s.**

Solución

3. **Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo.**

Solución

4. a) **Calcular** $\lim_{x \to 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$

Solución

   b) **Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función** $f(x) = \ln x$ **, el eje OX, y la recta** $x = 3$**.**

Solución

29. Septiembre 2016. Opción A

1. a) **Discutir, en función del valor m, el sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ my + mz = 2 \end{cases}$$

   y resolverlo para $m = -1$ **.**

   b) **Para m=1 añadir una ecuación al sistema del apartado a) para obtener: en un caso un sistema compatible determinado y en otro caso un sistema incompatible.**

Solución

2. a) **Determinar la posición relativa de la recta** $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ **, y el plano** $\pi \equiv 5x - y + 2z = 4$

   b) **Dadas las rectas** $r_1 \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{5}$ **, y** $r_2 \equiv \begin{cases} -x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$ **, calcular el plano que contiene a** r_1 **y es paralelo a** r_2 **.**

Solución

3. **Dada la función** $f(x) = 2e^{-2|x|}$**, estudiar: derivabilidad, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y asíntotas.**

Solución

4. a) **Calcular** $\lim_{x\to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

Solución

b) **Consideremos la función** $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ **con** $m \geq 0$ **. Calcular el valor de m para que el área del recinto limitado por la gráfica de la función** $f(x)$ **, el eje OX y las rectas** $x = 0$ **y** $x = 2$ **, sea 10.**

Solución

30. Septiembre 2016. Opción B

1. a) **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y tal que** $|A| = 2$**. ¿Tiene inversa la matriz** A^4 **?. Calcular** $|5A^{-1}|$ **y** $|(5A)^{-1}|$**.**

b) **¿Para qué valores del parámetro a el rango de la matriz** $\begin{pmatrix} a+1 & 6 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ **es 1 ?.**

Solución

2. a) **Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano** $\pi \equiv 2x - 2y + 4z - 5 = 0$ **y que contiene a los puntos** $(-2, 0, 0)$ **y** $(0, 1, 0)$**.**

Solución

b) **Dos caras de un cubo están contenidos en los planos** $\pi_1 \equiv 2x - 2y + z - 1 = 0$ **y** $\pi_2 \equiv 2x - 2y + z + 5 = 0$**. Calcular el volumen de dicho cubo.**

Solución

3. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,1) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.**

Solución

4. **Se considera la parábola** $y = -x^2 + 2x$

a) **Calcular las rectas tangentes a dicha parábola en sus puntos de intersección con el eje OX.**

Solución

b) **Calcular el área delimitada or la gráfica de dicha parábola y las rectas tangentes obtenidas en el apartado a) .**

Solución

31. Junio 2017. Opción A

1. **Sean** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) **Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible.**

   b) **Determinar X tal que** $\mathbf{A \cdot X = 2B + I}$**, siendo** $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Solución

2. **Determinar la recta r que es paralela al plano** $\pi \equiv \mathbf{x - y - z = 0}$ **y que corta perpendicularmente a la recta** $\mathbf{s} \equiv \dfrac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{1}} = \dfrac{\mathbf{y+3}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{z-2}}{\mathbf{-4}}$ **en el punto** $\mathbf{P(2,-1,-2)}$

   Solución

3. a) **Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.**

   b) **Encontrar un intervalo en el que** $\mathbf{P(x) = x^6 + x^4 - 1}$ **tenga al menos una raíz.**

   Solución

4. a) **Calcular la recta tangente a la curva** $\mathbf{f(x) = 4e^{x-1}}$ **en el punto** $\mathbf{(1, f(1))}$.

   Solución

   b) **Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función** $\mathbf{g(x) = x^3}$ **y la recta** $\mathbf{y = 4x}$.

   Solución

5. **Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8?**

   Solución

32. Junio 2017. Opción B

1. a) **Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro** λ **:**

$$\begin{cases} \mathbf{x + \lambda y + \lambda z = 1} \\ \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + 4z = 2} \end{cases}$$

b) **Resolverlo para $\lambda = 1$.**

Solución

2. **Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0, 1, 1)$ y $Q(2, -1, -3)$ que pertenecen al plano π , determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos**

Solución

3. a) **Dado el polinomio $P(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar C para que el valor de $P(x)$ en su mínimo relativo sea 1.**

   b) **Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$**

Solución

4. **Sea**

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   a) **Encontrar a para que la función sea continua.**

Solución

   b) **Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$, $y = 1$.**

Solución

5. **La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos?**

Solución

33. Septiembre 2017. Opción A

1. a) **Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a, cuando M posee inversa.**

   b) **Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1} .**

Solución

2. a) **Consideremos los puntos $P(-1,-4,0)$ $Q(0,1,3)$ $R(1,0,3)$ .Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R.**

   b) **Calcular a para que el punto $S(3,a,2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x+y-2z+5=0$.**

Solución

3. a) **Dada la función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2+ax & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en $x=0$.**

   b) **Hallar a, b, y c para que la función $f(x)=ax^2+b\sin x+c$ verifique $f(0)=0$, $f'(0)=1$ y $f''(0)=2$.**

Solución

4. a) **Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{x^2}}{x}$.**

   Solución

   b) **Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2-2$.**

Solución

5. **De una bolsa con dos bolas blancas , dos negras y dos amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas.**

Solución

34. Septiembre 2017. Opción B

1. a) **Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

   b) **Resolverlo para m=1.**

Solución

2. a) **Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3,4)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$.**

   b) **Calcular a para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-2}{2}$, $s \equiv \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ sean perpendiculares.**

Solución

3. **Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica.**

Solución

4. a) **Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \sin x}{x^2}$.**

Solución

   b) **Calcular $\int \ln x \, dx$.**

Solución

5. **Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara?**

Solución

Parte II

Recopilación por materias

35. Análisis

35.1. Funciones y Continuidad

35.1.1.

Dar un ejemplo de función continua en un punto y que no sea derivable en él.

Junio 2010, Fase general, Opción A, E1.b)

Solución:
Respuesta abierta, podríamos escribir cualquier función a trozos que cumpla el enunciado:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq a \\ h(x) & x > a \end{cases} \text{ tal que } g(a) = h(a) \text{ y } g'(a) \neq h'(a)$$

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$
$f(x)$ no es derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

Ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$.

35.1.2.

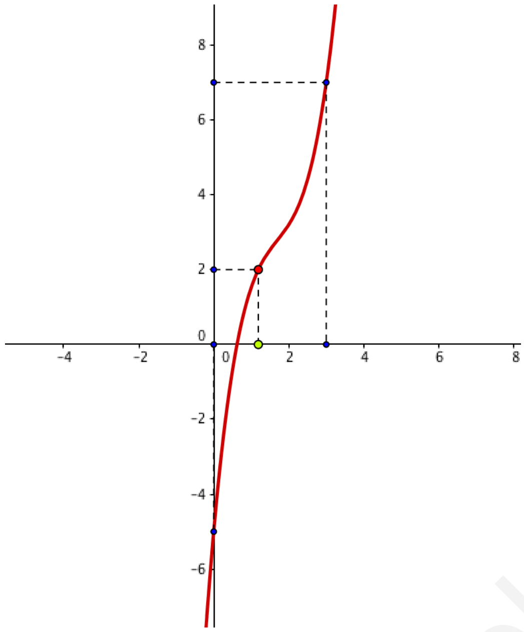
Si el término independiente de un polinomio p(x) es -5 y el valor que toma p(x) para x = 3 es 7, ¿Se puede asegurar que p(x) toma el valor 2 en algún punto del intervalo $[0, 3]$?.
Razonar la respuesta y enunciar los resultados teóricos que se utilicen.

Junio 2010, Fase general, Opción A, E2.a)

Solución:
Aplicamos el *Teorema de los valores intermedios*:

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir, para todo k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un $s \in (a, b)$, $a < s < b$, tal que $f(s) = k$.

El término independiente de un polinomio es igual a $p(0)$, así $p(0) = -5$ y por otro lado $p(3) = 7 \Rightarrow$ como $-5 < 2 < 7$ existe $s \in [0, 3]$ tal que $p(s) = 2$.



35.1.3.

Estudiar si la función $\mathbf{f}:[\mathbf{0},\mathbf{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por:

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\sqrt{\mathbf{x}} & \textbf{si} \quad \mathbf{0\le x\le 1}\\ -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{x^2}+\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\mathbf{x}-\mathbf{1} & \textbf{si} \quad \mathbf{1<x\le 2}\end{cases}$$

verifica la hipótesis del Teorema de Rolle. Enunciar dicho teorema.

Junio 2011. Opción A, E2.a

Solución:

Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ donde la derivada de la función se anula, $f'(c)=0$.

La función dada está definida a trozos, por un lado la raíz de números no negativos, luego continua en $[0,1)$, por otro lado una función polinómica, luego continua en $(1,2]$. Veamos la continuidad en $x=1$:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x-1=1$$

Por tanto $f(x)$ es continua en $[0,2]$.

Estudiemos su derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ -3x + \dfrac{7}{2} & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} -3x + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego $f(x)$ es derivable en $(0, 2)$.

Además $f(0) = 0$ y $f(2) = -6 + 7 - 1 = 0$. La hipótesis del teorema se cumple y por tanto existe al menos un $c \in (0, 2)$ donde la derivada se anula, en efecto:

$$-3x + \frac{7}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7}{6} \in (0, 2)$$

35.1.4.

a) Hallar el valor de los parámetros reales a y b para los que la función

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{\sin(x) - ax}}{\mathbf{x^2}} & \textbf{si } \mathbf{x > 0} \\ \mathbf{x^2 + b} & \textbf{si } \mathbf{x \leq 0} \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$.

Junio 2011. Opción B, E2.a.

Solución:

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Estudiemos el caso $x = 0$.

$$f(0) = b = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x) - ax}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - a}{2x}$$

Para que el límite exista (no sea ∞), debe ser $a = 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin(x)}{2} = 0$$

Luego para que la función sea continua deben ser $b = 0$ y $a = 1$.

$\overset{*}{=}$ Se ha aplicado la *regla de L'Hopital* para resolver las indeterminaciones.

35.1.5.

Calcular

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\ln(\mathbf{1}+\mathbf{x})+\ln(\mathbf{1}-\mathbf{x})}{\mathbf{x}\sin(\mathbf{x})}$$

Septiembre 2012. Opción A, E2.b.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x\sin(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{-1}{1-x}}{\sin(x)+x\cos(x)} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\dfrac{-1}{(1-x)^2}}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{-2}{2} = -1$$

35.1.6.

Aplicando la definición, estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f dada por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x}-\mathbf{x^2} & \mathbf{0}\le\mathbf{x}\le\mathbf{1} \\ \dfrac{\ln^{\mathbf{2}}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}-\mathbf{1}} & \mathbf{1}<\mathbf{x}\le\mathbf{2} \end{cases}$$

en el punto $\mathbf{x}=\mathbf{1}$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Septiembre 2012. Opción B, E2.b.

Solución:

Continuidad en $x=1$:

$f(x)$ es continua en $x=1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$ Comprobemos que este límite existe:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} x - x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln^2(x)}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\ln(x)\dfrac{1}{x}}{1} = 0$$

Luego efectivamente es continua en $x=1$.

Derivabilidad en $x=1$:

$f(x)$ es derivable en $x=1 \Leftrightarrow$ existe el $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

Veamos los límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{\ln^2(1+h)}{1+h-1}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln^2(1+h)}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\ln(1+h)\dfrac{1}{1+h}}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h+h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1+h}}{1+2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{(1+h)(1+2h)} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)-(1+h)^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1-h = -1$$

Luego $f(x)$ no es derivable en $x=1$.

35.1.7.

Estudiar la continuidad de la función

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{e^{\frac{1}{x}}} & \mathbf{x<0} \\ \mathbf{k} & \mathbf{x=0} \\ \dfrac{\mathbf{1-\cos(x)}}{\mathbf{\sin(x)}} & \mathbf{x>0} \end{cases}$$

en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{\mathbf{2}}, \frac{\pi}{\mathbf{2}}\right)$ **según los valores de k**

Septiembre 2013. Opción B. E3.b

Solución:

$f(0)=k$

$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$

Luego $f(x)$ es continua en $x=0$ si $k=0$ y discontinua en otro caso.

35.1.8.

Determinar las asíntotas horizontales y verticales de la función

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2-x-2}}$$

Septiembre 2013. Opción B. E4.a

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-x-2}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-x-2}=0$$

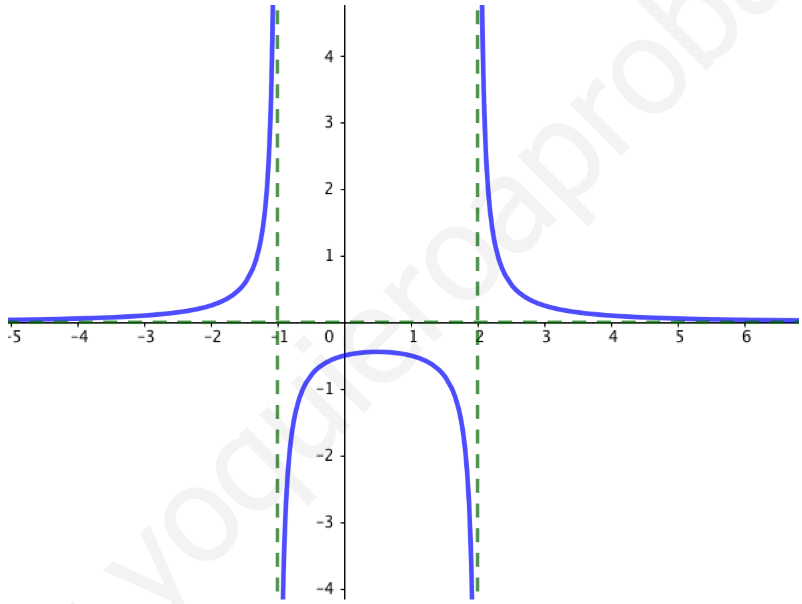
Hay una asíntota horizontal en $y=0$.

$$x^2-x-2=(x-2)\cdot(x+1)$$

Hay dos asíntotas verticales: $x=2$ y $x=-1$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)(x+1)}=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)(x+1)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x-2)(x+1)}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x-2)(x+1)}=+\infty$$



35.1.9.

Calcular $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}(\cos\mathbf{x})^{\frac{1}{\mathbf{x^2}}}$

Septiembre 2015. Opción B, E4.a

Solución:

$$L=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}\text{ Indeterminación}$$

Resolvemos la indeterminación utilizando el límite del número e

$$\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \xrightarrow{g(x)\to\infty} e$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x - 1}}\right]^{\dfrac{1}{\cos x - 1}\cdot\dfrac{\cos x - 1}{x^2}} \Rightarrow L = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{L'Hôpital} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} = \text{L'Hôpital} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

35.1.10.

Calcular $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}^+}(\mathbf{1}+\mathbf{x^2})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}}$

Junio 2016. Opción B, E4.a

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty]$$

Utilizaremos el límite del número e para salvar esta indeterminación.

$$(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}\right]^{x^2\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x} = e^0 = 1$$

35.1.11.

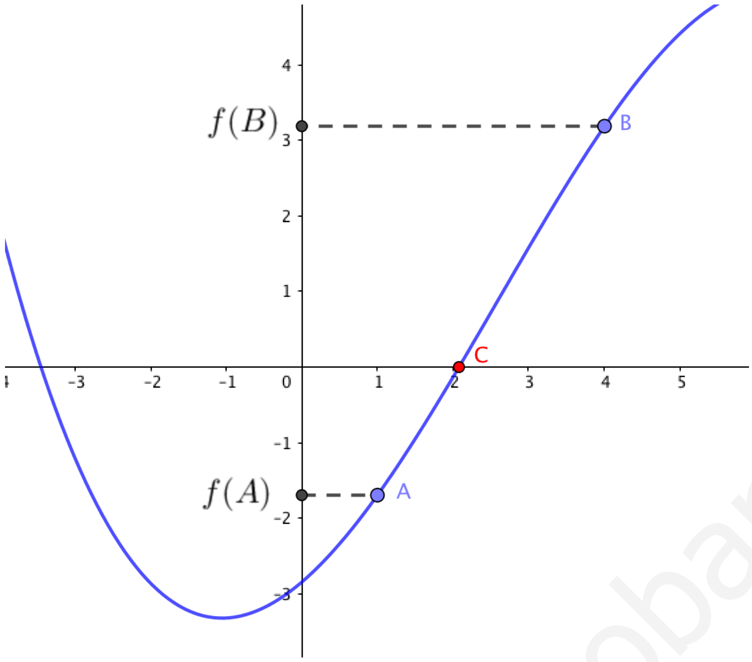
a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.

b) Encontrar un intervalo en el que $\mathbf{P(x) = x^6 + x^4 - 1}$ tenga al menos una raíz.

Junio 2017. Opción A. E3

Solución:

a) Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma en sus extremos valores de signo contrario, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



Geométricamente este teorema afirma que si la función es continua, y en un extremo la función está por debajo o por encima del eje OX, y en el otro extremo está por encima o por debajo respectivamente, entonces necesariamente la función cortará al eje OX en, al menos, un punto.

b) Aplicando el teorema de Bolzano al intervalo $[0,1]$, puesto que $P(0) = -1$ y $P(1) = 1$, existe al menos un $c \in (0,1)$ tal que $P(c) = 0$.

35.1.12.

Sea

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{(x-1)^2} & \mathbf{si\ x \leq 1} \\ \mathbf{a + \ln x} & \mathbf{si\ x > 1} \end{cases}$$

a) Encontrar a para que la función sea continua.

Junio 2017. Opción B, E4.a

Solución: Para que la función sea continua en $x = 1$ tienen que verificarse las igualdades: $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x\to 1^+} a + \ln x = a$$

Luego $a = 0$.

35.2. Derivada y sus aplicaciones

35.2.1.

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 270 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 5 €/cm^2 y para la base un 50 % más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo.

Junio 2010, Fase general, Opción B, E1

Solución:

Llamemos x al lado del cuadrado de la base e y a la altura de la caja. La función que nos da el coste será:

$$F(x) = 5 \cdot (x^2 + 4xy) + 7,5 \cdot x^2$$

Como el volumen es fijo, podemos despejar y en función de x imponiendo esta condición

$$x^2y = 270 \Rightarrow y = \frac{270}{x^2}$$

Sustituimos y en la función F:

$$F(x) = 12,5 \cdot x^2 + \frac{5400}{x}$$

Buscamos un mínimo igualando su derivada a 0.

$$F'(x) = 25x - \frac{5400}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 6$$

Comprobamos que es mínimo:

$$F''(x) = 25 + \frac{10800}{x^3} \Rightarrow F''(6) > 0$$

Luego efectivamente son las dimensiones que buscamos:
Lado del cuadrado de la base $= 6\,cm$.
Altura de la caja $= \frac{270}{36} = 7,5\,cm$.

35.2.2.

Hallar el valor de a para que se verifique:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+a}{2x-1}\right)^{x+5} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

Junio 2010, Fase general, Opción B, E2

Solución:

Aplicamos la *regla de L'Hopital* para calcular el segundo límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^3}{sen^2(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^2}{2sen(x)cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^2}{sen(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2-6x}{2cos(2x)}=1$$

Veamos el primer límite:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{2x+a}{2x-1}\right]^{x+5}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-1+a+1}{2x-1}\right)^{x+5}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{a+1}{2x-1}\right)^{x+5}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{a+1}}\right)^{\left(\frac{2x-1}{a+1}\right)\cdot\left(\frac{a+1}{2x-1}\right)\cdot\left(\frac{x+5}{1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(a+1)(x+5)}{2x-1}}=e^{\frac{a+1}{2}}$$

Por tanto para que los dos límites sean iguales se tendrá que verificar:

$$a+1=0\Longrightarrow a=-1$$

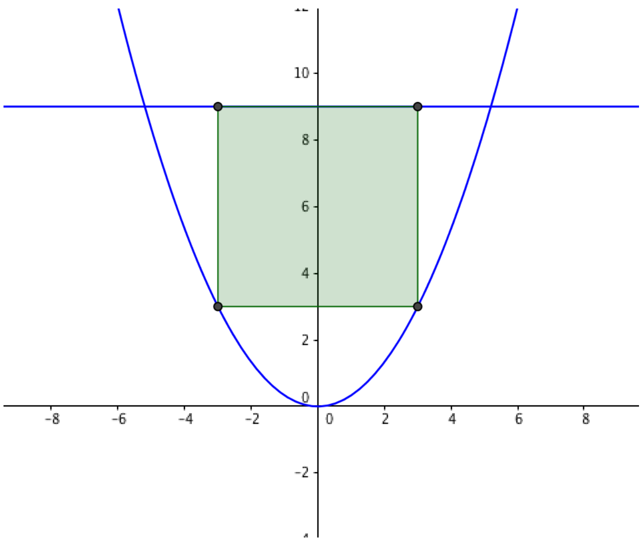
35.2.3.

Dada la parábola $\mathbf{y=\frac{1}{3}x^2}$, y la recta $\mathbf{y=9}$, hallar las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima que tiene un lado en la recta y los otros dos vértices en la gráfica de la parábola.

Junio 2010, Fase específica, Opción A, E1

Solución:

Sea $P(x_0,y_0)$ un punto de la parábola, $\Rightarrow y_0=\frac{1}{3}x_0$.
Si este es un vértice, el otro vértice que forma el rectángulo será $P'(-x_0,y_0)$.



El área del rectángulo es base x altura $= 2x_0(9-y_0)$ que tendrá que ser máxima, para ello consideramos la función que nos da el área:

$$A(x) = 2x(9-\frac{1}{3}x^2) = 2x(\frac{27-x^2}{3}) = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

Buscamos un máximo, igualando a cero la derivada:

$$F'(x) = 18 - 2x^2 = 2(9-x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm 3$$

Comprobamos que 3 es un máximo utilizando la segunda derivada:

$$F''(x) = -4x \quad F''(3) = -12 < 0$$

Por tanto las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

Largo$= 2\cdot 3 = 6\,u$

Alto$= 9 - \frac{1}{3}\cdot 3^2 = 9-3 = 6\,u$

Luego es **un cuadrado de lado 6 unidades de longitud.**

35.2.4.

Dada la función $\mathbf{f(x) = \frac{x+1}{x-1}}$ se pide

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, y las asíntotas.

Junio 2010, Fase específica, Opción A, E2.a)

Solución:

La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ es discontinua en $x = 1$. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$\Rightarrow f'(x) < 0\ \forall x \in Dom(f)$ luego la función es **decreciente** en todo su dominio.

- Concavidad y Convexidad:

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 & \text{si } x-1<0 \\ f''(x) > 0 & \text{si } x-1>0 \end{cases}$$

Por tanto:

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 1)$

$f(x)$ es cóncava en $(1, +\infty)$

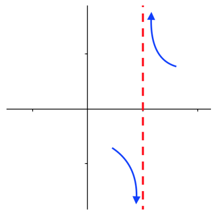
- Asíntotas:

  - Asíntotas verticales:

    Hay una asíntota vertical en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$$

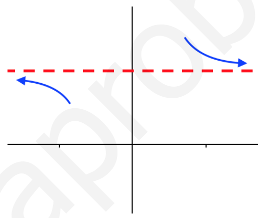


  - Asíntotas horizontales:

    Hay una asíntota horizontal en $y = 1$ tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

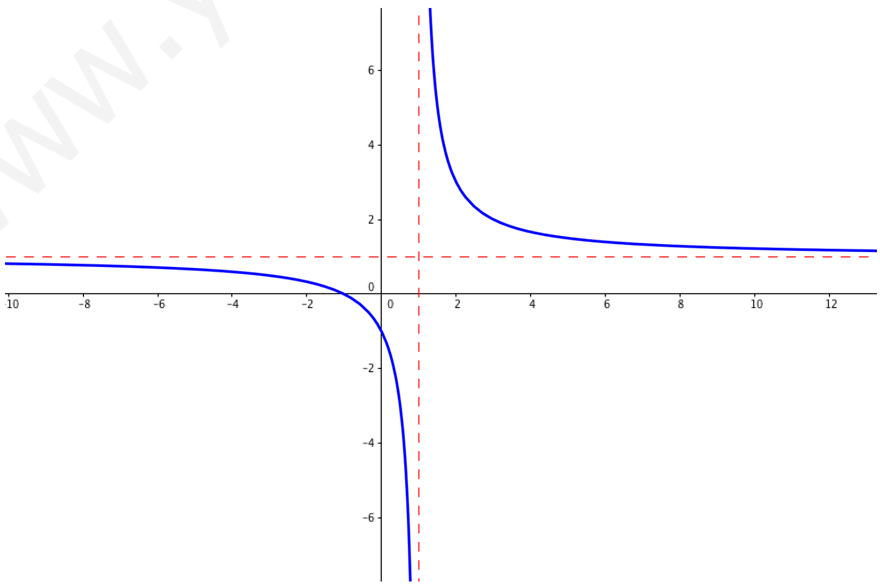


  - Asíntotas Oblicuas:

    La función no tiene asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2 - x} = 0$$

Esbozo de la gráfica:



35.2.5.

Calcular b y c sabiendo que la función

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2 + bx + c} & \mathbf{si\ x \leq 0} \\ \dfrac{\mathbf{ln(x+1)}}{\mathbf{x}} & \mathbf{si\ x > 0} \end{cases}$$

es derivable en el punto x=0

Junio 2010, Fase específica, Opción B, E1.

Solución:

$f(x)$ debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

$$f(0) = c \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$f(x)$ es derivable en $x = 0$ luego la función derivada debe ser continua:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0) = b = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$ .Calculemos el límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \ln(x+1) - (x+1)\frac{1}{x+1}}{x^2 + (x+1)2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln(x+1)}{3x^2 + 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

$\stackrel{*}{=}$ Se ha aplicado la *regla de L'Hopital* para resolver las indeterminaciones.

35.2.6.

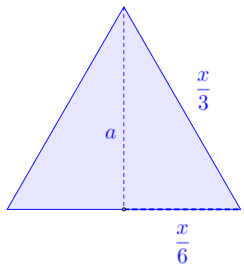
Se divide un alambre de 100m de longitud en dos segmentos de longitud x y $\mathbf{100 - x}$. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero, y con el otro

un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas. ¿Para qué valor de x dicha suma es mínima?

Septiembre 2010, Fase ganeral, Opción A, E1.

Solución:

Calculamos la altura del triángulo aplicando el *Teorema de Pitágoras*:



$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + a^2$$

$$a^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} = \frac{x^2}{12}$$

$$a = \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{6}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{36}$$

$$\text{Área del cuadrado} = \text{lado} \times \text{lado} = \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$$

Luego la función que nos da la suma de las áreas es:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{6^2} + \frac{1}{4^2}(100 - x)^2$$

Buscamos un mínimo, para ello calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{3}x}{6^2} + \frac{1}{4^2}2(100 - x)(-1) = \frac{\sqrt{3}x}{18} + \frac{x - 100}{8} = \frac{4\sqrt{3} + 9}{72}x - \frac{25}{2}$$

Igualamos a cero la derivada:

$$\frac{4\sqrt{3} + 9}{72}x - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{900}{4\sqrt{3} + 9} \approx 56,5m$$

Comprobamos que es un mínimo utilizando la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{3} + 9}{72} > 0 \quad \forall x$$

Luego efectivamente $x = \dfrac{900}{4\sqrt{3} + 9}$ es el mínimo buscado.

35.2.7.

Sea la función $\mathbf{f(x) = x\sqrt{(4 - x^2)}}$

a) **Determinar el dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.**

b) **Esbozar su gráfica.**

Septiembre 2010, Fase ganeral, Opción B, E1.

Solución:

- Dominio:

$$4-x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow (2+x)(2-x) \geq 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} a) \begin{cases} (2+x) \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ (2-x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2,2] \\ \\ b) \begin{cases} (2+x) \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \\ (2-x) \leq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Dom(f) = [-2,2]$$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow 2-x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

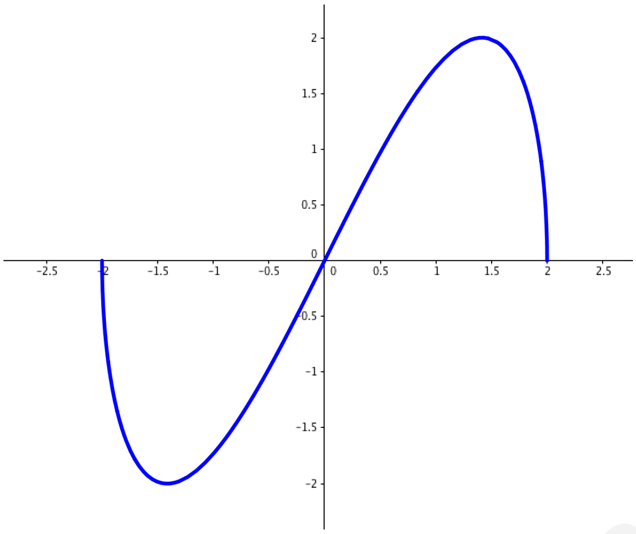
Veamos el signo de la derivada:

	$(-2,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},2)$
$sig(f') = sig(2-x^2)$	-	$+$	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

La función es creciente en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ y decreciente en $(-2,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},2)$

- Extremos relativos:

La función alcanza un máximo en $x = \sqrt{2}$ y un mínimo en $x = -\sqrt{2}$.



b) Esbozo de la función:

35.2.8.

Calcular

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{cos(2x) - e^{-x} - x}}{\mathbf{x \cdot sen(x)}}$$

Junio 2011. Opción A, E2.b.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^{-x} - x}{x\cdot\sin(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x) + e^{-x} - 1}{\sin(x) + x\cos(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x) - e^{-x}}{2\cos(x) - x\sin(x)} = -\frac{5}{2}$$

$\stackrel{*}{=}$ Se ha aplicado la *regla de L'Hopital* para resolver las indeterminaciones.

35.2.9.

Sea $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}}$

a) **Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas.**

b) **Esbozar su gráfica.**

Junio 2011. Opción B, E1.

Solución:

$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x-2$	-	-	-	$+$
x	-	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
$f(x)$ es decreciente en $(0, 2) - \{1\}$

- Extremos relativos.

  En $x = 0$, $f(x)$ presenta un máximo, $f(0) = -3$, en el punto $P(0, -3)$

  En $x = 2$, $f(x)$ presenta un mínimo, $f(2) = 1$, en el punto $Q(2, 1)$

- Intervalos de concavidad y convexidad.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

  Simplificamos antes de operar:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x)\cdot 2}{(x-1)^3}$$

  Operando:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$sig(f''(x)) = sig(x-1)^3 = sig(x-1) \Longrightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ f''(x) > 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

  $f(x)$ es convexa en $(-\infty, 1)$
  $f(x)$ es cóncava en $(1, +\infty)$

- Asíntotas.

  - Verticales.

$f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+3}{x-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x+3}{x-1} = +\infty$$

- Horizontales.

  $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+3}{x-1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x+3}{x-1} = +\infty$$

- Oblicuas.

  $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $y = x - 2$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+3}{x^2-x} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x+3}{x^2-x} = 1$$

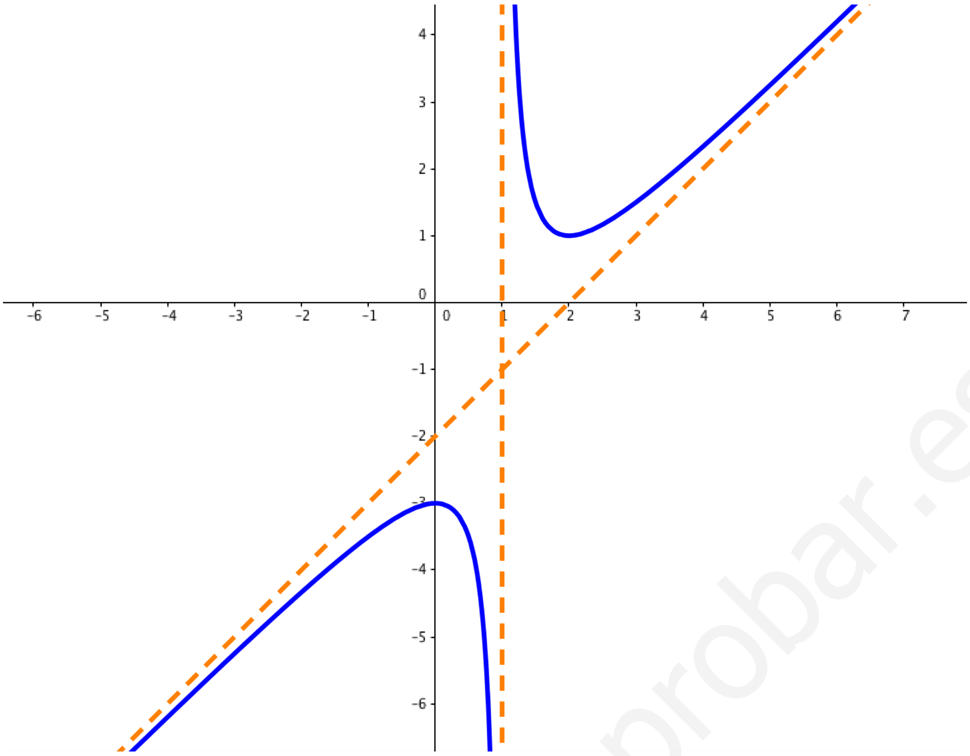
$$(f(x)-x) = \frac{x^2-3x+3}{x-1} - x = \frac{-2x+3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x+3}{x-1} = -2$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-2x+3}{x-1} = -2$$

b) Esbozo de la gráfica:
Cortes con los ejes:
No hay cortes con el eje OX.

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow x^2-3x+3 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 3}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Corte con el eje OY coincide con el máximo local $P(0, -3)$

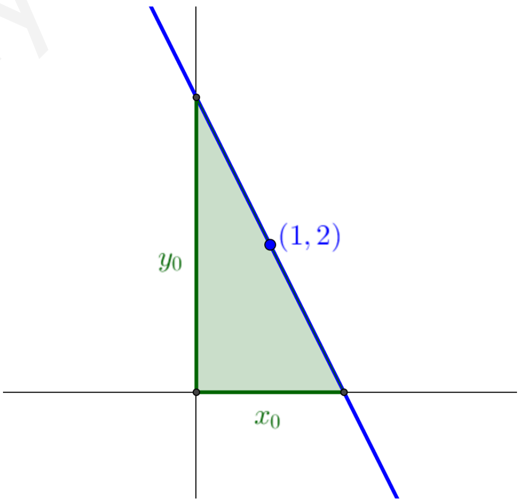


35.2.10.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2)$ y determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Calcular dicha área.

Septiembre 2011. Opción A, E1.

Solución:



La ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2)$ y tiene pendiente $-\dfrac{y_0}{x_0}$ es:

$$r \equiv y - 2 = -\frac{y_0}{x_0}(x-1)$$

Con $x_0, y_0 \neq 0$. El punto $(x_0, 0) \in r$ luego verifica esta ecuación:

$$-2 = -\frac{y_0}{x_0}(x_0 - 1) \quad \Rightarrow -2x_0 = y_0x_0 - y_0 \quad \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0 - 1}$$

El área del triángulo que forma la recta con los ejes es $A = \dfrac{x_0 \cdot y_0}{2}$, así la función que nos da el área del triángulo en función del valor de x_0 es:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

Buscamos un mínimo. Derivamos la función e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{no nos sirve, } x_0 \neq 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Calculamos la segunda derivada para comprobar si $x = 2$ es un mínimo:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x)\cdot 2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2}{(x-1)^3} \quad \Rightarrow f''(2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow x = 2 \text{ es un mínimo.}$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$r \equiv y - 2 = -2(x-1)$$

$$y = -2x + 4$$

Y el área del triángulo de área mínima es:

$$A = f(2) = \frac{4}{1} = 4\, u^2$$

35.2.11.

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $\mathbf{f(x) = |x-1|}$ en el intervalo $[-2, 2]$. Calcular la función derivada de f(x) en ese intervalo.

Septiembre 2011. Opción A, E2.a.

Solución:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

En nuestro caso:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

La función es continua en $[-2,-2]-\{1\}$. Veamos en el punto $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1+1 = 0$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1-1 = 0$$

Luego $f(x)$ es continua en $[-2,-2]$.

Estudiemos su derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$-1 = \lim_{x\to 1^-} f'(x) \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

Por tanto $f(x)$ no es derivable en el punto $x=1$.

35.2.12.

Dada la función $\mathbf{y = \frac{ln(x)}{x}}$, determinar su dominio de definición, sus asíntotas, extremos relativos y puntos de inflexión. Hacer un esbozo de su representación gráfica.

Septiembre 2011. Opción B. E1.

Solución:

- Dominio: $Dom(f) = (0, \infty)$
- Asíntotas verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

- Asíntotas horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- Asíntotas oblicuas: No hay.

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \ln(x) \Rightarrow x = e \longrightarrow P(e, \frac{1}{e})$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3} \quad \to f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$$

$$\Rightarrow P(e, \frac{1}{e}) \textbf{ es un máximo}$$

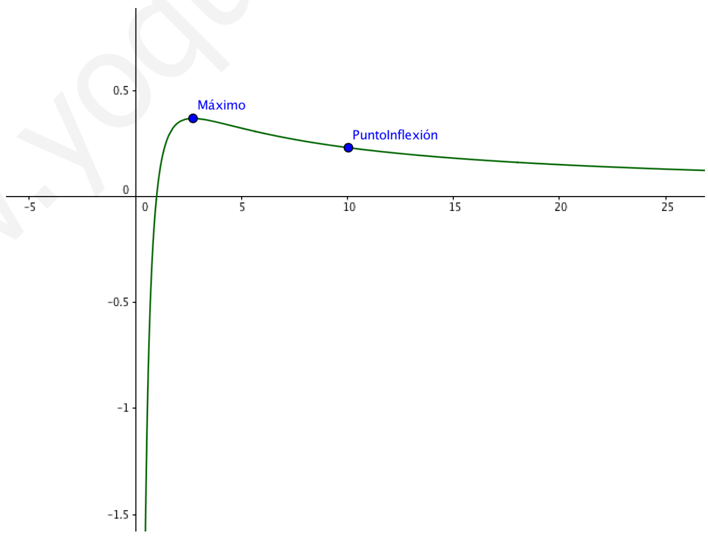
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ln(x) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}} \longrightarrow PI(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}})$$

$$f'''(x) = \frac{(2\frac{1}{x})\cdot x^3 - (2\ln(x)-3)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{11-6\ln(x)}{x^4}$$

$$f'''(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{11-6\ln(e^{\frac{3}{2}})}{e^6} = \frac{2}{e^6} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad PI(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}) \textbf{ es un punto de inflexión}$$

- Esbozo de la gráfica:
  Cortes con el eje OX: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$



35.2.13.

Dada la función $\mathbf{f(x) = \frac{a\cdot e^{2x}}{1+x}}$ se pide:

a) **Hallar a para que la pendiente de la recta tangente a la función en $\mathbf{x = 0}$ valga 2.**

b) Para a = 1, estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

c) Para a = 1, hallar sus asíntotas.

Junio 2012, Opción A, E2.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{2ae^{2x}(1+x) - ae^{2x}}{(1+x)^2} = \frac{ae^{2x}(1+2x)}{(1+x)^2}$$

$$f'(0) = a \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

b)

$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{(1+x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2x}(1+2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
$(1+2x)$	-	-	+
$f'(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) - \{-1\}$.

$f(x)$ es creciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

Mínimo: $x = -\dfrac{1}{2}$; $f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{e^{-1}}{1-1/2} = \dfrac{2}{e}$;

$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right)$$

c) Asíntotas:

- Verticales: $\quad x = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{e^{2x}}{1+x} = -\infty$$

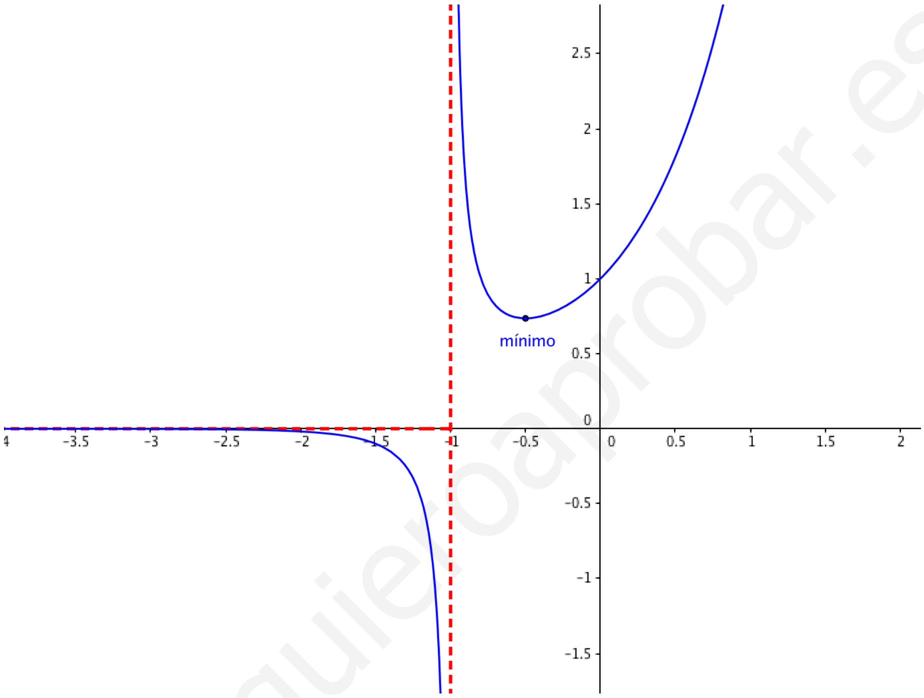
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{e^{2x}}{1+x} = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$ si $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{-x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^-2x}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}(1-x)} = 0$$

- Oblicuas: No tiene.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x+x^2} = \infty$$



35.2.14.

Calcular los valores del parámetro a para que las tangentes a la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3}$ en los puntos de abscisas $\mathbf{x = 1}$ y $\mathbf{x = -1}$ sean perpendiculares.

Junio 2012, Opción B, E1.b)

Solución: Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares $\Leftrightarrow m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

Calculamos las pendientes de las rectas tangentes:

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x$$

$$m_1 = f'(1) = 3a + 4 \quad m_2 = f'(-1) = 3a - 4$$

$$\Rightarrow 3a + 4 = -\frac{1}{3a-4} \quad \Rightarrow 9a^2 - 16 = -1 \quad \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

35.2.15.

Se considera la función $\mathbf{f(x) = e^x + \ln(x)}$, $\mathbf{x \in (0, \infty)}$ donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

a) **Estudiar la monotonía y las asíntotas de $\mathbf{f(x)}$**

b) **Demostrar que la ecuación $\mathbf{x^2e^x - 1 = 0}$ tiene una única solución c en el intervalo $[\mathbf{0, 1}]$**

c) **Deducir que f presenta un punto de inflexión en c. Esbozar la gráfica de f**

Junio 2012, Opción B, E2

Solución:

a) Asíntotas:

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^x + \ln(x) = -\infty$

Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^x + \ln(x) = \infty$

No hay asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x + \ln(x)}{x} = \infty$

No hay asíntotas oblicuas.

Monotonía:

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(x)$ es positiva $\forall x \in (0, \infty)$

La función es monótona creciente.

b) Consideremos la función $g(x) = x^2e^x - 1 \quad x \in [0, 1]$ esta función es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$, además $g(0) = -1 < 0$ y $g(1) = e - 1 > 0$ aplicando el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$.

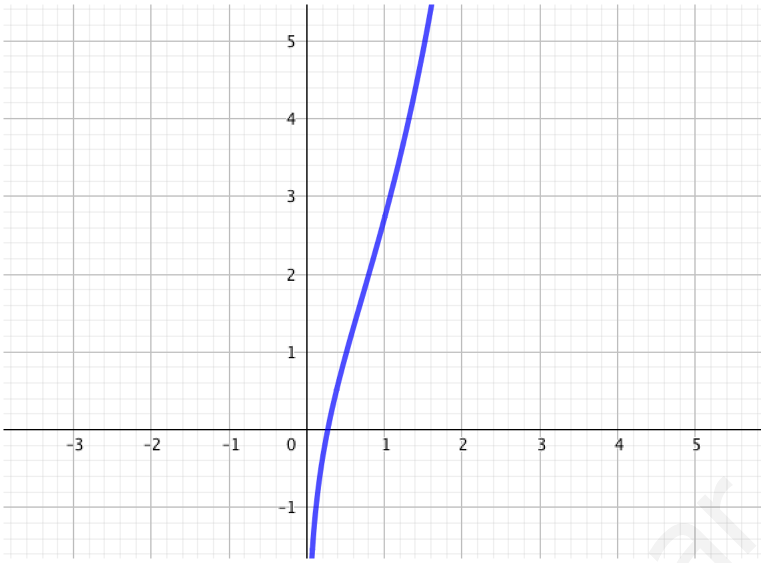
Es única: si consideramos la derivada

$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2 + x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ luego $g(x)$ es monótona creciente en $(0, 1)$, y por tanto no puede tener otra raíz.

c)

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2}$$

Por el apartado b) existe c tal que $f''(c) = 0$, luego f presenta en c un punto de inflexión.



35.2.16.

Sea la función $\mathbf{f(x) = (2x^2 + 3)e^x}$.

a) **Estudiar asíntotas, crecimiento, decrecimiento, extremos relativos, concavidad, convexidad, y puntos de inflexión.**

b) **Esbozar su gráfica**

Septiembre 2012, Opción A, E1

Solución:

Asíntotas:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2+3)e^x = +\infty$
No hay asíntotas horizontales para $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+3)e^x = 0$
Hay una asíntota horizontal , $y = 0$, para $x \to -\infty$

No hay asíntotas verticales, la función es continua en todo $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^2+3)e^x}{x} = \infty$
No hay asíntotas oblicuas.

Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos:

$$f'(x) = (4x)e^x + (2x^2+3)e^x = (2x^2+4x+3)e^x$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+4x+3 = 0$$

No hay solución real, por tanto la función derivada es positiva en todo $\mathbb{R}$ y $f(x)$ es monótona creciente en todo $\mathbb{R}$. Tampoco hay extremos relativos.

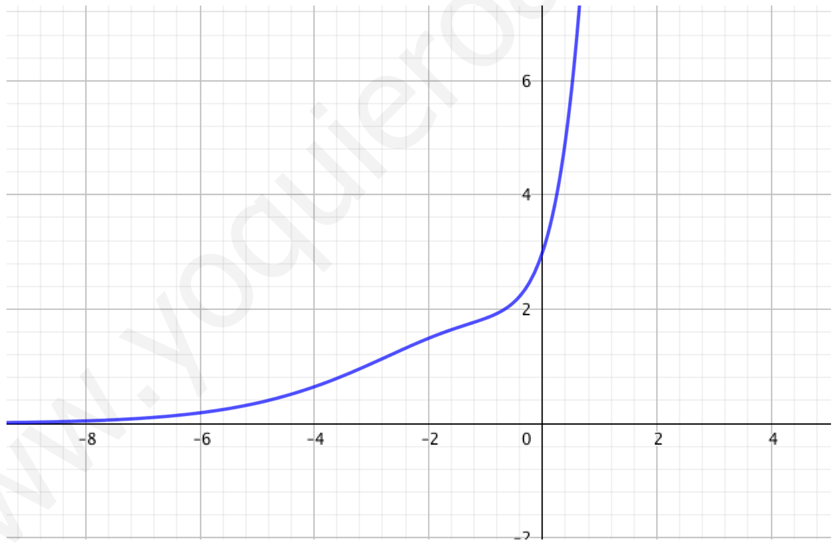
Concavidad, convexidad y puntos de inflexión:

$$f''(x) = (4x+4)e^x + (2x^2+4x+3)e^x = (2x^2+8x+7)e^x$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+8x+7=0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-8 \pm \sqrt{8}}{4} = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$(-\infty, -2-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-2-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

La función es cóncava en $(-\infty, -2-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (-2+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.
La función es convexa en $(-2-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2+\frac{\sqrt{2}}{2})$.
La función tiene dos puntos de inflexión en $x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y en $x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Esbozo de su gráfica:



35.2.17.

Determinar en que puntos de la gráfica de la función

$$\mathbf{y = x^3 - 6x^2 + 4x + 8}$$

la recta tangente a la misma es paralela a la recta $\mathbf{y = 4x^3 + 7}$

Septiembre 2012, Opción B, E1

Solución: Para que sean paralelas deben tener la misma pendiente.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 4 = 4 \quad \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

35.2.18.

Determinar los extremos absolutos de la función $\mathbf{f(x) = x^2 - 4x + 4}$ en el intervalo [1,4].

Septiembre 2012, Opción B, E2a

Solución:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

	$(1,2)$	$(2,4)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$. Es monótona decreciente entre $x = 1$ y $x = 2$. Es monónota creciente entre $x = 2$ y $x = 4$; como $f(1) = 1$ y $f(4) = 4$ podemos concluir:

$f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ en $[1,4]$.

$f(x)$ tiene un máximo absoluto en $x = 4$ en $[1,4]$.

35.2.19.

Sea la función

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + bx & 0 \le x \le 1 \\ c\ln(x) & 1 < x \end{cases}}$$

Hallar a, b y c sabiendo que f(x) es continua en $(\mathbf{0}, \infty)$, la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa $\mathbf{x = \dfrac{1}{16}}$ es paralela a la recta $\mathbf{y = -4x + 3}$ y se cumple que $\mathbf{\int_1^e f(x)dx = 2}$

Junio 2013, Opción A, E3

Solución:

$f(x)$ es continua $\Rightarrow f(1) = a + b = \lim\limits_{x\to 1^+} c\ln(x) = 0 \quad \Rightarrow a + b = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2\sqrt{x}} + b & 0 < x < 1 \\ \\ \dfrac{c}{x} & 1 < x \end{cases} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{16}}} + b = 2a + b = -4$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \quad b = 4$$

$$2 = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e c\ln(x)dx = c\int_1^e \ln(x) = [*] = c\left[x\ln(x) - x\right]_1^e = c$$

$$[*] \int udv = uv - \int vdu \quad \Rightarrow \quad \int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$$

$$u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x}dx \quad dv = dx \quad v = \int dx = x$$

Por tanto la solución es $a = -4$, $b = 4$, $c = 2$.

35.2.20.

a) **Estudiar el crecimiento de la función $\mathbf{f(x) = x^3 + 3x^2 - 3}$.**

b) **Probar que la ecuación $\mathbf{x^3 + 3x^2 - 3 = 0}$ tiene exactamente tres soluciones reales.**

Junio 2013, Opción A, E4

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x+2) = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$3x$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$
$f(x)$ es decreciente en $(-2, 0)$

b) Consideremos el intervalo $[-3,-2]$ donde $f(x)$ es monótona creciente, y el valor de la función cambia de signo en los extremos, $f(-3)=-3$ y $f(-2)=1$, aplicando el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe un $c_1 \in (-3,-2)$ tal que $f(c_1)=0$. Además esta raíz es única en este intervalo, por ser la función monótona creciente en el intervalo.

Razonando de la misma manera en el intervalo $[-2,0]$, la función es continua y cambia de signo en los extremos, $f(-2)=1$ y $f(0)=-3$, aplicando el teorema de Bolzano, existe $c_2 \in (-2,0)$ tal que $f(c_2)=0$ y además es único ya que la función es decreciente.

Y considerando ahora el intervalo $[0,1]$, la función cambia de signo en los extremos, $f(0)=-3$ y $f(1)=1$, por Bolzano exite $c_3 \in (0,1)$ tal que $f(c_3)=0$, y además es único por se la función monótona creciente en este intervalo.

35.2.21.

Sea la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}}$
a) Calcular sus asíntotas y estudiar su crecimiento y decrecimiento.

Junio 2013. Opción B. E3.a)

Solución:

Asíntotas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x+2} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x+2} = 1$$
$$\Rightarrow \text{Hay una asíntota horizontal en } y = 1$$
$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x-2}{x+2} = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty$$
$$\Rightarrow \text{Hay una asíntota vertical en } x = -2$$

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} \qquad \Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall x \in Dom(f)$$

La función es creciente en todo su dominio.

35.2.22.

Determinar, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.

Junio 2013. Opción B. E4

Solución:

Sea x la base del triángulo e y la longitud de los otros dos lados. El perímetro es 6 luego

$$x + 2y = 6 \quad \Rightarrow x = 6 - 2y$$

El área es base por altura entre dos,

$$A = \frac{xa}{2}$$

Calculamos la altura en función de un lado aplicando el teorema de Pitágoras.

$$y^2 = a^2 + \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow a^2 = y^2 - \frac{(6-2y)^2}{4} = y^2 - \frac{36 + 4y^2 - 24y}{4} = 6y - 9$$

$$a = \sqrt{6y-9} \quad \Rightarrow A(y) = \frac{(6-2y)\cdot\sqrt{6y-9}}{2}$$

Derivamos la función para encontrar el máximo:

$$A'(y) = \frac{1}{2}\cdot\left[(-2)\cdot\sqrt{6y-9} + (6-2y)\cdot\frac{6}{2\sqrt{6y-9}}\right]$$

$$= -\sqrt{6y-9} + \frac{3}{2}\cdot\frac{6-2y}{\sqrt{6y-9}} = \frac{-2(6y-9)+3(6-2y)}{2\sqrt{6y-9}} = \frac{18-9y}{\sqrt{6y-9}}$$

$$A'(y) = 0 \quad \Rightarrow 18 - 9y = 0 \quad \Rightarrow y = 2$$

Comprobamos que es un máximo estudiando el crecimiento y decrecimiento alrededor del 2:

	$(3/2\ ,2)$	$(2,3)$
$18-9y$	+	-
$A'(y)$	+	-
$A(y)$	$\nearrow$	$\searrow$

$$\Rightarrow y = 2 \text{ es un máximo}$$

Por tanto $x = 6 - 2y = 6 - 4 = 2$ el triángulo es equilátero de lado 2 metros.

35.2.23.

Sea $\mathbf{f(x) = (x+1)e^{-x}}$. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

Septiembre 2013. Opción A. E3

Solución:

Asíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(-x+1)e^x=-\infty$$

Hay una asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x\to+\infty$.
No hay asíntotas verticales. La función es continua en todo $\mathbb{R}$.
No hay asíntotas oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento. Puntos críticos:

$$f'(x)=e^{-x}+(x+1)(-e^{-x})=-\frac{x}{e^x}=0 \quad \Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

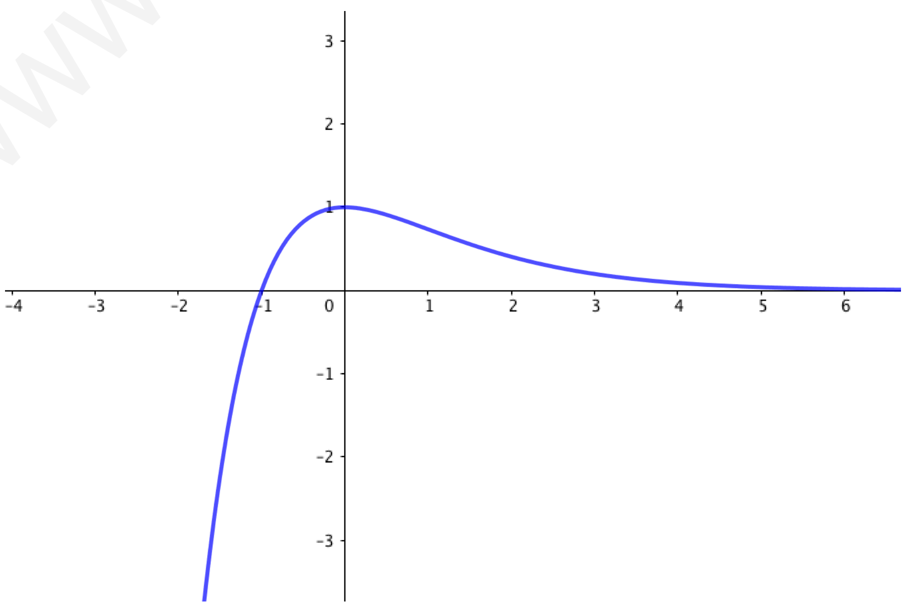
La función crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,+\infty)$.
Tiene un máximo en $(0,f(0))=(0,1)$.

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

$$f''(x)=-e^{-x}+(-x)(-e^{-x})=(x-1)e^{-x}=\frac{x-1}{e^x}=0 \quad \Rightarrow x=1$$

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	$\bigcap$	$\bigcup$

La función es convexa en $(-\infty,1)$ y cóncava en $(1,+\infty)$.
Tiene un punto de inflexión en $(1,f(1))=(1,2/e)$



35.2.24.

a) Hallar

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \frac{\mathbf{x}\ln(\mathbf{x}+\mathbf{1})}{\mathbf{x^2}+\mathbf{1}}$$

Septiembre 2013. Opción A. E4.a

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x+1)}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}{2} = 0$$

35.2.25.

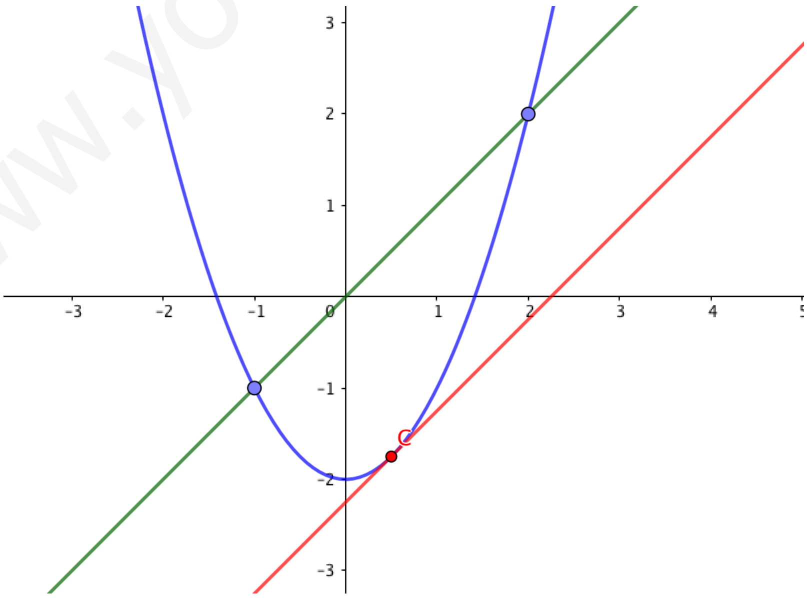
a) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange. Dar su interpretación geométrica.

Junio 2010, Fase general, Opción A, E1.a)

Solución:

Teorema del valor medio o Lagrange

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.



Geométricamente, como $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a f en el punto c y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$, el teorema nos asegura que si f es continua en $[a, b]$y derivable en (a, b) siempre habrá un punto c entre a y b tal que la tangente a la curva en ese punto es paralela a la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

35.2.26.

Hallar la función polinómica de grado 3 sabiendo que su gráfica pasa por el punto P(1,0), que tiene por tangente en el punto de abscisa x=0 la recta de ecuación $\mathbf{y = 2x + 1}$ y que su integral entre 0 y 1 vale 3.

Junio 2014. Opción A. E3

Solución:

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

La gráfica pasa por P(1,0):

$$0 = f(1) = a + b + c + d$$

La recta tangente a f en el punto $x = 0$ es $y = 2x + 1$:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow y = f'(0)x + f(0) \quad \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = c = 2 \\ f(0) = d = 1 \end{cases}$$

La integral entre 0 y 1 vale 3:

$$\int_0^1 ax^3 + bx^2 + cx + d dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 3$$

Por tanto tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{3} = 1 \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -24 \quad b = 21$$

Y nuestra función es $f(x) = -24x^3 + 21x^2 + 2x + 1$.

35.2.27.

Sea la función $\mathbf{f(x) = e^{-x^2}}$. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

Junio 2014. Opción A. E4

Solución:

Asíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$$

La función presenta una asíntota horizontal en $y=0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

$$f'(x)=e^{-x^2}(-2x)=0 \quad \Rightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

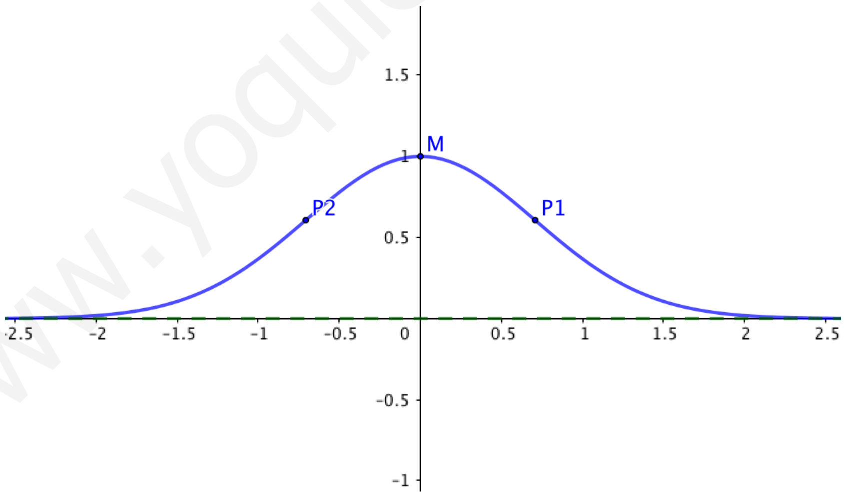
$f(x)$ tiene un máximo en el punto $(0,1)$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,\infty)$

Puntos de inflexión

$$f''(x)=-2(e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x))=(4x^2-2)e^{-x^2}=0 \quad \Rightarrow 4x^2-2=0 \quad \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La función tiene dos puntos de inflexión en $P1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e})$ $\quad P2=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e})$



35.2.28.

Sea la función $\mathbf{f(x)=+2\sqrt{x}}$.

a) Hallar el dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el punto de la gráfica de f(x) más cercano al punto (4,0).

Junio 2014. Opción B. E3

Solución:

a) $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\} = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x > 0$ luego la función es creciente en todo su dominio $(0, +\infty)$

b)

Dado un punto cualquiera de la gráfica de f , $P(x, 2\sqrt{x})$, la distancia al punto $Q(4, 0)$ es:

$$d(P,Q) = \left|(4,0) - (x, 2\sqrt{x})\right| = \left|(4-x, -2\sqrt{x})\right| = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Buscamos la distancia mínima, que se alcanzará en el mínimo de la función $g(x) = x^2 - 4x + 16$:

$$g'(x) = 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego efectivamente $x = 2$ es un mínimo, y por tanto el punto más cercano a $(4, 0)$ es $(2, 2\sqrt{2})$.

35.2.29.

Sea la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}}$

a) Calcular un punto de su gráfica tal que la recta tangente en dicho punto sea paralela al eje OX. Escribe la ecuación de la recta tangente.

Junio 2014. Opción B. E4.a

Solución:

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \quad \Rightarrow 1 - e^x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

$f(0) = \dfrac{1}{4}$, así la ecuación de la recta tangente será: $y = \dfrac{1}{4}$

35.2.30.

Sea la función $\mathbf{f(x) = x^2 e^{-x}}$ **. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.**

Septiembre 2014. opción A. E3

Solución:

Asíntotas

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=+\infty$$

Hay una asíntota horizontal $y=0$ cuando $x\to+\infty$. No hay asíntotas verticales, ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

$$f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^2x}=\frac{x(2-x)}{e^x}=0 \quad \Rightarrow x=\begin{cases}0\\2\end{cases}$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	-	+	+
$2-x$	+	+	-
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$f(x)$ es creciente en $(0,2)$ y decreciente en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

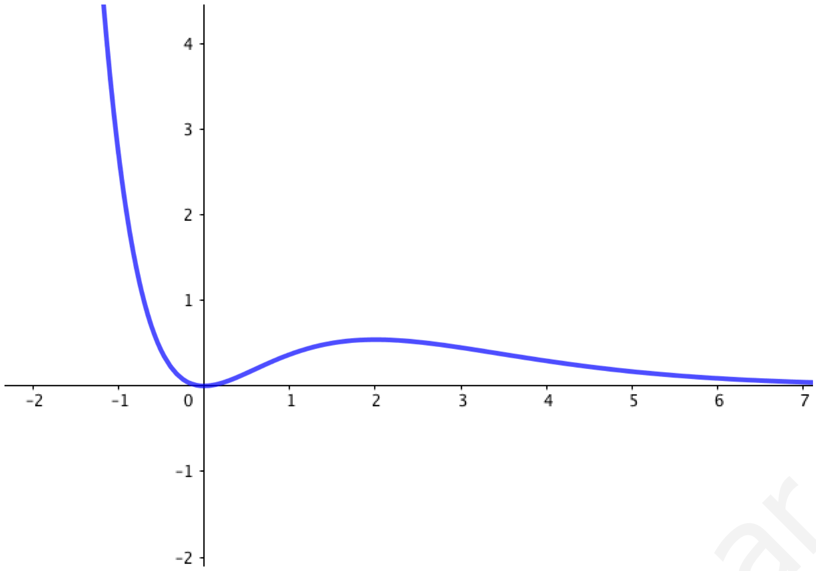
La gráfica de la función tiene un mínimo en $(0,0)$. Un máximo en $(2,4/e^2)$.

Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

$$f''(x)=\frac{(2-2x)e^x-(2x-x^2)e^x}{e^2x}=\frac{x^2-4x+2}{e^x}=0 \quad \Rightarrow x=\begin{cases}2+\sqrt{2}\\2-\sqrt{2}\end{cases}$$

	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$

La función es cóncava en $(-\infty,2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},+\infty)$ y convexa en $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$. Tiene dos puntos de inflexión $Q1\left(2-\sqrt{2},\dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}}\right)$ y $Q2=\left(2+\sqrt{2},\dfrac{(2+\sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)$



35.2.31.

Hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = x^2 - x + 4}$ es paralela a la recta de ecuación $\mathbf{y = 5x - 7}$

Septiembre 2014. Opción A. E4.a

Solución:

$$f'(x) = 2x - 1 = 5 \quad \Rightarrow 2x = 6 \quad x = 3$$

El punto es $(3, f(3)) = (3, 10)$.

35.2.32.

Se desea construir un depósito de chapa (en forma de prisma recto, abierto y de base cuadrada) con una capacidad de 32000 litros. ¿Cuáles han de ser las dimiensiones del depósito para que se precise la menor cantidad de chapa posible en su construcción

Septiembre 2014. Opción A. E4.a

Solución:

Sea x el lado de la base e y la altura del prisma.

$$32000 = V(x, y) = x^2 y \quad \Rightarrow y = \frac{32000}{x^2}$$

La cantidad de chapa necesaria es la superficie del prisma, área de la base, más el área lateral:

$$A = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{32000}{x^2} = x^2 + \frac{128000}{x}$$

Buscamos un mínimo:

$$A'(x) = 2x - \frac{-128000}{x^2} = \frac{2x^3 - 128000}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow 2x^3 - 128000 = 0 \quad \Rightarrow x = 40$$

Comprobamos que es un mínimo:

$$A''(x) = 2 + \frac{2 \cdot 128000}{x^3} \quad A''(40) > 0 \quad \Rightarrow x = 40 \text{ es un mínimo}$$

Solución: Puesto que el volumen viene dado en litros $= dm^3$ las dimensiones obtenidas son dm:

$$y = \frac{32000}{1600} = 20 \quad x = 40$$

La base tendrá $40dm = 4m$ y la altura $20dm = 2m$.

35.2.33.

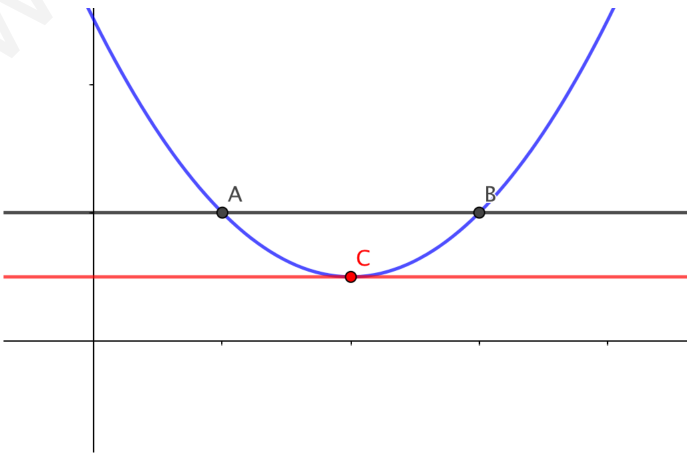
Enunciar e interpretar el Teorma de Rolle.

Septiembre 2014. Opción B. E4.a
Septiembre 2015. Opción A. E4.a

Solución:

Teorema de Rolle Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretación geométrica: Al ser $f(a) = f(b)$ la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es una recta horizontal, el teorema nos asegura que, al menos en otro punto c entre a y b la tangente a la gráfica es también horizontal.

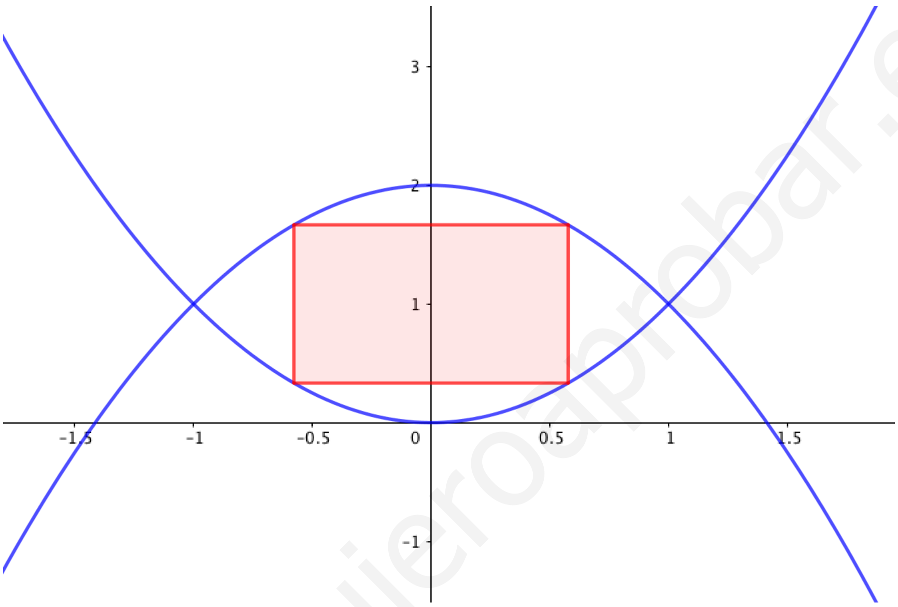


35.2.34.

Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene lados paralelos a los ejes coordenados y vértices en el borde del recinto limitado por las gráficas de las funciones $\mathbf{f(x) = x^2}$ y $\mathbf{g(x) = 2 - x^2}$.

Junio 2015. Opción A. E3

Solución:



Por la simetría de las gráficas, si llamamos $v1(a, a^2)$, los otros vértices serán $v2(-a, a^2), v3(a, 2-a^2), v4(-a, 2 - a^2)$. Entonces la función que nos da el área del rectángulo será:

$$A(a) = 2a(2 - a^2 - a^2) = 4a - 4a^3$$

Buscamos un máximo:

$$A'(a) = 4 - 12a^2 = 0 \quad \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Comprobamos si es máximo:

$$A''(a) = -24a \quad \Rightarrow A''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

Luego $a = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ es el máximo y los vértices pedidos son:

$$v1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right), \quad v2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right), \quad v3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right), \quad v4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\right)$$

35.2.35.

a) Sea g(x) una función continua y derivable en toda la recta real tal que $\mathbf{g(0) = 0 \quad g(2) = 2}$. Probar que existe algún punto c del intervalo $\mathbf{(0, 2)}$ tal que $\mathbf{g'(c) = 1}$.

Junio 2015. Opción A. E4.a

Solución:

Aplicando el teorema de Lagrange o del valor medio a la función g, y los puntos $a = 0,\ b = 2$ existe un punto $c \in (0, 2)$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{2}{2} = 1$$

35.2.36.

Dada la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{\ln x}}$, determinar su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Junio 2015. Opción B. E3

Solución:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow Dom(f) = (0, +\infty) - \{1\}$$

<u>Asíntotas:</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

No hay asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x = 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x \ln x} = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x + 1} = 0$$

No hay asíntotas oblicuas

<u>Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:</u>

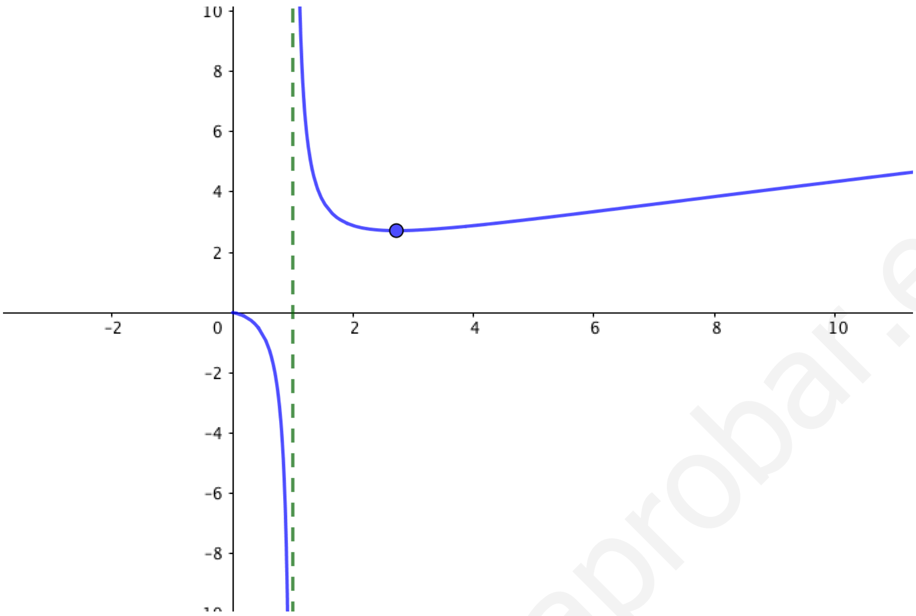
$$f'(x) = \frac{\ln x - x\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \quad \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

	$(0, 1)$	$(1, e)$	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego $(e, f(e)) = (e, e)$ es un mínimo.

$f(x)$ es creciente en $(e, +\infty)$

$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e)$



35.2.37.

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$

Junio 2015. Opción B. E4.a)

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-(1+x)}{1+x}}{\dfrac{\ln(1+x)(1+x)+x}{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x+(1+x)\ln(1+x)} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\ln(1+x)+\dfrac{1+x}{1+x}} = -\frac{1}{2}$$

35.2.38.

Consideramos la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ **. Calcular dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.**

Septiembre 2015.Opción A. E3

Solución: La función es continua en todo número real, su denominador no se anula nunca.

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

<u>Asíntotas:</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

Hay una asíntota horizontal en $y = 1$.

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

<u>Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:</u>

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(X^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

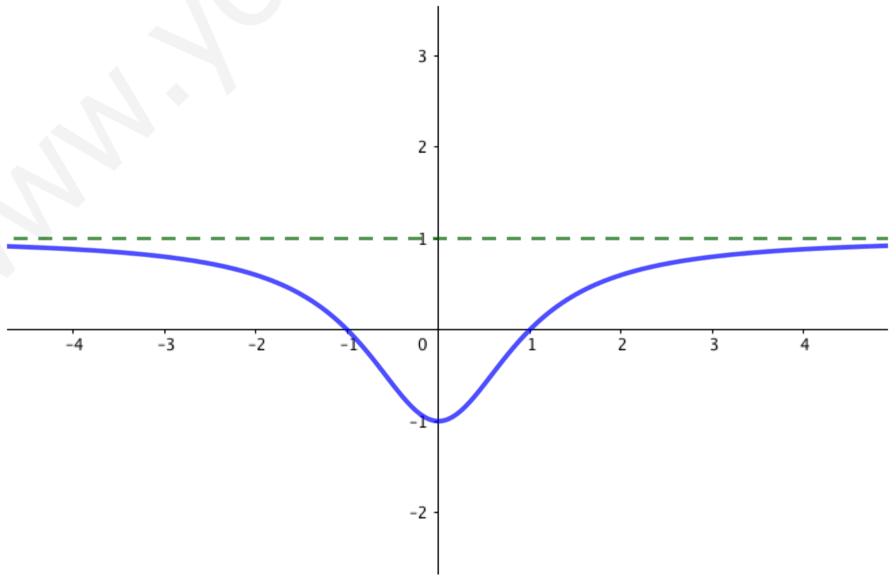
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

La función tiene un mínimo en $(0, -1)$. Es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.

<u>Puntos de inflexión:</u>

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 4x(2(x^2+1))2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Hay dos puntos de inflexión $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$



35.2.39.

Consideremos la función definida a trozos $\mathbf{f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & si\ x \leq 2 \\ \ln(x-1) & si\ x > 2 \end{cases}}$
Hallar los valores de a, b y c para que f(x) sea continua en toda la recta real y tenga un extremo relativo en el punto (1,-1).

Septiembre 2015. Opción B. E3

Solución: Para que la función sea continua, los límites laterales en $x = 2$ deben ser iguales:

$$\lim_{x\to 2^-} ax^2 + bx + c = 4a + 2b + c \qquad \lim_{x\to 2^+} \ln(x-1) = 0 \qquad \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$$

La gráfica de la función pasa por (1,-1):

$$-1 = f(1) = a + b + c$$

Tiene un extremo relativo en este punto, luego la derivada se anula:

$$0 = f'(1) = 2a + b$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c & = 0 \\ 2a + b & = 0 \\ a + b + c & = -1 \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \sim F_3 - 4F_1]{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \sim F_3 - 2F_2]{F_2 \sim -F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0$$

35.2.40.

a) **Calcular a, b y c para que la función** $\mathbf{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c}$ **tenga pendiente nula en el punto (1,1) de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto.**

b) Probar que la ecuación $\mathbf{x^5 + x - 1 = 0}$ tiene una única solución real positiva.

Junio 2016. Opción A, E3

Solución:

a)

$$1 = f(1) = 1 + a + b + c \quad \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \Rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0$$

$$f''(x) = 6x + 2a \quad \Rightarrow f''(1) = 6 + 2a = 0$$

$$\Rightarrow a = -3 \quad b = 3 \quad c = 0 \quad \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

b)

Aplicamos el Teorema de Bolzano al intervalo $[0, 1]$ donde la función $f(x) = x^5 + x - 1$ es continua y cambia de signo:

$$f(1) = 1 > 0 \quad f(0) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \exists\, c \in (0, 1) \diagup f(c) = 0$$

Por otro lado, la derivada $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ es siempre positiva y por tanto la gráfica de la función es creciente y no puede volver otra vez a cortar el eje OX. Luego la raíz real positiva c es única.

35.2.41.

Calcular $\displaystyle \lim_{\mathbf{x \to 0^+}} \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^x - 1}}\right]$

Junio 2016. Opción A, E4.a)

Solución:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{(e^x - 1) - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(L'Hôpital)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

35.2.42.

Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo.

Junio 2016. Opción B, E3.

Solución:

La función que nos da el volumen de la caja es:

$$V(x) = (6-2x)^2 x = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$$

Buscamos un máximo en esta función:

$$V'(x) = 4(3x^2 - 12x + 9) = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$V''(x) = 12(2x-4) \quad \Rightarrow V''(1) < 0$$

Luego $x = 1$ es el máximo que buscamos.

35.2.43.

Dada la función $\mathbf{f(x) = 2e^{-2|x|}}$, estudiar: derivabilidad, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y asíntotas.

Septiembre 2016. Opción A. E3.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 2e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Asíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{2x}} = 0$$

Hay una asíntota horizontal en $y = 0$.
No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:

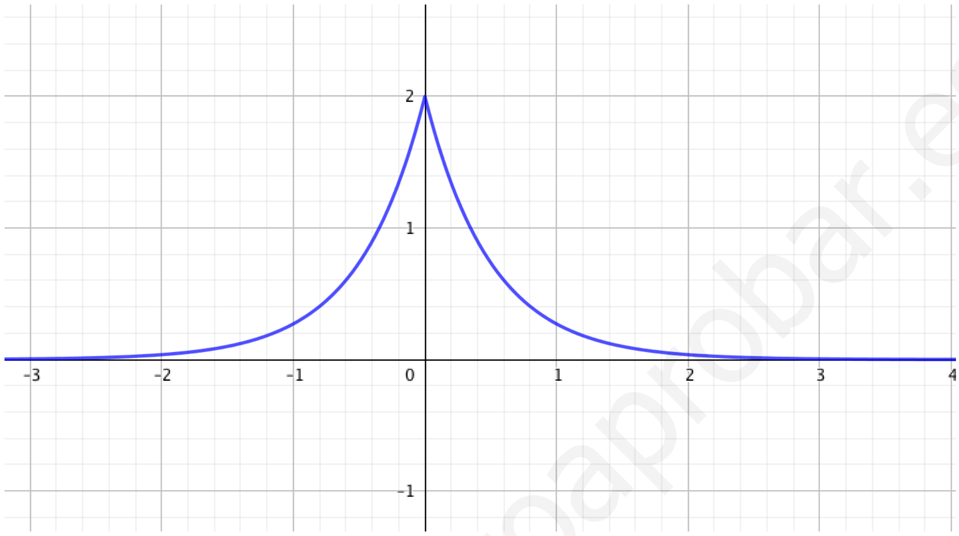
$$f'(x) = \begin{cases} -4e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 4e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

$f(x)$ tiene un valor máximo en $(0, 2)$.



35.2.44.

Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

Septiembre 2016, Opción A, E4.a)

Solución:

$$\lim_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

35.2.45.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,1) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.

Septiembre 2016. Opción B, E3

Solución:

Sean $A(0, y)$ y $B(x, 0)$ los puntos de corte de la recta con los ejes respectivos. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es $Y = y - \dfrac{y}{x}X$, imponemos la condición de que pase por el punto $(1, 1)$:

$$1 = y - \frac{y}{x} \quad \Rightarrow y = \frac{x}{x - 1}$$

El área del triángulo viene determinada por la función:

$$A(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{2x-2}$$

$$A'(x) = \frac{2x(2x-2) - x^2 \cdot 2}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2-4x}{4(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{4(x-1)^2}$$

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

x no puede ser cero, tomamos $x = 2$ y comprobemos que es un mínimo:

	$(-\infty, 0)$	(0,2)	$(2, +\infty)$
x	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$A'(x)$	+	-	+
$A(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Rightarrow x = 2$ es un mínimo, $y = \frac{2}{2-1} = 2$ y la ecuación de la recta es:

$$Y = 2 - X$$

35.2.46.

Se considera la parábola $\mathbf{y = -x^2 + 2x}$
a) Calcular las rectas tangentes a dicha parábola en sus puntos de intersección con el eje OX.

Septiembre 2016.Opción B, E4.a)

Solución:

$$-x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow x(-x+2) = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = -2x + 2 \quad \Rightarrow f'(0) = 2 \quad f'(2) = -2$$

Para $(x_0, y_0) = (0, 0)$ la recta es: $y = 2x$.
Para $(x_0, y_0) = (2, 0)$ la recta es: $y = -2x + 4$.

35.2.47.

Calcular la recta tangente a la curva $\mathbf{f(x) = 4e^{x-1}}$ en el punto $\mathbf{(1, f(1))}$.

Junio 2017. Opción A, E4.a)

Solución: La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(x) = 4e^{x-1} \quad f'(1) = 4 \quad f(1) = 4 \quad \Rightarrow y - 4 = 4(x-1) \quad \Rightarrow y = 4x$$

35.2.48.

a) **Dado el polinomio $\mathbf{P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C}$, hallar C para que el valor de $\mathbf{P(x)}$ en su mínimo relativo sea 1.**

b) **Calcular $\lim\limits_{\mathbf{x\to 0^+}} \mathbf{x}\ln(\mathbf{x})$**

Junio 2017. Opción B, E3

Solución:

a) Buscamos el mínimo relativo

$$P'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{3}{2}2x + 2 = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$P''(x) = 2x - 3 \quad \Rightarrow P''(2) = 4 - 3 = 1 > 0 \quad \Rightarrow x = 2 \text{ es un mínimo relativo}$$

$$P(2) = \frac{8}{3} - \frac{3\cdot 4}{2} + 4 + C = 1 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

b)

$$L = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Aplicamos L'Hôpital para salvar la indeterminación:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

35.2.49.

a) **Dada la función $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$, calcular a para que f sea derivable en $\mathbf{x = 0}$.**

b) **Hallar a, b, y c para que la función $\mathbf{f(x) = ax^2 + b\sin x + c}$ verifique $\mathbf{f(0) = 0}$, $\mathbf{f'(0) = 1}$ y $\mathbf{f''(0) = 2}$.**

Septiembre 2017. Opción A, E3.

Solución:

a)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ es derivable en $x = 0 \Leftrightarrow 1 = \lim_{x\to 0^+} 2x + a = a \quad \Rightarrow a = 1$

b)

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 0$$

$$f'(x) = 2ax + b\cos x \quad 1 = f'(0) = b \quad \Rightarrow b = 1$$

$$f''(x) = 2a - b\sin x = 2a - \sin x \quad 2 = f''(0) = 2a \quad \Rightarrow a = 1$$

35.2.50.

a) **Calcular $\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x}}$.**

Septiembre 2017. Opción A, E4.a)

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2xe^{x^2}}{1} = 1$$

35.2.51.

Consideremos la función $\mathbf{f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Septiembre 2017. Opción B, E3

Solución:

Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R}$ puesto que el denominador no se anula.

Asíntotas:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 1$. No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

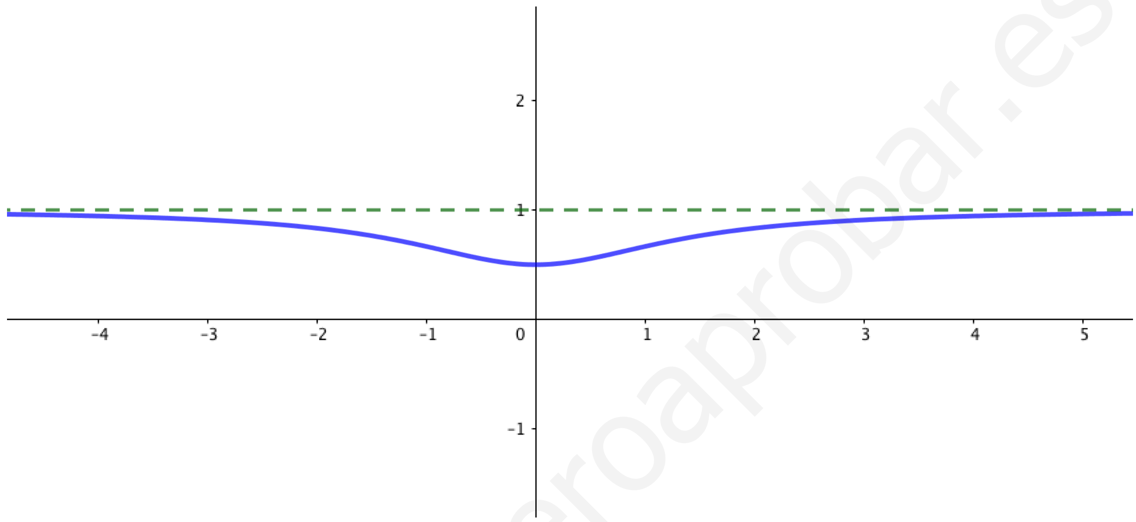
Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+2) - (x^2+1)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ tiene un mínimo en el punto $(0, f(0)) = (0, \frac{1}{2})$.
$f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.



35.2.52.

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \sin x}{x^2}$.

Septiembre 2017. Opción B, E4.a)

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x - \cos x}{2x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + \sin x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

35.3. Cálculo Integral

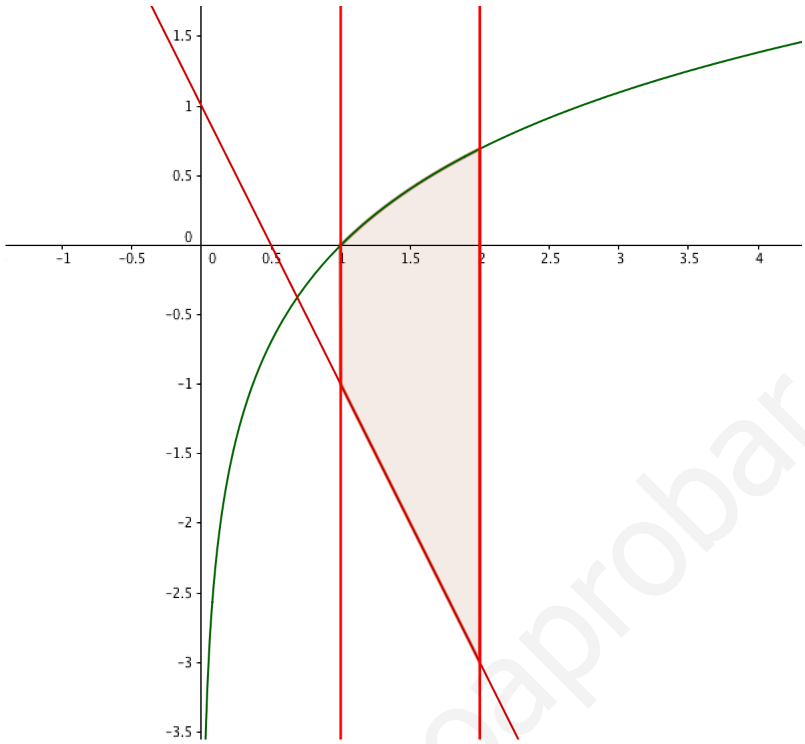
35.3.1.

Dadas dos funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 1 - 2x$, hallar el área del recinto plano limitado por las rectas $x = 1$, $x = 2$ y las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Junio 2010, Fase general, Opción A, E1.a)

Solución:

Esbozamos la gráfica del área que queremos calcular:



Calculamos los puntos de corte:

$A(1,0)$ y $B(2, ln2)$ entre $ln(x)$ y las dos rectas.

$C(1,-1)$ y $D(2,-3)$ entre $g(x)$ y las dos rectas.

Calculamos el área dividiendo la figura en dos partes, la que queda por encima del eje X y la que queda por debajo.

$$A = \int_1^2 ln(x)dx - \int_1^2 (1-2x)dx$$

La segunda integral es inmediata y la primera se resuelve por partes, tomando $ln(x) = u$, $dx = dv$, $du = \frac{dx}{x}$ y $v = \int dx = x$. Así obtenemos:

$$\int ln(x)dx = xln(x) - \int \frac{xdx}{x} = xln(x) - x$$

Sustituyendo en la integral definida obtenemos el área pedida:

$$A = [xln(x) - x]_1^2 + [x - x^2]_2^1 = 2ln2 + 1$$

35.3.2.

Calcular:

$$\int \mathbf{\frac{\cos(x)}{1 + sen^2(x)} dx}$$

Junio 2010, Fase general, Opción A, E2.b)

Solución:

Resolvemos la integral utilizando el cambio de variable $sen(x) = t$ con lo que $cos(x)dx = dt$ y la integral es inmediata:

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctg(t) = arctg(sen(x)) + C$$

35.3.3.

Dada la función $\mathbf{f(x) = \frac{x+1}{x-1}}$ se pide

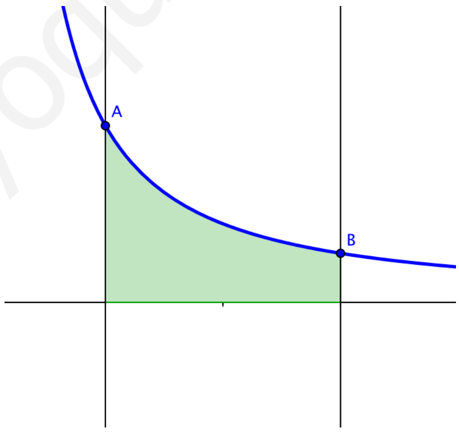
b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $\mathbf{g(x) = \frac{f(x)}{x}}$, el eje OX y las rectas $\mathbf{x = 2\,, x = 4}$.

Junio 2010, Fase específica, Opción A, E2.b)

Solución:

La función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x+1}{x(x-1)}$ es discontinua en $x = 0$ y en $x = 1$, y es continua en todos los demás puntos, luego entre $x = 2$ y $x = 4$ la función es continua.

Además entre 2 y 4 la gráfica de la función está por encima del eje OX :



Así el área pedida será:

$$A = \int_2^4 \frac{x+1}{x(x-1)} dx$$

Calculamos una primitiva:

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

La primera integral es inmediata:

$$\int \frac{dx}{x-1}dx = \ln|x-1| + C$$

Para calcular la segunda integral descomponemos en suma de fracciones:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx}{x(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = -1 \end{cases}$$

Luego la segunda integral será:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \ln|x-1| + C$$

Sustituyendo en la integral definida:

$$A = \Big[2\ln|x-1| - \ln|x|\Big]_2^4$$

$$A = 2\ln 3 - \ln 4 - (2\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{9}{2} \approx 1,5041\, u^2$$

35.3.4.

Calcular la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{2} |\mathbf{x^2 - 3x + 2}|\, \mathbf{dx}$$

Junio 2010, Fase específica, Opción B, E2.

Solución:

Por definición de valor absoluto, podemos separar la función en dos trozos:

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{si} \quad x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$$

Resolvemos la inecuación:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1)$$

Utilizamos la tabla para resolver la inecuación:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x-2)$	-	-	+
$(x-1)$	-	+	+
$(x-2)(x-1)$	+	-	+

Por tanto nuestra función queda definida en dos trozos:

$$|x^2-3x+2| = \begin{cases} x^2-3x+2 & \text{si} \quad x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty) \\ -x^2+3x-2 & \text{si} \quad x \in (1, 2) \end{cases}$$

Dividimos pues nuestra integral definida en dos sumandos:

$$I = \int_{-1}^{2} |x^2-3x+2|\, dx = \int_{-1}^{1} (x^2-3x+2)\, dx + \int_{1}^{2} (-x^2+3x-2)\, dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{2} =$$
$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right] - \left[-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2\right] + \left[-\frac{8}{3} + \frac{12}{2} - 4\right] - \left[-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right] =$$
$$= \frac{28}{6} + \frac{1}{6} = \frac{29}{6}$$

35.3.5.

Determinar la función $\mathbf{f(x)}$ tal que $\mathbf{f'(x) = \dfrac{x^4+x+1}{x^2+x}}$ con $\mathbf{f(1) = 2}$.

Septiembre 2010, Fase general, Opción A, E2.

Solución:

Vamos a calcular una primitiva de $f'(x)$:

Primero realizamos la división de polinomios:

$$\begin{array}{l} \left(x^4 \qquad\qquad + x + 1 \right) / \left(x^2 + x \right) = x^2 - x + 1 + \dfrac{1}{x^2+x} \\ \underline{-x^4 - x^3} \\ \quad -x^3 \\ \quad \underline{x^3 + x^2} \\ \qquad\quad x^2 + x \\ \qquad\quad \underline{-x^2 - x} \end{array}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{x^4+x+1}{x^2+x} dx = \int (x^2-x+1) dx + \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

La primera integral es inmediata, para resolver la segunda separamos en fracciones:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Luego nuestra integral queda así:

$$I = \int (x^2 - x + 1)dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

Aplicando la condición $f(1) = 2$, obtenemos C:

$$f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + 0 - \ln 2 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{7}{6} + \ln 2$$

Y la función buscada es:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \ln|x+1| + \ln 2 + \frac{7}{6}$$

35.3.6.

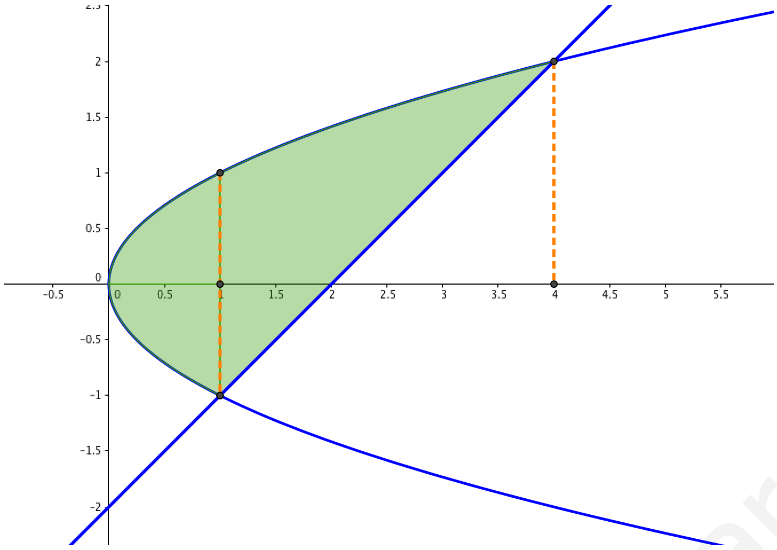
Determinar el área limitada por la parábola de la ecuación $\mathbf{y^2 = x}$, y la recta de ecuación $\mathbf{y = x - 2}$.

Septiembre 2010, Fase general, Opción B, E2.

Solución:

Calculemos los puntos de corte de la recta con la parábola:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow y = y^2 - 2 \quad \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$



Vamos a separar el área en dos partes: entre $x = 0$ y $x = 1$ el área es dos veces el área limitada entre $+\sqrt{x}$ y el eje OX, por simetría de la parábola. Entre $x = 1$ y $x = 4$ el área es la que queda limitada por $+\sqrt{x}$ y la recta $x - 2$. Luego:

$$A = 2\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right)dx$$

$$A = 2\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4$$

$$A = \frac{4}{3} + \left(\frac{2\sqrt{4^3}}{3} - \frac{4^2}{2} + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)$$

$$A = \frac{9}{2}\,u^2$$

35.3.7.

Calcular el área de la región finita y limitada por la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = x^3 - x + 1}$, y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1.

Junio 2011. Opción A, E1.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la curva en x_0 es:

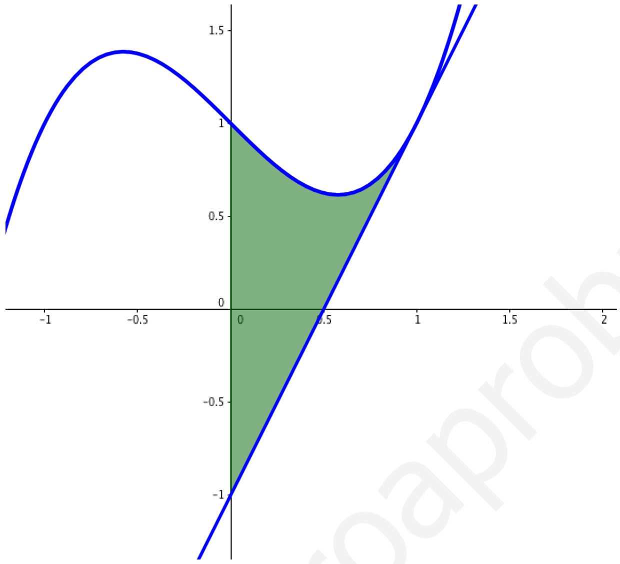
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

En nuestro caso: $x_0 = 1$, $f(1) = 1$, calculamos la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 1$, y $f'(1) = 2$, sustituyendo obtenemos la ecuación de la recta tangente:

$$f(x) - 1 = 2(x - 1)$$

$$f(x) = 2x - 1$$

Hacemos un esbozo de las gráficas de curva y recta:



$$A = \int_0^1 f(x) - (2x-1)dx = \int_0^1 x^3 - 3x + 2dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$

$$A = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{4}\, u^3$$

35.3.8.

b) Calcular

$$\int \frac{\mathbf{ln(x)}}{\mathbf{x^2}}\mathbf{dx}$$

Junio 2011. Opción B, E2.b.

Solución:

Aplicamos la integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C$$

35.3.9.

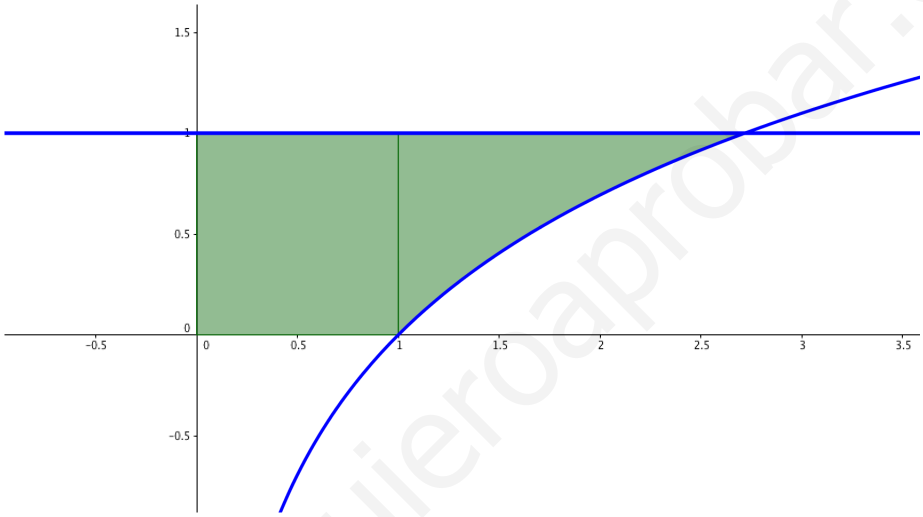
b) Calcular el área del recinto limitado en el primer cuadrante, por la gráfica de la función $\mathbf{y = \ln(x)}$ y las rectas $\mathbf{y = 0}$, $\mathbf{y = 1}$, y $\mathbf{x = 0}$.

Septiembre 2011. Opción A, E2.b.

Solución:

$$\ln(x) = 1 \quad \Rightarrow x = e$$

$$\ln(x) = 0 \quad \Rightarrow x = 1$$



Dividimos el área en dos trozos, el primero entre $x = 0$ y $x = 1$ es un cuadrado de área $1\,u^2$. El segundo trozo entre $x = 1$ y $x = e$, es la integral entre las dos funciones:

$$A = 1 + \int_1^e (1 - ln(x))dx$$

Calculamos una primitiva de $ln(x)$ aplicando integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

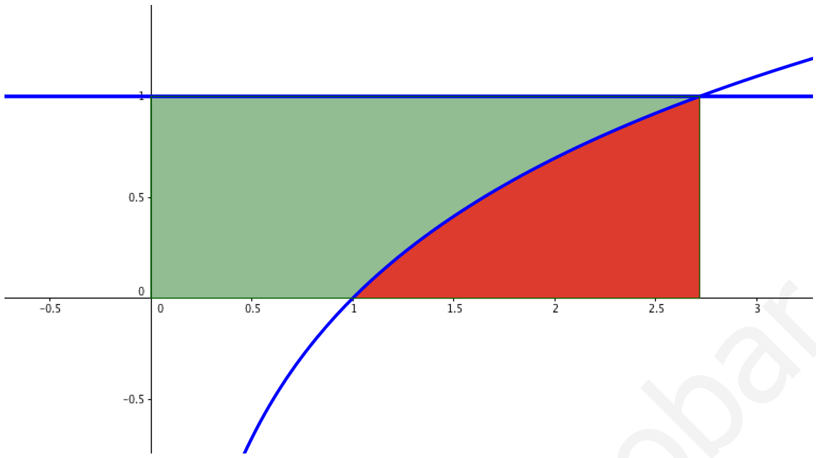
$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C$$

Sustituyendo, obtenemos el área pedida:

$$A = 1 + [x - (x\ln(x) - x)]_1^e = 1 + (e - e + e) - (1 + 1) = e - 1\,u^2$$

Nota al lector:

Otra forma de calcular este área, y quizá más sencilla, es restar al área del rectángulo $e \times 1$, el área que forma $\ln(x)$ con el eje OX entre $x = 1$ y $x = e$, que es precisamente la unidad.



35.3.10.

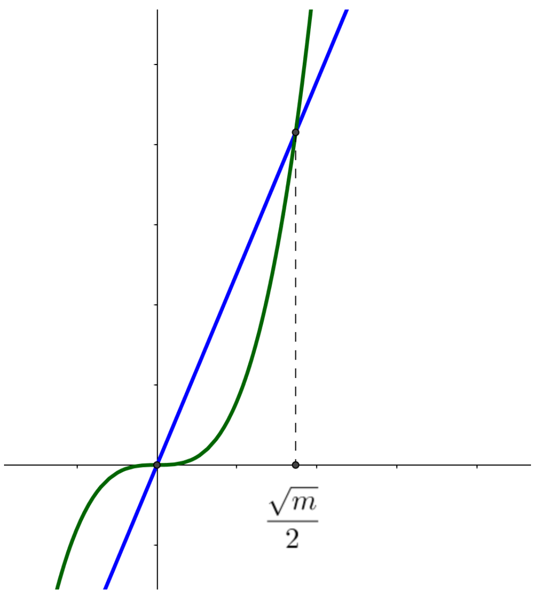
Hallar el valor de m para que el área delimitada, en el primer cuadrante, por la función $\mathbf{y = 4x^3}$ y la recta $\mathbf{y = mx}$ sea de 9 unidades cuadradas.

Septiembre 2011. Opción B, E2.

Solución:

Buscamos en el primer cuadrante el punto de corte de recta y curva:

$$\begin{cases} y = 4x^3 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \quad 4x^3 = mx \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = +\dfrac{\sqrt{m}}{2} \end{cases}$$



Imponemos la condición del enunciado:

$$9 = \int_0^{\frac{\sqrt{m}}{2}} (mx - 4x^3)dx = \left[\frac{mx^2}{2} - x^4\right]_0^{\frac{\sqrt{m}}{2}} = \frac{m^2}{8} - \frac{m^2}{16} = \frac{m^2}{16}$$

$$\Rightarrow \quad 3 = \frac{m}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m = 12}$$

35.3.11.

Sea $\mathbf{f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}}$

a) Calcular $\int \mathbf{f(t)dt}$**.**

b) Sea $\mathbf{g(x) = \int_0^x f(t)dt}$**. Calcular** $\lim\limits_{\mathbf{x \to 0}} \mathbf{\dfrac{g(x)}{x}}$

Junio 2012, Opción A, E1.

Solución:

a) Realizamos un cambio de variable:

$$e^t = z \quad e^t dt = dz \quad \Rightarrow dt = \frac{dz}{z}$$

$$I = \int \frac{dt}{1+e^t} = \int \frac{dz}{z(z+1)}$$

Descomponemos en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{z(1+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1)+Bz}{z(z+1)} = \frac{A + z(A+B)}{z(z+1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{dz}{z} - \int \frac{dz}{z+1} = \ln|z| - \ln|z+1| + C = \ln|e^t| - \ln|e^t+1| + C = \ln\frac{e^t}{e^t+1} + C$$

b) Sea $\mathbf{g(x) = \int_0^x f(t)dt}$**. Calcular** $\lim\limits_{\mathbf{x \to 0}} \mathbf{\dfrac{g(x)}{x}}$

$$g(x) = \left[\ln\frac{e^t}{e^t+1}\right]_0^x = \ln\frac{e^x}{e^x+1} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1+e^x}{2e^x}\cdot\dfrac{(2e^x(1+e^x) - 2e^x(e^x))}{(1+e^x)^2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+e^x}{2e^x}\cdot\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}$$

35.3.12.

a)

$$\textbf{Calcular} \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2+2x+3}}\mathbf{dx}$$

Junio 2012, Opción B, E1.a)

Solución: Las raíces del denominador no son reales, luego tenemos un polinomio irreducible en $\mathbb{R}$. Buscamos en el denominador la expresión de $(1+f(x)^2)$ para obtener un arcotangente con un cambio de variable.

$$x^2+2x+3=(x+1)^2+2=2\left(\frac{(x+1)^2}{2}+1\right)=2\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)$$

Realizamos el cambio de variable

$$t=\frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow dt=\frac{dx}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow dx=\sqrt{2}dt$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}=\int \frac{\sqrt{2}dt}{2(t^2+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

35.3.13.

Calcular

$$\int \frac{\sin(\mathbf{2x})}{\mathbf{3}+\sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{x})}\mathbf{dx}$$

Septiembre 2012, Opción A, E1.a)

Solución:

$$t=\sin^2(x) \quad \Rightarrow dt=2\sin(x)\cos(x)dx=\sin(2x)dx$$

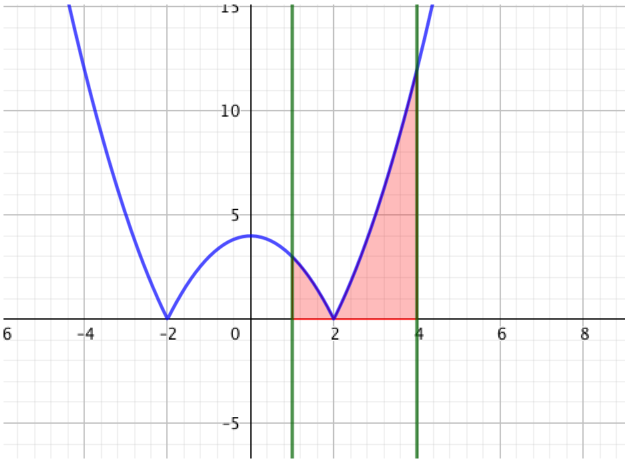
$$I=\int \frac{dt}{3+t}=\ln|3+t|=\ln\left|\sin^2(x)+3\right|+C$$

35.3.14.

Hallar el área de la región comprendida entre las rectas $\mathbf{x=1}$, $\mathbf{x=4}$ limitada por dichas rectas, la gráfica de la función $\mathbf{f(x)=|x^2-4|}$ y el eje OX.

Septiembre 2012, Opción B, E1.b)

Solución:



$$A=\int_1^2 (4-x^2)dx+\int_2^4 (x^2-4)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^4=\frac{5}{3}+\frac{32}{3}=\frac{37}{3}\approx 12,33\ u^2$$

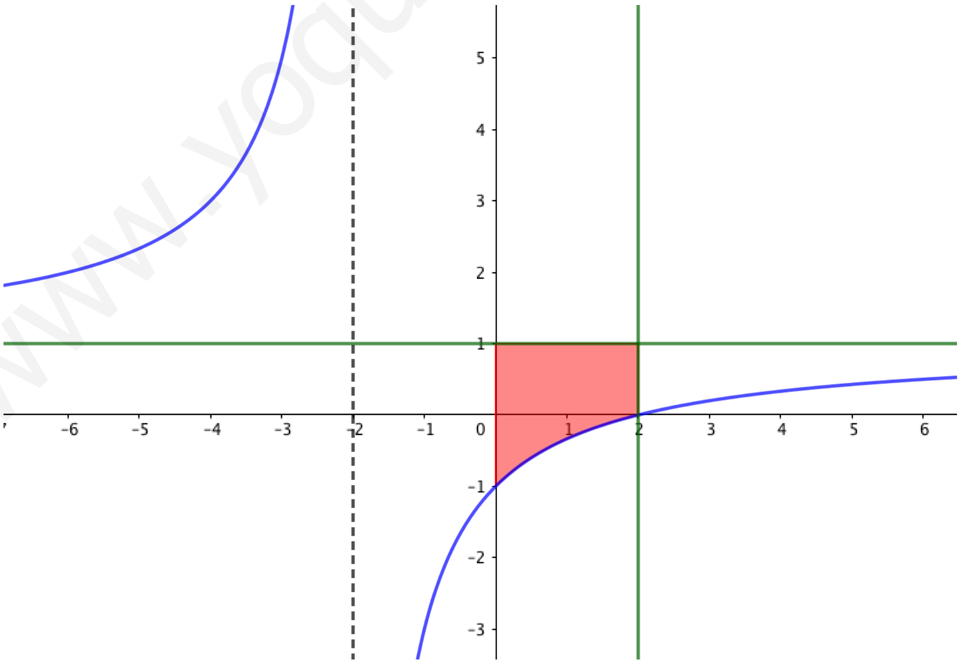
35.3.15.

Sea la función $\mathbf{f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}}$

b) Dibujar el recinto comprendido entre la recta $\mathbf{y=1}$ **, la gráfica de la función** $\mathbf{f(x)}$ **, el eje OY y le recta** $\mathbf{x=2}$ **; Calcular el área de dicho recinto.**

Junio 2013. Opción B. E3.b

Solución:



$$\int_0^2 1-\left(\frac{x-2}{x+2}\right)dx=\int_0^2\frac{4}{x+2}=4\cdot[\ln|x+2|]_0^2=4\cdot(\ln(4)-\ln(2))=4\cdot\ln(4/2)=4\cdot\ln 2\ u^2$$

35.3.16.

Calcular
$$\int \frac{\sqrt{\mathbf{x+1}}+\mathbf{1}}{\mathbf{x+1}}\mathbf{dx}$$

Septiembre 2013. Opción A. E4.b

Solución:

Utilizamos el siguiente cambio de variable:

$$\sqrt{x+1}=t \quad x+1=t^2 \quad dx=2tdt$$

$$I=\int \frac{t+1}{t^2}2tdt=\int \frac{2t^2+2t}{t^2}dt=\int 2+\frac{2}{t}dt=2t+2\ln|t|+C$$
$$I=2\sqrt{x+1}+2\ln|x+1|+C$$

35.3.17.

Calcular $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2-x-2}}\mathbf{dx}$

Septiembre 2013. Opción B. E4.b

Solución:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{3} \quad B=-\frac{1}{3}$$

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|=\ln\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}+C$$

35.3.18.

Sea la función $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{e^x}}{(\mathbf{1+e^x})^2}$

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $\mathbf{x=0}$ y $\mathbf{x=\ln 5}$.

Junio 2014. Opción B. E4.b

Solución:

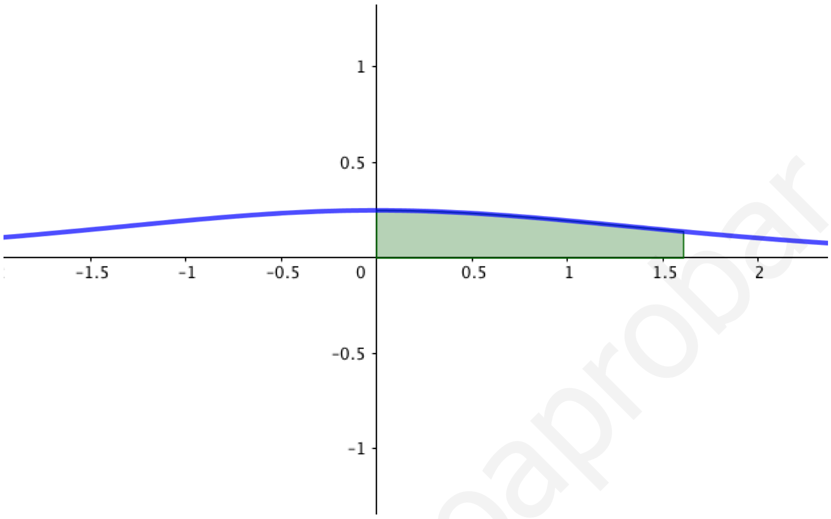
La función es siempre positiva, no tiene cortes con el eje OX, luego el área pedida es:

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Calculamos la integral indefinida por cambio de variable, tomando $e^x = t$ así $e^x dx = dt$ y:

$$\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t} = -\frac{1}{1+e^x}$$

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^{\ln 5} = \frac{-1}{1+5} - \frac{-1}{2} = \frac{1}{3} \quad u^2$$



35.3.19.

Calcular el área limitada por la parábola de ecuación $\mathbf{y = 2x^2}$ y la recta $\mathbf{y = 2x + 4}$.

Septiembre 2014. Opción A. E4.b

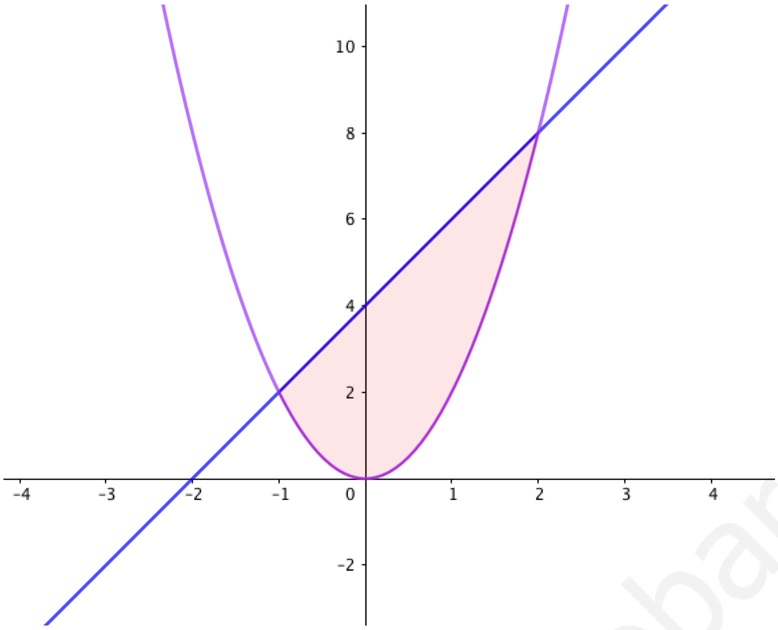
Solución:

Puntos de corte:

$$2x^2 = 2x + 4 \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{2} (2x + 4 - (2x^2))dx = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4dx =$$

$$\left[-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - (\frac{2}{3} + 1 - 4) = 9 \ u^2$$



35.3.20.

Hallar la primitiva de $\mathbf{f(x) = x^2 \ln x}$ cuya gráfica pasa por el punto (1,2).

Septiembre 2014. Opción B. E4.b

Solución:

Utilizamos la integración por partes, siendo:

$$\ln x = u \quad du = \frac{1}{x}dx \quad dv = x^2dx \quad v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$2 = f(1) = \frac{1}{3}\ln(1) - \frac{1}{9} + C \quad \Rightarrow C = \frac{19}{9}$$

$$f(x) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{19}{9}$$

35.3.21.

Hallar la función f(x) que cumple $\mathbf{f'(x) = x\ln(x^2+1)}$ y $\mathbf{f(0) = 1}$.

Junio 2015. Opción A. E4.b

Solución:

Hacemos el cambio de variable $x^2 + 1 = t \quad \Rightarrow 2xdx = dt$:

$$f(x) = \int x\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \ln(t)dt$$

Calculamos esta última integral por partes:

$$u = \ln(t) \quad du = \frac{1}{t}dt \quad dv = dx \quad v = \int dt = t$$

$$\int \ln(t)dt = t\ln(t) - \int dt = t\ln(t) - t$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left((x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1)\right) + C$$

$$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}(-1) + C = 1 \quad \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

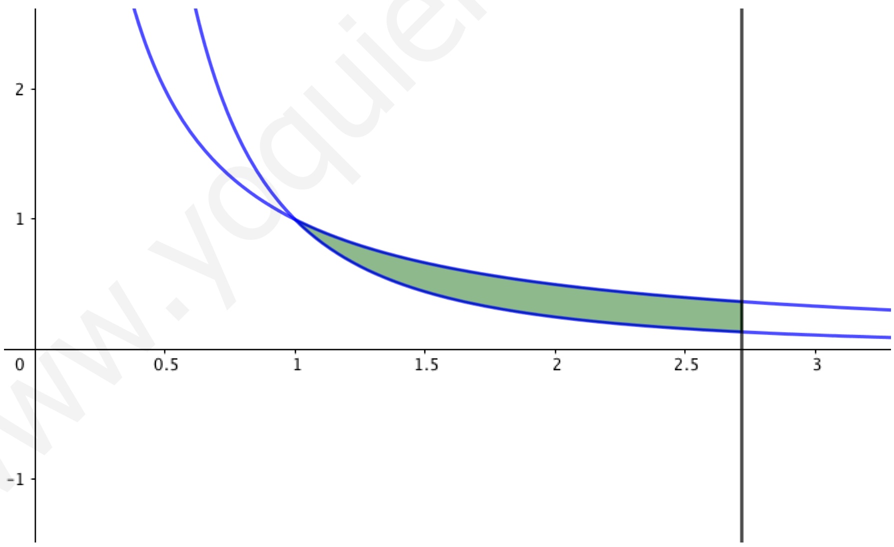
$$f(x) = \frac{1}{2}\left((x^2+1)\ln(x^2+1) - (x^2+1)\right) + \frac{3}{2} = \frac{(x^2+1)\left(\ln(x^2+1) - 1\right) + 3}{2}$$

35.3.22.

b) Calcular el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$, $\mathbf{g(x) = \frac{1}{x^2}}$, y la recta $\mathbf{x = e}$.

Junio 2015. Opción B. E4.b.

Solución:



$$\int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \left[\ln|x| + \frac{1}{x}\right]_1^e = 1 + \frac{1}{e} - 1 = \frac{1}{e}\ u^2$$

35.3.23.

Hallar la primitiva de la función $\mathbf{f(x) = x^2 \ln x}$ cuya gráfica pasa por el punto (1,0).

Septiembre 2015. Opción A. E4.b

Solución:

Utilizamos la integración por partes, siendo:

$$\ln x = u \quad du = \frac{1}{x}dx \quad dv = x^2dx \quad v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$0 = f(1) = \frac{1}{3}\ln(1) - \frac{1}{9} + C \quad \Rightarrow C = \frac{1}{9}$$

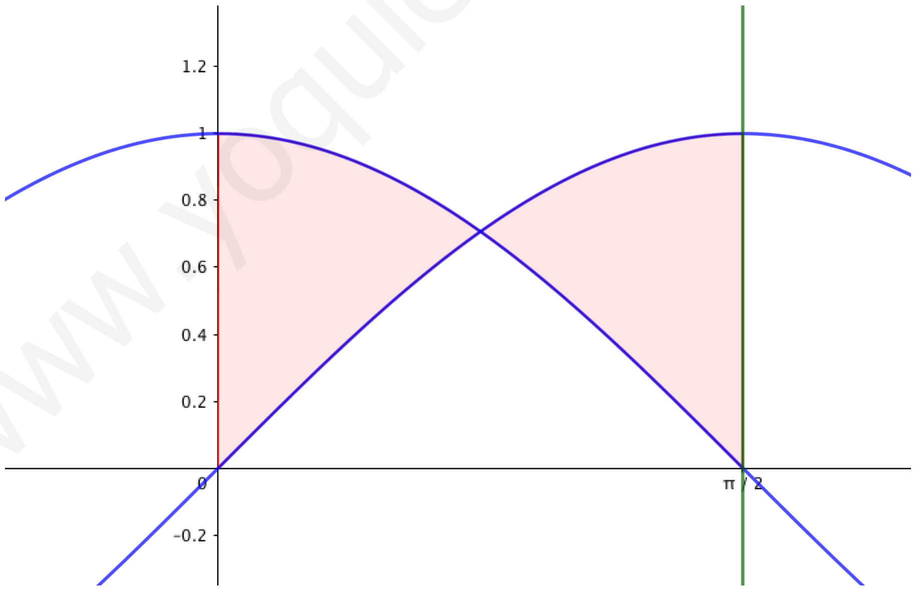
$$f(x) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{9}$$

35.3.24.

Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $\cos \mathbf{x}$ y $\sin \mathbf{x}$ y las rectas $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$

Septiembre 2015. Opción B, E4.b

Solución:



Por la simetría de las gráficas, el área pedida es el doble del área en el intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx = 2\left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(\sqrt{2} - 1)\ u^2$$

35.3.25.

Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = 1 - x^2}$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa $\mathbf{x = 1}$ y $\mathbf{x = -1}$.

Junio 2016. Opción A, E4.b.

Solución:

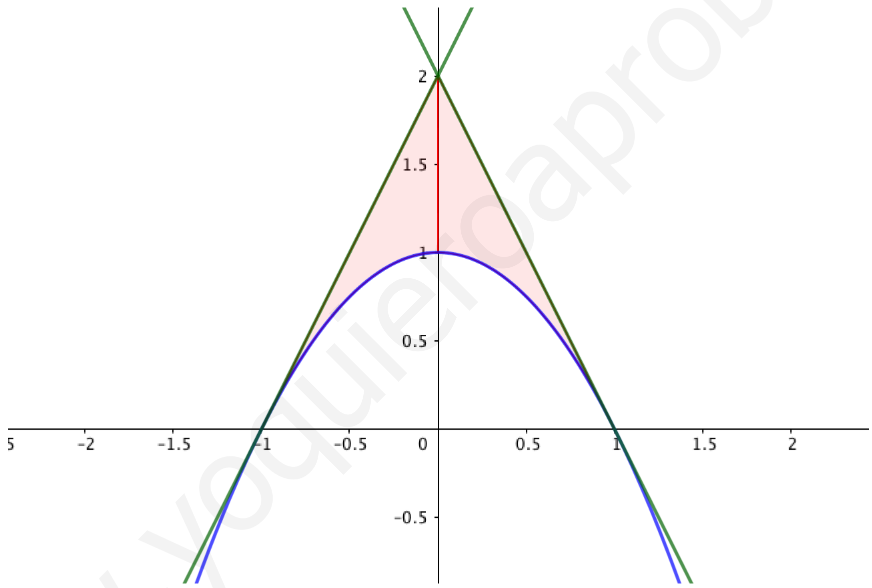
La derivada de la función: $f'(x) = -2x$.

La recta tangente en $(1, f(1)) = (1, 0)$ es $y = 2 - 2x$.

La recta tangente en $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ es $y = 2x + 2$.

Las dos rectas se cortan en el punto P(0,2):

$$2x + 2 = 2 - 2x \quad \Rightarrow x = 0$$



$$A = \int_{-1}^{0} 2x + 2 - (1 - x^2)\, dx + \int_{0}^{1} 2 - 2x - (1 - x^2)\, dx = \int_{-1}^{0} x^2 + 2x + 1\, dx + \int_{0}^{1} x^2 - 2x + 1\, dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\, u^2$$

35.3.26.

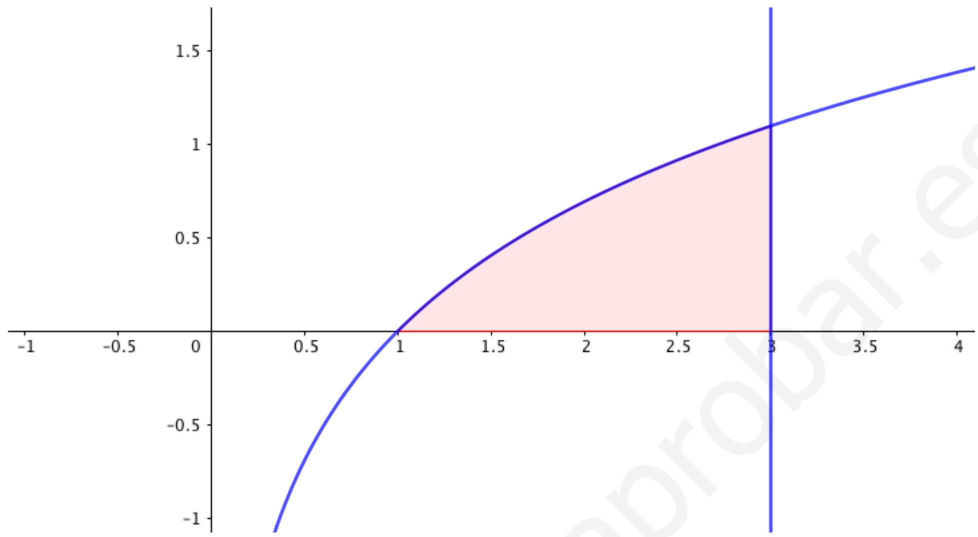
Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = \ln x}$, el eje OX, y la recta $\mathbf{x = 3}$.

Junio 2016. Opción B, E4.b.

Solución:

Calculamos la integral de $\ln x$ por partes, llamando $u = \ln x$, $du = \dfrac{1}{x}dx$ y $dv = dx$ $v = \int dx = x$.

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$



$$\int_1^3 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^3 = 3 \ln 3 - 3 - (0 - 1) = 3 \ln 3 - 2 \; u^2$$

35.3.27.

Consideremos la función $\mathbf{f(x) = x^3 + mx^2 + 1}$ con $\mathbf{m \geq 0}$. Calcular el valor de m para que el área del recinto limitado por la gráfica de la función $\mathbf{f(x)}$, el eje OX y las rectas $\mathbf{x = 0}$ y $\mathbf{x = 2}$, sea 10.

Septiembre 2016. Opción A. E4.b)

Solución:

$$\int_0^2 x^3 + mx^2 + 1 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} + m\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = 4 + m\frac{8}{3} + 2 = 10 \quad \Rightarrow m = \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{2}$$

35.3.28.

Se considera la parábola $\mathbf{y = -x^2 + 2x}$

a) **Calcular las rectas tangentes a dicha parábola en sus puntos de intersección con el eje OX.**

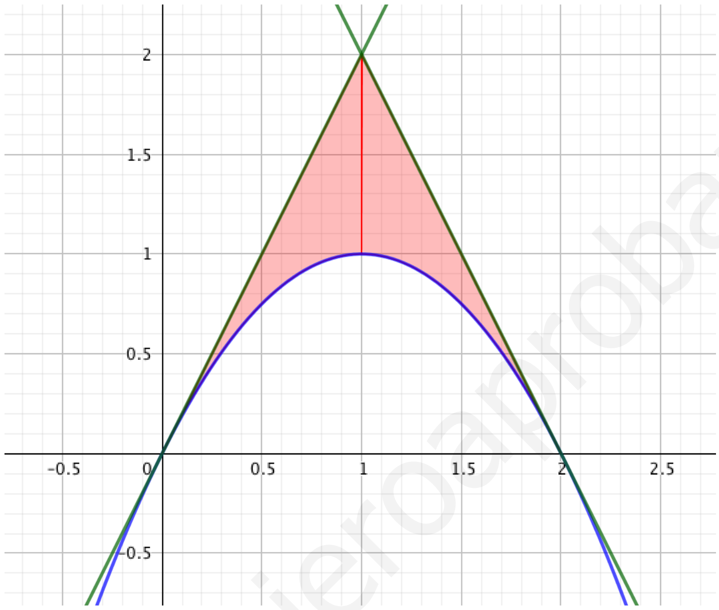
Solución

b) **Calcular el área delimitada or la gráfica de dicha parábola y las rectas tangentes obtenidas en el apartado a) .**

Septiembre 2016. Opción B, E4.b.

Solución: Las rectas son: $y = 2x$, $y = -2x + 4$, calculamos el punto de corte:

$$2x = -2x + 4 \quad 4x = 4 \quad x = 1$$



$$A = \int_0^1 2x - (-x^2 + 2x)\ dx + \int_1^2 -2x + 4 - (-x^2 + 2x)\ dx = \int_0^1 x^2\ dx + \int_1^2 x^2 - 4x + 4\ dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ u^2$$

35.3.29.

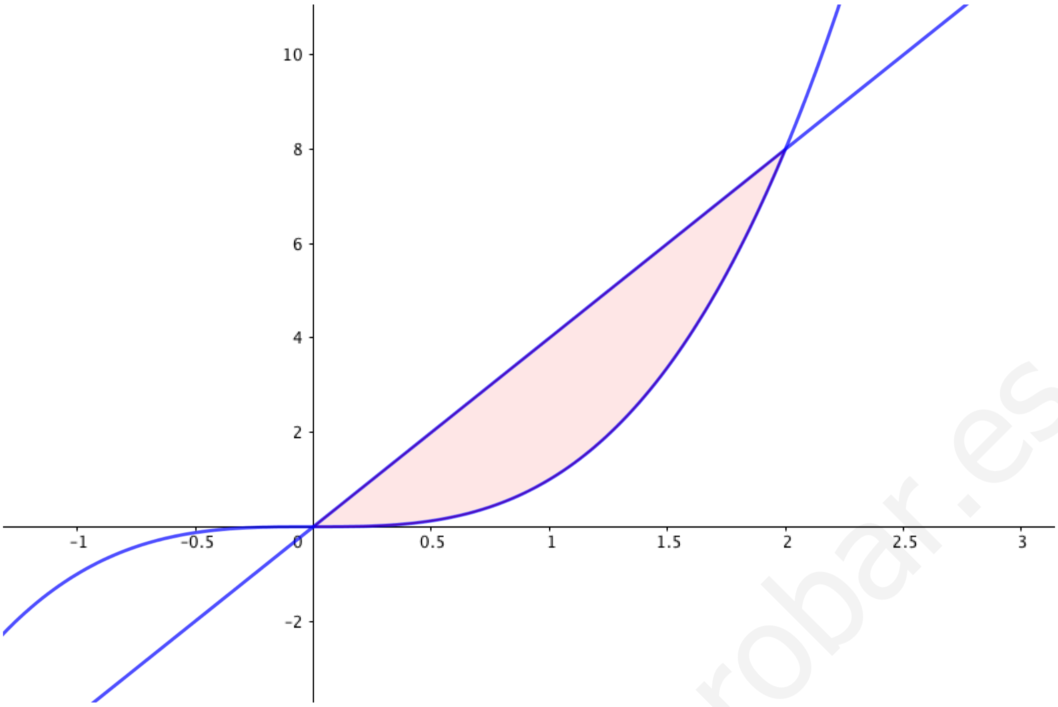
Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $\mathbf{g(x) = x^3}$ y la recta $\mathbf{y = 4x}$.

Junio 2017. Opción A, E4.b.

Solución:

Calculamos el punto de corte:

$$x^3 = 4x \quad \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \\ 2 \end{cases}$$



En el primer cuadrante, el punto donde se cortan es $x = 2$. Así el área pedida es:

$$\int_0^2 4x - x^3\, dx = \left[4\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 8 - 4 = 4\ u^2$$

35.3.30.

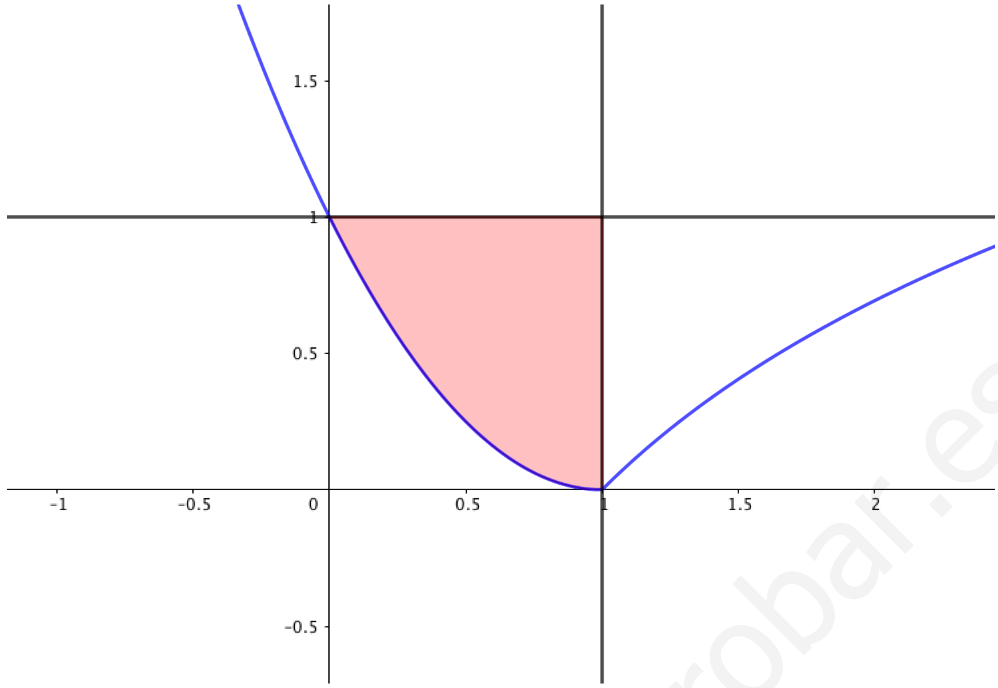
Sea

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{(x-1)^2} & \mathbf{si\ x \leq 1} \\ \mathbf{a + \ln x} & \mathbf{si\ x > 1} \end{cases}$$

b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $\mathbf{f(x)}$ y las rectas $\mathbf{x = 1}$, $\mathbf{y = 1}$.

Junio 2017. Opción B, E4.b.

Solución:



$$A = \int_0^1 1 - (x-1)^2 \, dx = \int_0^1 2x - x^2 \, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \, u^2$$

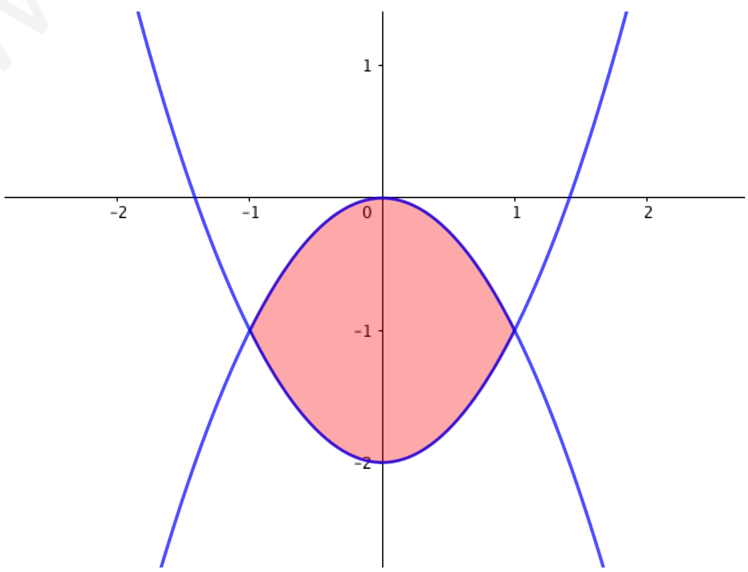
35.3.31.

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $\mathbf{f(x) = -x^2}$, $\mathbf{g(x) = x^2 - 2}$.

Septiembre 2017. Opción A, E4.b.

Solución: Calculamos los puntos de corte de las dos parábolas:

$$-x^2 = x^2 - 2 \quad \Rightarrow 2x^2 = 2 \quad \Rightarrow x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A = \int_{-1}^{1} -x^2-(x^2-2)\ dx = \int_{-1}^{1} -2x^2+2\ dx = \left[-2\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}+2-(\frac{2}{3}-2) = 4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ u^2$$

35.3.32.

b) Calcular $\int \ln \mathbf{x}\ \mathbf{dx}$.

Septiembre 2017. Opción B, E4.b.

Solución: Aplicamos la integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = \ln x \quad dv = dx \quad du = \frac{1}{x}dx \quad v = \int dx = x$$

$$\Rightarrow \int \ln x\ dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

36. Álgebra

36.1. Matrices y determinantes

36.1.1.

Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3x3 que verifica que $\mathbf{B^2} = \mathbf{16 \cdot I}$, siendo I la matriz unidad. Calcular el determinante de B.

Junio 2010, Fase general, Opción A, E3.a.

Solución:
Aplicamos las propiedades de los determinantes:

$$|B^2| = |B|^2 = |16 \cdot I| = 16^3 \cdot |I| = (4^3)^2 \Rightarrow |B| = \pm 64$$

36.1.2.

Hallar todas las matrices X que satisfacen la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Junio 2010, Fase general, Opción A, E3.b.

Solución:
Sea

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Imponemos la condición del enunciado:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d = 0 \quad e = 0 \quad f = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

36.1.3.

Dadas las matrices:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a) **Para qué valores de m existe $\mathbf{B^{-1}}$?. Para m=1, calcular $\mathbf{B^{-1}}$**

b) **Para $\mathbf{m = 1}$, hallar la matriz $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{X \cdot B + C = D}$**

Junio 2010, Fase específica, Opción A, E3

Solución:
B^{-1} existe si $|B| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} = m \Rightarrow \exists\, B \;\forall\, m \neq 0$$

Para $m = 1$, $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|} Adj^t$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad Adj = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Adj^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para $\mathbf{m = 1}$, hallar la matriz $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{X \cdot B + C = D}$

$$X = (D - C) \cdot B^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

36.1.4.

a) **Si se sabe que el determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{vmatrix}$ vale 5, calcular razonadamente:**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{2a_2} & \mathbf{3a_3} \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{2b_2} & \mathbf{3b_3} \\ \mathbf{c_1} & \mathbf{2c_2} & \mathbf{3c_3} \end{vmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2 + a_3} & \mathbf{b_2 + b_3} & \mathbf{c_2 + c_3} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \end{vmatrix}$$

b) **Si $\mathbf{A}$ es una matriz de tamaño $\mathbf{2 \times 2}$ para la cual se cumple que $\mathbf{A^{-1} = A^t}$ ($\mathbf{A^t}$ = traspuesta de la matriz $\mathbf{A}$), ¿Puede ser el determinante de $\mathbf{A}$ igual a 3?**

Septiembre 2010, Fase general, Opción B, E4.

Solución:

Aplicamos las propiedades de los determinantes:

$$|A| = |A^t|$$

$$|L_1, a \cdot L_2, L_3| = a \cdot |L_1, L_2, L_3|$$

$$|L_1, L_2 + L_3, L_4| = |L_1, L_2, L_4| + |L_1, L_3, L_4|$$

$$|L_1, L_2, L_3| = -|L_1, L_3, L_2|$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ b_1 & 2b_2 & 3b_3 \\ c_1 & 2c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 3a_3 \\ b_1 & b_2 & 3b_3 \\ c_1 & c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_3 & b_2 + b_3 & c_2 + c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 + (-5) = -5$$

b) Si A es una matriz de tamaño $\mathbf{2 \times 2}$ para la cual se cumple que $\mathbf{A^{-1} = A^t}$ ($\mathbf{A^t =}$ traspuesta de la matriz A), ¿Puede ser el determinante de A igual a 3?

$$A^{-1} = A^t \quad \Rightarrow \quad |A| = |A^t| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \Rightarrow \quad |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

Por tanto no puede ser 3 el determinante.

36.1.5.

a) **Calcular el rango de la matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$**

b) **Si B es una matriz cuadrada de dimensión $\mathbf{3 \times 3}$ cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de 5B y el de $\mathbf{B^2}$.**

Junio 2011. Opción A, E3.

Solución:

a) El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes, así, si sustituimos un fila por una combinación lineal de ella misma y otras filas el rango no varía. En este caso es claro que todas las filas son combinaciones lineales de la primera y la segunda ya que están en progresión aritmética:

$$4 \cdot (1, 1, 1, 1) = (5, 6, 7, 8) - (1, 2, 3, 4)$$

$$8 \cdot (1, 1, 1, 1) = (9, 10, 11, 12) - (1, 2, 3, 4)$$

$$12 \cdot (1, 1, 1, 1) = (13, 14, 15, 16) - (1, 2, 3, 4)$$

Luego el rango de A es 2.

b) Aplicando las propiedades del determinante:

$$|5B| = 5^3 \cdot |B| = 125 \cdot 4 = 500$$

$$|B^2| = |B| \cdot |B| = 4 \cdot 4 = 16$$

36.1.6.

a) Averiguar para qué valores de m la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ **no tiene inversa.**

b) Calcular la matriz inversa de A para m=0.

c) Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz $2 \cdot$ A vale -16 ¿Cuál es el orden de la matriz A?

Septiembre 2011. Opción A, E3.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 0 & m & -2 \end{vmatrix} = 2 - m - (m^2) = -m^2 - m + 2$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \quad \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2)}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$$

Luego A no tiene inversa para $m = -2$ y $m = 1$.

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj^t$. Para $m = 0$, $|A| = 2$.

$$Adj = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad Adj^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Sea n el orden de la matriz A.

$$|A| = -1, \quad |2 \cdot A| = 2^n \cdot |A| = -2^n = -16 = -2^4 \quad \Rightarrow n = 4.$$

36.1.7.

Sea M una matriz cuadrada que cumple la ecuación $\mathbf{M^2 - 2M = 3I}$, donde I denota la matriz identidad.

a) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo expresar $\mathbf{M^{-1}}$ en términos de M e I.

b) Hallar todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $\mathbf{M^2 - 2M = 3I}$

Junio 2012. Opción B, E4.

Solución:

a) Si n es el orden de la matriz cuadrada

$$M^2 - 2M = 3I \quad \Rightarrow |(M-2)M| = 3^n \quad \Rightarrow \quad |M-2| \cdot |M| = 3^n \quad \Rightarrow \quad |M| \neq 0$$

Luego M tiene inversa.

$$M^2 - 2M = 3I \quad \Rightarrow \quad M - 2I = 3M^{-1} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$$

b)

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 2M = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2-2a & 2ab-2b \\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2a = 3 \\ 2ab - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-2a = 3 \\ b(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \\ a = 1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

36.1.8.

a) **Determinar, en función del valor del parámetro real a, el rango de la matriz** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{a} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$

b) **Sea C una matriz 2x2 de columnas $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ y de determinante 5, y sea B una matriz 2x2 de determinante 2. Si D es la matriz de columnas $\mathbf{4C_2}$ y $\mathbf{C_1 - C_2}$, calcular el determinante de la matriz $\mathbf{BD^{-1}}$.**

Septiembre 2012. Opción B, E3.

Solución:

a) Calculamos el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & a & a \end{vmatrix} = 0 - a - 3a - (0 + a^2 - a) = -a^2 - 3a = -a(a+3) = 0 \quad \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -3 \quad \Rightarrow \quad rango(A) = 3$
- Si $a = 0 \quad \Rightarrow \quad rango(A) = 2$:

  Tomamos el determinante de un menor de orden dos distinto de cero, así el rango será 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

- Si $a = -3 \quad \Rightarrow \quad rango(A) = 2$

  Tomamos el determinante de un menor de orden dos distinto de cero, así el rango será 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

b)

$$|D| = |4C_2 \;\; C_1 - C_2| = 4 \cdot |C_2 \;\; C_1 - C_2| = 4 \cdot |C_2 \;\; C_1| - 4 \cdot |C_2 \;\; C_2| = 4 \cdot |C_2 \;\; C_1|$$

$$\Rightarrow \quad |D| = -4 \cdot |C_1 \, C_2| = -20$$

$$\left|B \cdot D^{-1}\right| = |B| \cdot \frac{1}{|D|} = 2 \cdot \frac{1}{-20} = -\frac{1}{10}$$

36.1.9.

Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $\mathbf{C \cdot B^t}$, $\mathbf{B^t \cdot C}$, $\mathbf{B \cdot C}$.

Junio 2013, Opción A, E1.a)

Solución: Si multiplicamos una matriz de orden 3x1 por una matriz de orden 1x3, obtenemos una matriz de orden 3x3:

$$C \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos una matriz de orden 1x3 por una matriz de orden 3x1 obtenemos un número (1x1):

$$B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 - 4 = -3$$

$B \cdot C$, no se puede multiplicar una matriz de orden 3x1 por otra de orden 3x1.

36.1.10.

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a la matriz A es invertible?

b) Estudiar el rango según los valores de a.

c) Hallar a para que se cumpla $\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{4}A}$**.**

Junio 2013, Opción B, E1

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 = 0 \quad \Rightarrow a = 0$$

A es invertible para todo número a distinto de cero.

b)

Si $a = 0$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Solo hay una fila linealmente independiente, luego el rango de A es 1. Si $a \neq 0$ entonces el determinante de A es distinto de cero, y por tanto su rango es tres.

c)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t = \frac{1}{-2a^2} \begin{pmatrix} -2a & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & -a \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-2a^2} \begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -1/a & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2a & 1/a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a/4 = 1/a \quad -1/2 = -1/a \quad \Rightarrow a = 2$$

36.1.11.

Sea la matriz M $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcular $\mathbf{M^{-1}}$

b) Calcular la matriz X que cumple $\mathbf{X \cdot M + M = 2M^2}$

Septiembre 2013. Opción B. E1

Solución: a)

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} Adj(M)^t$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - (-2 - 2) = -1$$

$$Adj(M) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$X \cdot M + M = 2M^2 \quad \Rightarrow X \cdot M = 2M^2 - M \quad \Rightarrow X = (2M^2 - M) \cdot M^{-1}$$

$$\Rightarrow X = 2M - Id \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

36.1.12.

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a+1} & \mathbf{a+2} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a+3} & \mathbf{a+4} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a+5} & \mathbf{a+6} \end{pmatrix}$

a) **Discutir su rango en función de los valores de a**

b) **Para $\mathbf{a = 1}$, resolver la ecuación matricial** $\mathbf{A^tX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **, siendo $\mathbf{A^t}$ la matriz traspuesta de A.**

Junio 2014. Opción B. E1

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \sim F_3 - F_1]{F_2 \sim F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+5 & a+6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Las dos últimas filas son linealmente independientes para todo valor de a. Por tanto el rango de la matriz A es 2 $\forall a \in \mathbb{R}$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango de la matriz es 2, tomamos las dos primeras filas y consideramos z como un parámetro.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \sim F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

36.1.13.

a) **Resolver la siguiente ecuación matricial $\mathbf{X \cdot A = B - C}$, siendo**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) **Sean $\mathbf{F_1, F_2, F_3}$ las filas de una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $\mathbf{3F_1 - F_3}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{2F_3}$.**

Septiembre 2014. Opción A. E1

Solución:

$$X \cdot A = B - C \quad \Rightarrow X = (B - C)A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \quad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 2-1 & 1+1 \\ 3-1 & -2-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$$

b)

Aplicando las propiedades de los determinantes: Si multiplicamos una fila por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. $|3F_1F_2F_3| = 3\,|F_1F_2F_3|$

Si sumamos a una fila una combinación lineal de otras filas, el determinante no varía. $|F_1 - F_3\ F_2F_3| = |F_1F_2F_3| - |F_3F_2F_3| = |F_1F_2F_3| - 0$

$$|F_1F_2F_3| = 5 \quad \Rightarrow |3F_1 - F_3\ F_2\ 2F_3| = 3\,|F_1\ F_2\ 2F_3| = 6\,|F_1\ F_2\ F_3| = 6 \cdot 5 = 30$$

36.1.14.

Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} \mathbf{m+2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{m+1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{m-1} \end{pmatrix}$ **, se pide**

a) **Hallar los valores de m para que la matriz $\mathbf{A^{10}}$ tenga inversa.**

b) **Para $\mathbf{m = 0}$, calcular, si es posible, la matriz inversa de A.**

Junio 2015. Opción A, E1

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)(m^2-1) = 0 \quad \Rightarrow m = \begin{cases} -2 \\ -1 \\ 1 \end{cases}$$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$ entonces A^{10} tiene inversa pues su determinante no es nulo.

$$|A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \left|A^{10}\right| = |A|^{10} \neq 0$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t \quad |A| = -2$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

36.1.15.

Consideremos la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{a(a-4)} & \mathbf{a-4} \\ \mathbf{a-4} & \mathbf{a(a-4)} \end{pmatrix}$

a) Calcular el rango de M en función del parámetro a.

b) Para a=1, resolver la ecuación M $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{-6} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$

Septiembre 2015. Opción B. E1

Solución:

a)

$$|M| = (a-4)^2 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-4)^2(a^2-1) = 0 \quad \Rightarrow a = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 4 \end{cases}$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 4\}$ entonces el rango de M es 2. Si $a = 4$ entonces M es la matriz nula, sin rango. Si $a = 1$ o $a = -1$ entonces el rango de M es 1.

b)

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \equiv x - y = 0 \Rightarrow x = \lambda \quad y = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

36.1.16.

a) **Discutir para qué valores de a $\in \mathbb{R}$ la matriz M $= \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{a} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-a-1} \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcular $\mathbf{M^{-1}}$ para a=0.**

b) **Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y $|\mathbf{B}| = -5$, calcular $|\mathbf{2B^t}|$, donde $\mathbf{B^t}$ denota la matriz traspuesta de B.**

Junio 2016. Opción A, E1

Solución:

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{vmatrix} = 5(1-a) = 0 \quad \Rightarrow a = 1$$

M tiene inversa para todo $a \neq 1$.

Para $a = 0$:

$$|M| = 5 \quad M^{-1} = \frac{1}{|M|} Adj(M)^t$$

$$Adj(M)^t = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left|B^t\right| = |B| = -5 \quad \Rightarrow \quad \left|2B^t\right| = 2^3 \cdot |B| = -40$$

36.1.17.

a) **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y tal que $|\mathbf{A}| = \mathbf{2}$. ¿Tiene inversa la matriz $\mathbf{A^4}$?. Calcular $|\mathbf{5A^{-1}}|$ y $|(\mathbf{5A})^{-1}|$.**

b) **¿Para qué valores del parámetro a el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{a+1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ es 1 ?.**

Septiembre 2016. Opción B. E1

Solución:

a)

$|A^4| = |A|^4 = 2^4 \neq 0 \quad \Rightarrow A$ tiene inversa.

$$\left|5A^{-1}\right| = 5^3 \cdot \left|A^{-1}\right| = 5^3 \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{125}{2}$$

$$\left|(5A)^{1}\right| = \frac{1}{|5A|} = \frac{1}{5^3 \cdot 2} = \frac{1}{250}$$

b)

$$\begin{vmatrix} a+1 & 6 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 12 = a^2 + a - 12 = 0 \quad \Rightarrow a = \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$$

36.1.18.

Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible.

b) Determinar X tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{2B} + \mathbf{I}$, siendo $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 2017. Opción A, E1.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \nexists B^{-1}$$

b)

$$A \cdot X = 2B + I \quad \Rightarrow X = A^{-1}(2B + I)$$

$$2B + I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

36.1.19.

a) **Sea $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a, cuando M posee inversa.**

b) **Siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular $\mathbf{A^2}$ y $\mathbf{A^{-1}}$.**

Septiembre 2017. Opción A, E1.

Solución: a)

$$|M| = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix} = a - 6 = 0 \quad \Rightarrow a = 6$$

Si $a \neq 6$ entonces M tiene inversa.

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 55 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t$$

$$|A| = 7 - 6 = 1 \quad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

36.2. Sistemas de ecuaciones

36.2.1.

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathbf{2x - y + az} & = & \mathbf{1 + a} \\ \mathbf{x - ay + z} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{x + y + 3z} & = & \mathbf{a} \end{cases}$$

a) **Discutir el sistema para los distintos valores de a**

b) **Resolver el sistema para a = 1**

Junio 2010, Fase general, Opción B, E3)

Solución:

a) La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & a & 1+a \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & a \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes utilizando el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6a + a - 1) - (-a^2 - 3 + 2) = a^2 - 5a = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 5 \end{cases}$$

Vamos a estudiar cada caso, aplicando el *Teorema de Rouché*:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 5$ entonces el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada son iguales a 3 e iguales al número de incógnitas, luego el Sistema es **Compatible Determinado**.

- Si $a = 0$. Existe un menor de orden 2 cuyo determinante es distinto de cero (además no depende del parámetro a) tomando el menor complementario del elemento b_{12}:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

  $\Longrightarrow$ el rango de la matriz es 2. Para la matriz ampliada encontramos un determinante distinto de cero, suprimiendo la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

  Por tanto el rango de la matriz ampliada es 3 distinto del rango de la matriz de coeficientes, así el sistema es **Incompatible**.

- Si $a = 5$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 ya que el menor anterior no depende de a. Y para la matriz ampliada encontramos un menor distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Por tanto el rango de la matriz ampliada es 3 y estamos en el mismo caso anterior, luego el sistema es **Incompatible**.

b) Resolvemos para $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz de coeficientes es en este caso $a^2 - 5a = 1 - 5 = -4$. Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Para las otras dos incógnitas y y z hay claramente dos columnas iguales luego los determinantes son cero.

Solución: $x = 1 \quad y = 0 \quad z = 0$.

36.2.2.

Discutir según los valores del parámetro a, y resolver cuando sea posible, el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x + z = 1} \\ \mathbf{y + (a - 1)z = 0} \\ \mathbf{x + (a - 1)y + az = a} \end{cases}$$

Junio 2010, Fase específica, Opción B, E3.

Solución:

La matriz asociada al sistema es :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & a-1 & a & a \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = a-(1-(a-a)^2) = a-1-(a-1)^2 = (a-1)(1-(a-1)) = (a-1)(2-a)$$

$$(a-1)(2-a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Para todo $a \in \mathbb{R}-\{1{,}2\}$ el sistema es **Compatible determinado** pues $Rango(A) = Rango(\bar{A}) = 3 =$ número de incógnitas.

Resolvemos utilizando la *regla de Cramer*:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)(2-a)} = \frac{a-(a+(a-1)^2)}{(a-1)(2-a)} = \frac{-(a-1)^2}{(a-1)(a-2)} = \frac{1-a}{2-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{(a-1)(2-a)} = \frac{(a-1)-(a(a-1))}{(a-1)(2-a)} = \frac{(a-1)(1-a)}{(a-1)(2-a)} = \frac{1-a}{2-a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)(2-a)} = \frac{a-1}{(a-1)(2-a)} = \frac{1}{2-a}$$

- Si $a = 1$

  La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  La primera fila y la última son iguales, prescindimos de esta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  $Rango(A) = 2 = Rango(\bar{A}) < 3 =$ número de incógnitas, luego el sistema es **Compatible indeterminado**. Resolvemos tomando como parámetro $z = \lambda$.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si $a = 2$

La matriz asociada al sistema es :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de la matriz $\bar{A}$, tomamos un menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Luego $Rango(A) = 2 \neq Rango(\bar{A}) = 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es **Incompatible**.

36.2.3.

Discutir, y resolver en los casos que sea posible, el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{ax + y - z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + z = 2} \\ \mathbf{x + 3y - z = 0} \end{cases}$$

Septiembre 2010, Fase general, Opción A, E4.

Solución:

La matriz asociada al sistema es :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 3 + 1 - (-2 - 1 + 3a) = -5a + 1$$

$$-5a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{5}$$

Para $a \neq \frac{1}{5}$ el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, luego el rango de la matriz de coeficientes es 3 igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, luego el sistema es **compatible determinado**.

Resolvemos utilizando la *regla de Cramer*:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1-5a} = \frac{-2-6-(-2+3)}{1-5a} = \frac{-9}{1-5a} = \frac{9}{5a-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1-5a} = \frac{-2a+1-(-2-1)}{1-5a} = \frac{-2a+4}{1-5a} = \frac{2a-4}{5a-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{1-5a} = \frac{3+2-(2+6a)}{1-5a} = \frac{3-6a}{1-5a} = \frac{6a-3}{5a-1}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$$

Estudiemos el caso para $a = \dfrac{1}{5}$:

La matriz asociada al sistema es :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{5} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Para obtener el rango de la matriz ampliada calculamos un menor de orden tres, tomamos las tres últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2-6-(3-2) = -9 \neq 0$$

$\Rightarrow \quad Rango(A) = 2 \neq Rango(\bar{A}) = 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es **incompatible**.

36.2.4.

Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} \mathbf{x+y+z=1} \\ \mathbf{x-y+z=0} \\ \mathbf{3x+my+z=m+1} \end{cases}$$

Junio 2011. Opción B, E3.

Solución:

La matriz asociada al sistema es :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{-1} & \text{-1} & 0 \\ 3 & \text{m} & 1 & \text{m+1} \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = -1+m-3-(-3+1-m) = 2m-2 = 2(m-1)$$

$$|A| = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

Si $m \neq 1$ entonces $rango(A) = 3 = rango(\bar{A})$ =número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado. Resolvemos utilizando *Cramer*:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ m+1 & m & 1 \end{vmatrix}}{2(m-1)} = \frac{-1-(m+1)-(-(m+1)-m)}{2(m-1)} = \frac{m-1}{2(m-1)} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & m+1 & 1 \end{vmatrix}}{2(m-1)} = \frac{(m+1)-3-(1-(m+1))}{2(m-1)} = \frac{2m-2}{2(m-1)} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & m & m+1 \end{vmatrix}}{2(m-1)} = \frac{-(m+1)+m-(-3+(m+1))}{2(m-1)} = \frac{-m+1}{2(m-1)} = \frac{-(m-1)}{2(m-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Veamos el caso $m = 1$:

La matriz asociada al sistema es :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El $rango(A) = 2$ tomando cualquier menor de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero , por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. En la matriz ampliada observamos que la tercera fila es combinación lineal de la primera y la segunda $F_3 = 2 \cdot F_1 + F_2$, por tanto el $rango(\bar{A}) = 2 = rango(A) < 3 =$ número de incógnitas, y el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos tomando como parámetro a la variable z.

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ x - y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota al lector:

En muchos casos los cálculos se simplifican utilizando otro método de resolución, ya que a la vez que discutimos el sistema lo resolvemos. Vamos a ilustrar al lector con el método de Gauss y que él mismo contraste y opine qué método es más adecuado en cada caso.

El método de Gauss consiste en transformar la matriz asociada al sistema en otras equivalentes, utilizando combinaciones lineales entre filas, para conseguir una matriz triangular fácilmente resoluble.

El proceso consiste en ir ordenadamente consiguiendo ceros en la primera columna, *pivotando* con el primer elemento. Después en la segunda columna, *pivotando* con el segundo elemento y así sucesivamente.

Por ejemplo si en la primera columna tenemos $a_{11} \neq 0$ este será nuestro *pivote* consiguiendo ceros en el resto de los elementos de la columna, con las transformaciones siguientes en las filas: $F_2 \sim F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot F_1, \quad F_3 \sim F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot F_1 \quad , \cdots , \quad F_n \sim Fn - \frac{a_{n1}}{a_{11}} \cdot F_1$

Si en las transformaciones nos encontramos con una fila de ceros, es una fila que no aporta información, $0 = 0$, podemos eliminarla, pues era combinación lineal de las otras, así aparecen los sistemas compatibles indeterminados. Si nos encontramos con una fila de ceros en los coeficientes pero un número distinto de cero en el último lugar, correspondiente al término independiente, entonces $0 = a \neq 0$, el sistema es incompatible y no tiene solución.

En nuestro caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & m & 1 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \sim F_3 - 3F_1]{F_2 \sim F_2 - F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & m-3 & -2 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim -\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & m-3 & -2 & m-2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & m-3 & -2 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 + 2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & m-1 & 0 & m-1 \end{array}\right)$$

Discutimos el sistema dependiendo del valor de m:

- Si $m - 1 = 0\,, m = 1$ la última fila es nula, luego podemos eliminarla y tendríamos un sistema compatible indeterminado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

  Resolvemos utilizando z como parámetro:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\lambda \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Si $m \neq 1$ entonces podemos dividir la última fila por $(m-1)$ y obtenemos un sistema compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & m-1 & 0 & m-1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \sim \frac{1}{m-1}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

36.2.5.

Discutir según los valores de m y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \mathbf{mx + y = 2} \\ \mathbf{x + my = m} \\ \mathbf{x + y = 2} \end{cases}$

Septiembre 2011. Opción B, E3.

Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 2 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ordenamos las filas y colocamos primero la última fila que no depende del parámetro m. Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \sim F_2 - F_1]{F_3 \sim mF_1 - F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m\text{-}1 & m\text{-}2 \\ 0 & m\text{-}1 & 2m\text{-}2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m\text{-}1 & m\text{-}2 \\ 0 & 0 & m \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 0$ entonces el sistema es **incompatible**
- Si $m = 0$ el sistema es **compatible determinado**:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \text{-}1 & \text{-}2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \sim -F_2]{F_1 \sim F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

36.2.6.

Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \mathbf{ax + y + z = (a - 1)(a + 2)} \\ \mathbf{x + ay + z = (a - 1)^2(a + 2)} \\ \mathbf{x + y + az = (a - 1)^3(a + 2)} \end{cases}$

a) **Discutir el sistema según los valores del parámetro a.**

b) **Resolver el sistema para** $\mathbf{a = 1}$.

c) **Resolver el sistema para** $\mathbf{a = -2}$.

Junio 2012. Opción A, E3.

Solución:

a) La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2) \\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2) \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz asociada a los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2 - 3a$$

Factorizamos el polinomio por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2(a+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Por tanto si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces $rang(A) = 3 = rang(\bar{A})$ = número de incógnitas, y el sistema es **compatible determinado** para todo $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

- Si $a = 1$. La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

  $rang(A) = 1 = rang(\bar{A})$ < número de incógnitas, y el sistema es **compatible indeterminado**.

- Si $a = -2$. La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$rang(A) = 2 = rang(\bar{A}) <$ número de incógnitas, y el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (-\lambda - \mu, \lambda, \mu) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c) Para $a = -2$:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -\mu \\ x - 2y = -\mu \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = (\mu, \mu, \mu) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

36.2.7.

Se considera el sistema $\begin{cases} \mathbf{x + ay - z = 2} \\ \mathbf{2x + y + az = 0} \\ \mathbf{x + y - z = a + 1} \end{cases}$ **donde a es un parámetro real.**

Se pide:

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Hallar la solución del sistema para a=1, si procede.

Septiembre 2012. Opción A, E3.

Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-2+a^2-(-1-2a+a) = a^2+a-2 = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ entonces el rango de A es 3, igual al rango de la matriz ampliada, igual al número de incógnitas y por tanto el **Sistema es Compatible Determinado**.

Si $a = -2$

Consideramos un menor de orden 3 de la matriz ampliada para hallar su rango:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow rango(\overline{A}) = 3$$

El sistema es **Incompatible**.

Si $a = 1$

Al sustituir el valor de a, la primera fila es igual a la última fila, por tanto el rango de la matriz ampliada es 2, igual al rango de la matriz de coeficientes, pero menor que el número de incógnitas, y por tanto el **Sistema es Compatible Indeterminado**.

b) Resolvemos tomando como parámetro la variable $z = \lambda$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2+\lambda \\ 2 & 1 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim 2F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2+\lambda \\ 0 & 1 & 4+3\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \sim F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2-2\lambda \\ 0 & 1 & 4+3\lambda \end{array}\right)$$

Solución:

$$x = -2 - 2\lambda \quad y = 4 + 3\lambda \quad z = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

36.2.8.

Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Hallar a para que el sistema xA + yB = 4C de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y, sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de a.

Junio 2013, Opción A, E1.b.

Solución:

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x + 3y & = 4 \\ x - y & = 8 \\ ax - 4y & = 4 \end{cases} \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ a & -4 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema será compatible determinado si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada igual al número de incógnitas, igual a dos. Para que la matriz ampliada tenga rango dos, el determinante tiene que ser nulo.

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ a & -4 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 + 24a - (-4a + 12 - 64) = 28a - 28 \quad \Rightarrow a = -1$$

Resolvemos para $a = -1$, como el rango es dos, nos quedamos con las dos primeras filas, reordenando:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim F_2/5} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \sim F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{12}{5} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{28}{5} \quad y = -\frac{12}{5}$$

36.2.9.

a) **Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m.**

$$\begin{cases} \mathbf{3x - y + mz = 0} \\ \mathbf{x + y = m} \\ \mathbf{mx - 3y + mz = -2m} \end{cases}$$

b) **Resolverlo para m=0.**

Septiembre 2013. Opción A. E1

Solución:

Consideramos la matriz asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \text{-1} & \text{m} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \text{m} \\ \text{m} & \text{-3} & \text{m} & \text{-2m} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -3 & m \end{vmatrix} = 3m - 3m - (m^2 - m) = m - m^2 = m(1 - m) = 0 \quad \Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) =$ número de incógnitas $= 3$ luego el sistema es compatible determinado.

Si $m = 0$ tomamos un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow rango(A) = 2$$

La última columna de términos independientes son todo ceros luego $rango(\overline{A}) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1$ el $rango(A) = 2$, veamos el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego el $rango(\overline{A}) \neq 3$ y por tanto el rango es dos y el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos para $m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \text{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-3} & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & \text{-1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \text{-3} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & \text{-1} & 0 \\ 0 & \text{-3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \sim F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \text{-4} & 0 \\ 0 & \text{-3} & 0 \end{array}\right)$$

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

36.2.10.

Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m

$$\begin{cases} \mathbf{mx + y = 1} \\ \mathbf{x + my = m} \\ \mathbf{2mx + 2y = m + 1} \end{cases}$$

Junio 2014. Opción A, E1.

Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \text{m} & 1 & 1 \\ 1 & \text{m} & \text{m} \\ 2\text{m} & 2 & \text{m+1} \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada para obtener el rango:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2m & 2 & m+1 \end{vmatrix} = m^2(m+1)+2+2m^2-(2m^2+m+1+2m^2) = m^3-m^2-m+1 = (m+1)(m-1)^2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ entonces $rango(\overline{A}) = 3$ y $rango(A) \neq rango(\overline{A})$ con lo que el sistema es incompatible.

Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz A solo tiene una fila linealmente independiente, mientras que $\overline{A}$ tiene dos filas linealmente independientes, por lo tanto sus rangos son distintos y el sistema es incompatible.

Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 1$ y el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos en este caso:

$$x = 1 - \lambda \quad y = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

36.2.11.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \mathbf{mx - y = 1} \\ \mathbf{-x + my = 1 - 2m} \end{cases}$

a) **Discutir el sistema según los valores de m.**

b) **Hallar los valores de m para los que el sistema tenga alguna solución en la que x = 2.**

Septiembre 2014. Opción B. E1

Solución:

Consideramos la matriz asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ -1 & m & 1-2m \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 2 =$ número de incógnitas, y el sistema es compatible determinado.

Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$rango(A) = rango(\overline{A}) = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$1 = rango(A) \neq rango(\overline{A}) = 2$ y el sistema es incompatible.

b)

Si $x = 2$ entonces:

$$\begin{cases} 2m - y = 1 \\ -2 + my = 1 - 2m \end{cases} \Rightarrow -2 + m(2m-1) = 1 - 2m \quad \Rightarrow 2m^2 + m - 3 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

36.2.12.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \mathbf{x + my = -1} \\ \mathbf{(1-2m)x - y = m} \end{cases}$ **, se pide:**

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resolver el sistema en los casos en que la solución no sea única.

c) Calcular los valores de m para que $\mathbf{x = -3}$ y $\mathbf{y = 2}$ sea solución.

Junio 2015. Opción B. E1

Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & -1 \\ 1-2m & -1 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{vmatrix} = -1 - m + 2m^2 = 0 \quad \Rightarrow m = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq -\dfrac{1}{2}$ entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 2$ igual al número de incógnitas, por tanto el sistema es compatible determinado.

Si $m = 1$ entonces la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El $rango(\overline{A}) = 1 = rango(A)$ y por tanto el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = -\dfrac{1}{2}$ entonces la matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

El $rango(\overline{A}) = 2 \neq rango(A) = 1$ y el sistema es incompatible.

b) Resolvemos para $m = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$y = \lambda \quad x = -1 - \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Si $x = -3$ y $y = 2$ entonces:

$$\begin{cases} -3 + 2m = -1 \\ (1 - 2m)(-3) - 2 = m \end{cases} \Rightarrow m = 1$$

36.2.13.

Consideremos el sistema $\begin{cases} \mathbf{x + 2y + 3z = 4} \\ \mathbf{(a+3)y = 0} \\ \mathbf{(a+2)z = 1} \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) Resolverlo cuando sea posible.

Junio 2010, Fase específica, Opción A, E4.

Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \text{a+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{a+2} & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = (a+3)(a+2) = 0 \quad \Rightarrow a = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

Si $a \neq -3$ y $a \neq -2$ entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 3 =$ número de incógnitas y por tanto el sistema es compatible determinado.

Si $a = -3$ la matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$rango(A) = rango(\overline{A}) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = -2$ la matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$rango(A) = 2 \neq rango(\overline{A}) = 3$ y el sistema es incompatible.

b) Resolvemos para $a \neq -3$ y $a \neq -2$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix}}{(a+3)(a+2)} = \frac{4(a+3)(a+2) - 3(a+3)}{(a+3)(a+2)} = \frac{4a+5}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix}}{(a+3)(a+2)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(a+3)(a+2)} = \frac{a+3}{(a+3)(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

Resolvemos para el caso $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow z = -1 \quad y = \lambda \quad x = 7 - 2\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

36.2.14.

a) Discutir, según el valor del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + mz = 2} \\ \mathbf{x + my + z = 2m} \\ \mathbf{x + y - mz = 0} \end{cases}$$

b) Resolverlo para $\mathbf{m = 1}$.

Junio 2016. Opción B, E1.

Solución:

a)

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \text{m} & 2 \\ 1 & \text{m} & 1 & 2\text{m} \\ 1 & 1 & \text{-m} & 0 \end{array} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + m + 1 - (m^2 - m + 1) = -2m(m-1) = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 3$ igual al número de incógnitas y por tanto el sistema es compatible determinado.

Si $m = 0$ la matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de la matriz ampliada tomando un menor de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego el rango de la matriz ampliada es 3, distinto del rango de la matriz de coeficientes y por tanto el sistema es incompatible.

Si $m = 1$ la matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Las dos primeras filas son iguales, luego $rango(A) = rango(\overline{A}) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim (-1/2)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$z = 1 \quad y = \lambda \quad x = 1 - \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

36.2.15.

a) Discutir, en función del valor m, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \mathbf{mx + y + z = 0} \\ \mathbf{my + mz = 2} \end{cases}$$

y resolverlo para $\mathbf{m = -1}$.

b) Para m=1 añadir una ecuación al sistema del apartado a) para obtener: en un caso un sistema compatible determinado y en otro caso un sistema incompatible.

Septiembre 2016. Opción A. E1

Solución:

a)

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & m & 2 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes tomando un menor de orden 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = m^2 = 0 \quad \Rightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0$ entonces $rango(A) = 2 = rango(\overline{A})$ menor que el número de incógnitas que son tres, por tanto el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 0$

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Y el sistema es incompatible.

Resolvemos para $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Consideramos $z = \lambda$ con lo que tenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -1 & 2+\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \sim F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2+\lambda \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{array}\right)$$

$$x = -2 \quad y = -2 - \lambda \quad z = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b)

Para $m = 1$ la matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Para obtener un sistema compatible determinado, bastaría añadir una ecuación $ax + by + cz = 0$ que fuera linealmente independiente, es decir que el determinante de la matriz de coeficientes no fuera nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = c + a - (a+b) = c - b \neq 0 \quad \Rightarrow c \neq b$$

Por ejemplo $x + 2y + 3z = 0$.

Para obtener un sistema incompatible bastaría añadir una ecuación de la forma:

$$a(x+y+z) + b(y+z) = k \quad k \neq 2b$$

Así el $rango(A) = 2 \neq rango(\overline{A}) = 3$. Por ejemplo para $a = 1$ $b = 1$ $k = 0$ tendríamos la ecuación: $x + 2y + 2z = 0$

36.2.16.

a) **Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ :**

$$\begin{cases} \mathbf{x + \lambda y + \lambda z = 1} \\ \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + 4z = 2} \end{cases}$$

b) **Resolverlo para $\lambda = 1$.**

Junio 2017. Opción B, E1.

Solución: La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2\lambda + \lambda - (\lambda + 4\lambda + 2) = -2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1$ entonces $rango(A) = rango(\overline{A}) = 3$, por tanto el sistema es compatible determinado.

b) Si $\lambda = 1$ La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F2 \sim F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado. Consideramos $z = \mu$ como parámetro y resolvemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-\mu \\ 0 & 1 & 1-3\mu \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \sim F1-F2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\mu \\ 0 & 1 & 1-3\mu \end{array}\right)$$

$$x = 2\mu \quad y = 1 - 3\mu \quad z = \mu \quad \mu \in \mathbb{R}$$

36.2.17.

a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathbf{mx + y + z = 1} \\ \mathbf{x + y + 2z = 1} \end{cases}$$

b) Resolverlo para m=1.

Septiembre 2017. Opción B, E1.

Solución: La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathrm{m} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, basta tomar un menor de orden dos distinto de cero, que además no depende del parámetro:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Luego $rango(A) = rango(\overline{A}) = 2$ menor que el número de incógnitas que es tres y por tanto el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de m.

Si $m = 1$ resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow z = 0 \quad x + y = 1$$

$$x = \lambda \quad y = 1 - \lambda \quad z = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37. Geometría

37.1. Vectores. Rectas y planos en el espacio

37.1.1.

Se consideran las rectas r y s dadas por las ecuaciones:

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{x - y + z = 1} \\ \mathbf{2x + y - z = 2} \end{cases} \qquad \mathbf{s} \equiv \frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{y+1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{a}}$$

a) **Hallar el valor del parámetro a para que r y s sean perpendiculares.**

b) **Hallar la recta t paralela a r y que pasa por el punto de s cuya coordenada z es 0.**

Junio 2010, Fase específica, Opción A, E4.

Solución:

a) Para que r y s sean perpendiculares, el producto escalar de sus respectivos vectores directores debe ser nulo.

Calculamos primero los vectores directores de cada recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,3,3) = \frac{1}{3}(0,1,1)$$

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{m} = (3,2,a)$$

Obtenemos a imponiendo la condición de perpendicularidad:

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{m} = (0,1,1) \cdot (3,2,a) = 0 + 2 + a \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

b) Hallar la recta t paralela a r y que pasa por el punto de s cuya coordenada z es 0.

$$s \equiv (2,-1,0) + \lambda(3,2,a) = (2 + 3\lambda, -1 + 2\lambda, 0 + a\lambda)$$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow P = (2,-1,0)$ es el punto buscado. Y la recta pedida será:

$$t \equiv (2,-1,0) + \lambda(0,1,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37.1.2.

Probar que el punto $\mathbf{P(1,1,2)}$ pertenece a $\boldsymbol{\pi}$, y calcular la recta perpendicular a $\boldsymbol{\pi}$ que pasa por P.

Septiembre 2010, Fase general, Opción A, E3.b

Solución:

$P \in \pi$ si verifica la ecuación del plano:

$$12 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 7$$

Luego efectivamente es un punto del plano.

Ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por $P(1,1,2)$:

$$r \equiv (1,1,2) + \lambda(12,3,-4) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37.1.3.

Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\mathbf{P(2,-1,1)}$ y corta perpendicularmente a la recta $\mathbf{r \equiv \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = z}$.

Septiembre 2010, Fase general, Opción B, E3.

Solución:

Calculamos la proyección, P', de P sobre r:

Tomamos un punto cualquiera de la recta r: $R(2,1,0) + \lambda(2,2,1) = (2+2\lambda, 1+2\lambda, \lambda)$.

Buscamos R tal que el vector $\vec{RP}$ sea ortogonal al vector director de la recta r:

$$\vec{RP} = (2,-1,1) - (2+2\lambda, 1+2\lambda, \lambda) = (-2\lambda, -2-2\lambda, 1-\lambda)$$

$$0 = \vec{RP} \cdot \vec{n} = (-2\lambda, -2-2\lambda, 1-\lambda) \cdot (2,2,1) = -9\lambda - 3 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$$

El vector $\vec{PP'}$ es el vector director de la recta perpendicular:

$$\vec{PP'} = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) - (2,-1,1) = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{2}{3} \cdot (-1,2,-2)$$

Y la ecuación de la recta pedida es:

$$s \equiv (2-1,1) + \mu(-1,2,-2) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

37.1.4.

a) **Determinar la posición relativa de la recta r** $\mathbf{\equiv \begin{cases} y - x = 1 \\ z - 2x = 0 \end{cases}}$

y el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x - y = 0}$

b) **Hallar el plano perpendicular a** $\boldsymbol{\pi}$ **que contiene a r.**

Junio 2011. Opción A, E4.

Solución:

El vector normal al plano es $(1, -1, 0)$.

Resolvemos el sistema y obtenemos la ecuación en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv (0,1,0) + \lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \equiv (0,1,0) + \mu(1,1,2) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Calculamos el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal al plano:

$$(1,1,2) \cdot (1,-1,0) = 0$$

Por tanto son ortogonales y, o bien r es paralela a π, o bien r pertenece a π. Veamos si el punto $(0,1,0)$ de la recta está en el plano:

$$0 - 1 \neq 0$$

Luego la recta es **paralela** al plano.

b) El plano perpendicular a π que buscamos contiene a r y al vector normal a π, luego su ecuación vectorial será:

$$\pi' \equiv (0,1,0) + \lambda(1,1,2) + \mu(1,-1,0)$$

Y su ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-z + 2(y-1) - (z-2x) = 0$$

$$x + y - z - 1 = 0$$

37.1.5.

a) Hallar la recta r que pasa por el punto $\mathbf{A = (1, -1, 0)}$, está contenida en el plano $\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{x + y = 0}$, y corta a la recta $\mathbf{s \equiv x = y = z}$.

Junio 2011. Opción B, E4.a.

Solución:

Calculamos el punto de corte de s y π:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = y \\ y = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

El punto $A(1, -1, 0)$ y $s \cap \pi = P(0, 0, 0)$ están en el plano π luego el vector director de r será $\vec{AP} = (0, 0, 0) - (1, -1, 0) = (-1, 1, 0)$

Por tanto la recta r buscada es:

$$r \equiv (1, -1, 0) + \lambda(-1, 1, 0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37.1.6.

Sean la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{my + z = 0} \end{cases}$ y el plano $\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{x + (m+1)y + mz = m + 1}$. Estudiar la posición relativa de la recta y el plano según los valores de m.

Septiembre 2011. Opción A, E4.

Solución:

La recta viene definida como intersección de dos planos. Consideremos el sistema de ecuaciones formados por los tres planos:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

Tendrá solución única si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. En este caso **la recta y el plano se cortan en un punto:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1)$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \text{m} & 1 & 0 \\ 1 & \text{m+1} & \text{m} & \text{m+1} \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \text{m} & 1 & 0 \\ 0 & \text{m} & \text{m} & \text{m} \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \text{m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \text{m-1} & \text{m} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \sim \frac{1}{m-1} F_3]{F_2 \sim \frac{1}{m} F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m}{m-1} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim F_2 - \frac{1}{m} F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m}{m-1} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \sim F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{m}{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m}{m-1} \end{array}\right)$$

El punto de intersección de recta y plano es $P\left(\dfrac{m}{m-1}, \dfrac{-1}{m-1}, \dfrac{m}{m-1}\right)$ $\forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

- Para $\mathbf{m = 0}$

$$\begin{cases} \pi & \equiv x + y = 1 \\ & \\ r & \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \quad r \in \pi$$

La recta está contenida en el plano.

- Para $\mathbf{m = 1}$

$$\begin{cases} \pi & \equiv x + 2y + z = 2 \\ & \\ r & \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = (1, 2, 1) \\ r \equiv (1, 0, 0) + \lambda(-1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{v_r} \\ (1, 0, 0) \notin \pi \end{cases}$$

La recta y el plano son paralelos.

37.1.7.

a) Calcular un vector unitario y ortogonal a los vectores $\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $\tilde{\mathbf{w}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

Septiembre 2011, Opción B, E4.a)

Solución:

Utilizamos el producto vectorial:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - (-2\vec{k} + \vec{j}) = (2, -1, 2)$$

Dividimos por el módulo para obtener el vector unitario:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(2, -1, 2)}{\sqrt{4+1+4}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

37.1.8.

b) Calcular el plano que contiene a las rectas $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{y+1=0} \\ \mathbf{x+z=1} \end{cases}$

y $\mathbf{s \equiv \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+3}{0} = z-2}$.

Septiembre 2011, Opción B, E4.b)

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases} \equiv (1, -1, 0) + \lambda(-1, 0, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv (0, -3, 2) + \mu(-1, 0, 1) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Las dos rectas son paralelas. Calculamos el otro vector director del plano que contiene a estas dos rectas:

$$\vec{v} = (1, -1, 0) - (0, -3, 2) = (1, 2, -2)$$

$$\pi \equiv (1, -1, 0) + \lambda(-1, 0, 1) + \mu(1, 2, -2)$$

Ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2z + y + 1 - (2(y+1) + 2(x-1)) = -2x - y - 2z + 1$$

$$\pi \equiv 2x + y + 2z - 1 = 0$$

37.1.9.

Se consideran las rectas: $\mathbf{r \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{2}}$ **;** $\mathbf{s \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}}$

a) Justificar razonadamente que ambas rectas se cruzan.

b) Hallar la perpendicular común y que corta a las dos rectas.

Junio 2012. Opción A, E4.

Solución:

a)

$$r \equiv (0,1,3) + \lambda(1,-2,2) = A + \lambda \cdot \vec{u} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv (2,0,-1) + \mu(3,1,-1) = B + \mu \cdot \vec{v} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, por tanto no son rectas paralelas, lo que implica que se cortan o se cruzan. En el primer caso los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{AB}$ son linealmente dependientes y en el segundo caso son linealmente independientes. Calculamos pues el determinante:

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 6 - (24 + 1 + 4) = -35 \neq 0$$

Lo que implica que los tres vectores son linealmente independientes y por tanto **las rectas se cruzan.**

b) El vector director de la perpendicular común será $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} + 6\vec{j} - (-6\vec{k} - \vec{j} + 2\vec{i}) = (0,7,7) = 7 \cdot (0,1,1)$$

Calculamos ahora la recta perpendicular que corta a las dos dadas, t, como la intersección de dos planos, π_1 plano que contiene a r y al vector $\vec{n}$, y π_2 plano que contiene a s y al vector $\vec{n}$:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + y - z + 2 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x - 2 & y - 0 & z + 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y + 3z - 1 = 0$$

Calculamos la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} 4x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = -2 + \mu \\ 2x - 3y = 1 - 3\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{14} \\ y = -\frac{4}{7} + \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$t \equiv \left(-\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}, 0\right) + \mu \cdot (0, 1, 1) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

37.1.10.

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos P(2,1,3) y Q(1,3,1); los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto R(-4,7,-6).

a) Calcular la ecuación de la recta r.

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

b) Hallar las coordenadas de uno de los otros vértices.

Junio 2012. Opción B, E4.

Solución:

a)

$$\vec{v} = \vec{PQ} = (1, 3, 1) - (2, 1, 3) = (-1, 2, -2)$$

$$r \equiv (-4, 7, -6) + \lambda(-1, 2, -2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b)

$$\vec{PR} = (-4, 7, -6) - (2, 1, 3) = (-6, 6, -9) \equiv (-2, 2, -3)$$

$$\pi \equiv (2, 1, 3) + \lambda(-1, 2, -2) + \mu(-2, 2, -3)$$

Ecuación continua del plano:

$$0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6(x-2)-2(z-3)+4(y-1)-(-4(z-3)+3(y-1)-4(x-2))$$

$$\pi \equiv -2x + y + 2z - 3 = 0$$

c) Consideramos el plano perpendicular a la recta s que pasa por P y Q:

$$S \equiv (2, 1, 3) + \lambda(-1, 2, -2)$$

$$\pi' \equiv -x + 2y - 2z + D = 0$$

Para calcular D, imponemos al plano que pase por P:

$$-2 + 2 - 2 \cdot 3 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 6$$

$$\pi' \equiv -x + 2y - 2z + 6 = 0$$

Calculamos la intersección del plano con la recta r:

$$-(-4 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 2(-6 - 2\lambda) + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9\lambda + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4$$

$$V = (0, -1, 2)$$

37.1.11.

Dado el punto A(2,1,1) y las rectas

$$\mathbf{r \equiv x = \frac{y+2}{2} = z - 1 \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}}$$

Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y corta a r y s.

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.

Septiembre 2012. Opción A, E4.

Solución:

a) Calculamos el plano que pasa por A y por r:

$$r \equiv (0, -2, 1) + \lambda(1, 2, 1) \quad A = (2, 1, 1)$$

$$\vec{PA} = (2, 1, 1) - (0, -2, 1) = (2, 3, 0)$$

$$\pi \equiv (0, -2, 1) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(2, 3, 0)$$

Calculamos la ecuación general del plano:

$$0 = \begin{vmatrix} x - 0 & y + 2 & z - 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3(z - 1) + 2(y + 2) - (4(z - 1) + 3x) = -3x + 2y - z + 5$$

Calculamos el punto de corte de este plano con la recta s. Primero resolvemos el sistema para obtener la ecuación vectorial de s.

$$s \equiv (0,0,2) + \lambda(-1,1,1) = (-\lambda, \lambda, 2+\lambda)$$

Calculamos el corte con el plano imponiendo que un punto cualquiera de la recta s verifique la ecuación del plano:

$$-3(-\lambda) + 2\lambda - (2+\lambda) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

$$Q = \pi \cap s = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

La recta que buscamos pasa por Q y A:

$$\vec{AQ} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) - (2,1,1) = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right) \mapsto (-5,-7,1)$$

$$t \equiv (2,1,1) + \lambda(-5,-7,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) El plano perpendicular a r tendrá el mismo vector normal que el vector director de r (1,2,1):

$$\pi \perp r \equiv x + 2y + z + D = 0$$

Imponemos al plano que contenga al punto A(2,1,1):

$$2 + 2 + 1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -5$$

$$\pi = x + 2y + z - 5 = 0$$

37.1.12.

Sea s la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} \mathbf{x = 3 + 2t} \\ \mathbf{y = -1 - t} \\ \mathbf{z = 1} \end{cases}$

a) **Hallar la ecuación de recta r que pasa por el punto P(1,0,5) y corta perpendicularmente a la recta s .**

b) **Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a s.**

Septiembre 2012. Opción B, E4.

Solución:

$$s \equiv (3,-1,1) + t(2,-1,0) \quad \Rightarrow \vec{v_s} = (2,-1,0)$$

- Calculamos el plano perpendicular a la recta s que pase por el punto $P(1,0,5)$:

$$\pi \equiv 2x - y + D = 0 \quad (1,0,5) \in \pi \quad \Rightarrow 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$\pi \equiv 2x - y - 2 = 0$$

- Calculamos la intersección del plano π con la recta dada s:

$$2(3+2t) - (-1-t) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 + 5t = 0 \Rightarrow t = -1 \quad \Rightarrow \quad s \cap \pi = P'(1,0,1)$$

- La recta que buscamos pasa por $P(1,0,5)$ y por $P'(1,0,1)$:

$$\vec{v_r} = (1,0,1) - (1,0,5) = (0,0,-4) \mapsto (0,0,1)$$

$$r \equiv (1,0,5) + \lambda(0,0,1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a s.

$$\pi \equiv (1,0,1) + \lambda(2,-1,0) + \mu(0,0,1)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 - (2y) = -x - 2y + 1$$

$$\pi \equiv x + 2y - 1 = 0$$

37.1.13.

Sean los puntos A(1,2,-1), P(0,0,5), Q(1,0,4) y R(0,1,6)

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A, es paralela al plano que pasa por los puntos P,Q y R, y tal que la primera componente de su vector director es doble que la segunda.

Junio 2013. Opción A, E2.a.

Solución:

Calculamos la ecuación del plano que pasa por P,Q y R.

$$\vec{PQ} = (1,0,4) - (0,0,5) = (1,0,-1) \quad \vec{PR} = (0,1,6) - (0,0,5) = (0,1,1)$$

$$\Rightarrow \quad \pi \equiv (0,0,5) + \lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,1)$$

Calculamos la ecuación general:

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = z - 5 - (y - x) = x - y + z - 5$$

$$\vec{v_r} = (2a, a, c) \quad \vec{n_\pi} = (1,-1,1) \quad \Rightarrow (2a,a,c)\cdot(1,-1,1) = 0 \quad \Rightarrow 2a - a + c = 0 \Rightarrow c = -a$$

$$\Rightarrow \vec{v_r} = (2a, a, -a) \equiv (2,1,-1)$$

La ecuación vectorial de la recta que buscamos es:

$$r \equiv (1,2,-1) + \lambda(2,1,-1)$$

37.1.14.

Sean los puntos P(1,4,-1), Q(0,3,-2) y la recta $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y - z = 4} \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por P, por un punto R de la recta r y es perpendicular a la recta que pasa por Q y por R.

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano $\pi \equiv \mathbf{x - y - 3 = 0}$ **.**

Junio 2013. Opción B, E2

Solución:

a) Tomamos un punto genérico de la recta r y calculamos el vector normal del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda - 4 \end{cases} \equiv (1, \lambda, \lambda - 4)$$

$$\vec{QR} = (1, \lambda, \lambda - 4) - (0,3,-2) = (1, \lambda - 3, \lambda - 2)$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x + (\lambda - 3)y + (\lambda - 2)z + D = 0$$

Imponemos al plano que contenga a R y a P:

$$R \in \pi \Rightarrow 1 + (\lambda - 3)\lambda + (\lambda - 2)(\lambda - 4) + D = 0$$

$$P \in \pi \Rightarrow 1 + (\lambda - 3)4 + (\lambda - 2)(-1) + D = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -D = 2\lambda - 9\lambda + 9 \\ -D = 3\lambda - 9 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 3 \quad \Rightarrow D = 0 \quad R = (1, 3, -1)$$

$$\pi \equiv x + z = 0$$

b)

$$r \equiv (1, 0, -4) + \lambda(0, 1, 1) \quad \pi \equiv x - y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 0)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|(0,1,1) \cdot (1,-1,0)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}\ rad$$

37.1.15.

Sea el plano $\pi \equiv \mathbf{x + y + z = 0}$, la recta $\mathbf{r \equiv x = y = z}$, y el punto A(3,2,1)
a) Hallar la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r

Septiembre 2013. Opción A. E2.a

Solución:

Calculamos el plano paralelo a π' que pasa por A

$$\pi' \equiv x + y + z + D = 0 \quad A \in \pi' \quad \Rightarrow 3 + 2 + 1 + D = 0 \quad \Rightarrow D = -6$$

$$\pi' \equiv x + y + z - 6 = 0$$

Calculamos el corte de π' con la recta r

$$r \equiv (\lambda, \lambda, \lambda) \quad \Rightarrow \lambda + \lambda + \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3\lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \pi' \cap r = P(2, 2, 2)$$

La recta que buscamos pasa por A y por P

$$\vec{AP} = (2, 2, 2) - (3, 2, 1) = (-1, 0, 1)$$

$$s \equiv (3, 2, 1) + \lambda(-1, 0, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37.1.16.

Sean las rectas $\mathbf{r \equiv x = -y = z - 1}$ $\mathbf{s \equiv x - 2 = y = z - m}$
a) Determinar m para que las rectas sean coplanarias.

Septiembre 2013. Opción B. E2.a

Solución:

Para que las rectas sean coplanarias, imponemos que se corten, es decir $r \cap s \neq \varnothing$ Consideramos la ecuación vectorial de las dos rectas y calculamos la intersección:

$$r \equiv (0,0,-1) + \lambda(1,-1,1) \equiv (\lambda, -\lambda, -1+\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv (2,0,m) + \mu(1,1,1) \equiv (2+\mu, \mu m + \mu) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 2+\mu = \lambda \\ \mu = -\lambda \\ m+\mu = \lambda - 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \lambda = 1 \;, \mu = -1 \;\Rightarrow m = 1$$

37.1.17.

Sea π el plano que pasa por los puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) y r la recta dada por r $\equiv \dfrac{\mathbf{x-7}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{y+6}}{\mathbf{-1}} = \dfrac{\mathbf{z+3}}{\mathbf{2}}$
a) Calcular el ángulo que forman la recta r y el plano π.

Junio 2014. Opción A, E2.a

Solución:

Calculamos la ecuación general del plano:

$$\vec{AB} = (2,3,2) - (1,-1,1) = (1,4,1) \quad \vec{AC} = (3,1,0) - (1,-1,1) = (2,2,-1)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4(x-1)+2(z-1)+2(y+1)-(8(z-1)-(y+1)+2(x-1) = -2x+y-2z+5$$

$$\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0 \quad \vec{n} = (2,-1,2)$$

Luego la recta es perpendicular al plano, formando un ángulo recto.

37.1.18.

Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 \equiv \mathbf{x+y+z=3}$, paralela al plano $\pi_2 \equiv \mathbf{x=0}$, y que pasa por el punto simétrico de B(-1,1,1) respecto de π_2.

Junio 2014. Opción B. E2

Solución:

Los vectores normales de los planos dados son $\vec{n_1} = (1,1,1)$ y $\vec{n_2} = (1,0,0)$ respectivamente. Por pertenecer a uno y ser paralelo al otro, el producto escalar de estos dos vectores con el vector director de la recta será nulo. Sea $\vec{v_r} = (a,b,c)$

$$\begin{cases} 0 = (a,b,c)\cdot(1,1,1) = a+b+c \\ 0 = (a,b,c)\cdot(1,0,0) = a \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r} = (0,-1,1)$$

Calculamos el simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de π_2. Consideramos la recta perpendicular al plano que pasa por B:

$$s \equiv (-1,1,1) + \lambda(1,0,0) = (-1+\lambda,1,1)$$

Calculamos el corte de esta recta con el plano:

$$-1+\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \quad \Rightarrow s\cap\pi_2 = (0,1,1)$$

Este punto será el punto medio del segmento que une $B(-1,1,1)$ y $B'(x,y,z)$:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = 0 \\ \dfrac{y+1}{2} = 1 \\ \dfrac{z+1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x=1 \quad y=1 \quad z=1$$

La recta buscada será:

$$r \equiv (1,1,1) + \lambda(0,-1,1) \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

37.1.19.

Sea el punto A(1,1,3) y la recta de ecuación r $\equiv \begin{cases} \mathbf{x-y+2=0} \\ \mathbf{z=2} \end{cases}$

a) Calcular el plano perpendicular a la recta r que pase por A

Septiembre 2014. Opción A. E2.a

Solución:

Calculamos la ecuación vectorial de la recta r:

$$z=2 \quad y=\lambda \quad x=\lambda-2 \quad \Rightarrow r\equiv(-2,0,2)+\lambda(1,1,0)$$

La ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A(1,1,3):

$$\pi\equiv x+y+D=0 \quad A\in\pi \Rightarrow 1+1+D=0 \Rightarrow D=-2 \quad \Rightarrow \pi\equiv x+y-2=0$$

37.1.20.

a) **Dados el punto A(3,5,1), la recta** $\mathbf{r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+2 = z+1}$
y el plano $\pi \equiv \mathbf{3x - 2y + z + 5 = 0}$**, determinar el punto B de** π **tal que la recta AB sea paralela a la recta r.**

b) **Hallar las coordenadas de un vector de módulo 1 que sea perpendicular a los vectores** $\tilde{\mathbf{PQ}}$**, y** $\tilde{\mathbf{PR}}$**, siendo P(1,3,-1), Q(2,0,1) y R(-1,1,0).**

Septiembre 2014. Opción B. E2

Solución:

a)

$$r \equiv (1,-2,-1) + \lambda(2,1,1) \quad \Rightarrow \vec{v_r} = (2,1,1)$$

Sea $B(a,b,c)$ entonces $\vec{AB} = (a,b,c) - (3,5,1) = (a-3, b-5, c-1)$ como es paralelo a r se verificará:

$$\begin{cases} a - 3 = 2\lambda \\ b - 5 = \lambda \\ c - 1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow a = 3 + 2\lambda \quad b = \lambda + 5 \quad c = \lambda + 1$$

Imponemos la condición de que B pertenezca al plano:

$$3(3+2\lambda) - 2(\lambda+5) + (\lambda+1) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -1 \quad \Rightarrow B = (1,4,0)$$

b)

$$\vec{PQ} = (2,0,1) - (1,3,-1) = (1,-3,2)$$

$$\vec{PR} = (-1, 1-0) - (1,3,-1) = (-2,-2,1)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 2k - 4j - (6k + j - 4i) = i - 5j - 8k \mapsto (1,-5,-8)$$

Dividimos por su módulo para obtener el vector unitario:

$$V = \frac{1}{3\sqrt{10}}(1,-5,-8)$$

37.1.21.

a) **Calcular la recta que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto P(1,2,3).**

b) **Estudia en función del parámetro a, la posición relativa de la recta** $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = 0} \end{cases}$ **y el plano** $\pi \equiv \mathbf{x + y + az = 1}$**.**

Junio 2015. Opción A. E2

Solución:

a) Calculamos el plano perpendicular al eje OZ que pasa por P(1,2,3).

$$ejeOZ \equiv (0,0,0) + \lambda(0,0,1) \quad \Rightarrow \vec{n} = (0,0,1) \quad \Rightarrow 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

$$\pi \equiv z - 3 = 0$$

Calculamos la intersección de este plano con el eje OZ:

$$\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -3 \quad \Rightarrow Q(0,0,3)$$

Buscamos pues, la recta que pasa por P(1,2,3) y por Q(0,0,3):

$$\vec{PQ} = (0,0,3) - (1,2,3) = (-1,-2,0) \equiv (1,2,0)$$

$$r \equiv (1,2,3) + \lambda(1,2,0)$$

b)

$$r \equiv (0,0,0) + \lambda(0,0,1)$$

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (0,0,1) \cdot (1,1,a) = a$$

Si $a = 0$ la recta es paralela al plano. $((0,0,\lambda) \notin x + y = 1)$
Si $a \neq 0$ la recta corta al plano en un punto (0,0,1/a).

37.1.22.

a) **¿Puede haber dos vectores** $\tilde{\mathbf{u}}$ **y** $\tilde{\mathbf{v}}$ **de** $\mathbb{R}^3$ **tales que** $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = -3$; $|\tilde{\mathbf{u}}| = 1$ **y** $|\tilde{\mathbf{v}}| = 2$**?**

b) **Hallar el valor de a para que exista una recta que pase por el punto** $\mathbf{P(1+a, 1-a, a)}$**, corte a la recta** $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{x + y = 2} \\ \mathbf{z = 1} \end{cases}$ **y sea paralela a la recta** $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} \mathbf{x + z = 0} \\ \mathbf{y = 0} \end{cases}$

Junio 2015. Opción B. E2

Solución:

a)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \Rightarrow -3 = 2\cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{3}{2}\,!$$

No puede ser, ya que $|\cos(\alpha)| < 1$

b)

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow (2, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\mu \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow (0, 0, 0) + \mu(-1, 0, 1)$$

La recta que buscamos será:

$$t \equiv (1 + a, 1 - a, a) + \gamma(-1, 0, 1)$$

Imponemos que corte a r:

$$\begin{cases} 1 + a - \gamma = 2 - \lambda \\ 1 - a = \lambda \\ a + \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

37.1.23.

Sean las rectas $\mathbf{r \equiv x = y = z}$ y $\mathbf{s} \equiv \begin{cases} \mathbf{x - y = 1} \\ \mathbf{x - 3z = 1} \end{cases}$

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan

b) Calcular la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s.

Septiembre 2015. Opción A. E2

Solución:

$$r \equiv (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) \quad s \equiv (1, 0, 0) + \mu(3, 3, 1)$$

$$\Rightarrow r \cap s \equiv \begin{cases} \lambda = 1 + 3\mu \\ \lambda = 3\mu \\ \lambda = \mu \end{cases}$$

El sistema es incompatible y no tiene solución, luego las rectas se cruzan.

b)

Calculamos el vector perpendicular a los dos vectores directores de las dos rectas:

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i + 3k + 3j - (3k + j + 3i) = -2i + 2j \to (-1, 1, 0)$$

Calculamos los planos que contienen a las rectas respectivamente y a este vector:

$$\pi_r \equiv (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(-1, 1, 0)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z - y - (-z + x) = -x - y + 2z \quad x + y - 2z = 0$$

$$\pi_s \equiv (1, 0, 0) + \lambda(3, 3, 1) + \mu(-1, 1, 0)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6z - 2y - (-6z + 2(x-1)) = -2x - 2y + 12z + 2 \quad x + y - 6z - 1 = 0$$

La recta que buscamos es la intersección de estos dos planos:

$$t \equiv \pi_r \cap \pi_s = \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - 6z - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$t \equiv \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right) + \lambda(-1, 1, 0)$$

37.1.24.

a) **Determinar la ecuación del plano que es perpendicular al segmento de extremos A(0,-1,3) y B(2,-1,1) y que pasa por el punto medio de dicho segmento.**

b) **Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes del plano $\mathbf{2x + y + 2z - 2 = 0}$ con los ejes coordenados.**

Septiembre 2015. opción B. E2

Solución:

a)

$$\vec{AB} = (2, -1, 1) - (0, 1, 3) = (2, 0, -2) \quad M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{-1-1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\pi \equiv 2x - 2z + D = 0 \quad M \in \pi \Rightarrow 2 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \quad \pi \equiv x - z + 1 = 0$$

b)

$$eje OX \equiv (\lambda, 0, 0) \quad eje OX \cap \pi : 2\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \quad \Rightarrow A(1, 0, 0)$$

$$eje OY \equiv (0, \lambda, 0) \quad eje OY \cap \pi : \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2 \quad \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$eje OZ \equiv (0, 0, \lambda) \quad eje OZ \cap \pi : 2\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \quad \Rightarrow C(0, 0, 1)$$

$$\vec{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \quad \vec{AC} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i - (-2k - j) = 2i + j + 2k \to (2, 1, 2)$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 1 + 4} = \frac{3}{2}\, u^2$$

37.1.25.

a) **Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido que el vector $\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$.**

b) **Calcular un punto de la recta $\mathbf{r} \equiv \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{-1}} = \frac{\mathbf{y+2}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{z-3}}{\mathbf{-2}}$, cuya distancia al punto A=(-1,2,0) sea mínima.**

Junio 2016. Opción A, E2.

Solución:

a)

Cambiamos el sentido si multiplicamos el vector dado por -1. Para obtener módulo 4, dividimos por su módulo y multiplicamos por 4:

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \quad \Rightarrow \vec{w} = \frac{4}{3}(-2, -1, 2) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

b)

Sea P un punto de la recta: $P = (1, -2, 3) + \lambda(-1, 1, -2) = (1 - \lambda, -2 + \lambda, 3 - 2\lambda)$. Si P es el punto de la recta donde la distancia al punto A es mínima, eso implica que el vector $\vec{AP}$ y el vector director de la recta son perpendiculares:

$$\vec{AP} = (1 - \lambda, -2 + \lambda, 3 - 2\lambda) - (-1, 2, 0) = (2 - \lambda, -4 + \lambda, 3 - 2\lambda)$$

$$0 = \vec{AP} \cdot \vec{v} = (2 - \lambda, -4 + \lambda, 3 - 2\lambda) \cdot (-1, 1, -2) = 6\lambda - 12 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow P(-1, 0, -1)$$

37.1.26.

Consideremos las rectas $\mathbf{r \equiv \dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z-1}{2}}$, y $\mathbf{s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z}$

a) **Comprobar que las rectas r y s se cruzan.**

b) **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s.**

Junio 2016. Opción B, E2.

Solución: a)

$$r \equiv (0,0,1) + \lambda(2,1,2) = (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda)$$

$$s \equiv (0,1,0) + \mu(2,3,1) = (2\mu, 1+3\mu, \mu)$$

$$r \cap s : \begin{cases} 2\lambda = 2\mu \\ \lambda = 1+3\mu \\ 1+2\lambda = \mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - 3\mu = 1 \\ 2\lambda - \mu = -1 \end{cases}$$

Es un sistema incompatible luego las rectas se cruzan.

b)

Consideremos el plano que contiene a r y al origen:

$$\pi_1 \equiv (0,0,1) + \lambda(2,1,2) + \mu(0,0,1)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y \quad \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 2y = 0$$

Consideremos al plano que contiene a s y al origen:

$$\pi_2 \equiv (0,1,0) + \lambda(2,3,1) + \mu(0,1,0)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2z - x \quad \Rightarrow \pi_2 \equiv -x + 2z = 0$$

La recta que buscamos es la intersección de estos dos planos:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2\lambda \quad y = \lambda \quad z = \lambda$$

$$h \equiv (0,0,0) + \lambda(2,1,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37.1.27.

a) **Determinar la posición relativa de la recta** $\mathbf{r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}}$ **, y el plano** $\pi \equiv \mathbf{5x - y + 2z = 4}$

b) **Dadas las rectas** $\mathbf{r_1 \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{5}}$ **, y** $\mathbf{r_2 \equiv \begin{cases} -x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}}$ **, calcular el plano que contiene a** $\mathbf{r_1}$ **y es paralelo a** $\mathbf{r_2}$ **.**

Septiembre 2016. Opción A. E2.

Solución:

a)

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & 1 & 1 \\ 2 & \text{-}1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Consideramos $y = \lambda$ como parámetro y resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+2\lambda \\ 2 & 1 & 2+\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \sim F_2 + (-2)F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+2\lambda \\ 0 & \text{-}1 & -3\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \sim (-1)F_2]{F_1 \sim F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 3\lambda \end{array}\right)$$

$$(x, y, z) = (1 - \lambda, \lambda, 3\lambda) \quad \Rightarrow r \equiv (1, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 3)$$

Por otro lado el vector normal del plano es: $\vec{n} = (5, -1, 2)$.

Calculamos el producto escalar del vector normal al plano y el vector director de la recta:

$$(5, -1, 2) \cdot (-1, 1, 3) = -5 - 1 + 6 = 0$$

Luego son perpendiculares, eso implica que la recta, o está contenida en el plano, o es paralela al plano. El punto $(1, 0, 0)$ que define la recta no está en el plano $5x - y + 2z = 4$:

$$5 \neq 4$$

Luego la recta es paralela al plano.

b)

$$r_1 \equiv (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 5) \quad r_2 \equiv \begin{cases} -x + 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

Calculamos el vector director de la recta r_2 :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 3k - 2j - (-4k - j + 3i) = -i - j - k \mapsto (1,1,1)$$

El plano que buscamos será:

$$\pi \equiv (1,0,0) + \lambda(2,-1,5) + \mu(1,1,1)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 + 2z + 5y - (-z + 2y + 5x - 5) = -6x + 3y + 3z + 6$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x - y - z - 2 = 0$$

37.1.28.

Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $\pi \equiv \mathbf{2x - 2y + 4z - 5 = 0}$ y que contiene a los puntos $(\mathbf{-2, 0, 0})$ y $(\mathbf{0, 1, 0})$.

Septiembre 2016. Opción B, E2.a)

Solución:

$$\vec{n} = (2,-2,4) \equiv (1,-1,2)$$

$$(0,1,0) - (-2,0,0) = (2,1,0) \qquad \Rightarrow \pi' \equiv (-2,0,0) + \lambda(2,1,0) + \mu(1,-1,2)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x+2) - 2z - (z + 4y) = 2x - 4y - 3z + 4$$

$$\pi' \equiv 2x - 4y - 3z + 4 = 0$$

37.1.29.

Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv \mathbf{x - y - z = 0}$ y que corta perpendicularmente a la recta $\mathbf{s} \equiv \dfrac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{1}} = \dfrac{\mathbf{y+3}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{z-2}}{\mathbf{-4}}$ en el punto $\mathbf{P(2,-1,-2)}$

Junio 2017. Opción A, E2.

Solución:

El vector director de la recta r es perpendicular al vector normal al plano $\vec{n} = (1, -1 - 1)$ y perpendicular al vector director de la recta s, $(1, 2, -4)$. Luego utilizamos el producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4i + 2k - j - (-k - 4j - 2i) = 6i + 3j + 3k \quad \equiv (2,1,1)$$

$$r \equiv (2,-1,-2) + \lambda(2,1,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37.1.30.

Dado el plano $\pi \equiv \mathbf{3x + y + z - 2 = 0}$ y los puntos $\mathbf{P(0,1,1)}$ y $\mathbf{Q(2,-1,-3)}$ que pertenecen al plano π , determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos

Junio 2017. Opción B, E2.

Solución: El vector director de la recta que pasa por los dos puntos:

$$\vec{PQ} = (2,-1,-3) - (0,1,1) = (2,-2,-4) \sim (-1,1,2)$$

El vector normal al plano:

$$\vec{n} = (3,1,1)$$

El vector director de la recta que buscamos, será perpendicular a estos dos. Utilizamos pues el producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - k + 6j - (3k - j + 2i) = -i + 7j - 4k \mapsto (-1,7,-4)$$

El punto medio entre P y Q:

$$M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (1,0,-1)$$

$$\Rightarrow r \equiv (1,0,-1) + \lambda(-1,7,-4) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

37.1.31.

a) **Consideremos los puntos $\mathbf{P(-1,-4,0)}$ $\mathbf{Q(0,1,3)}$ $\mathbf{R(1,0,3)}$ .Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R.**

b) **Calcular a para que el punto $\mathbf{S(3,a,2)}$, pertenezca al plano $\pi \equiv \mathbf{x + y - 2z + 5 = 0}$.**

Septiembre 2017. Opción A, E2.

Solución:

a)

$$\vec{PQ} = (0,1,3) - (-1,-4,0) = (1,5,3)$$

$$\vec{PR} = (1,0,3) - (-1,-4,0) = (2,4,3)$$

$$\pi \equiv (-1,-4,0) + \lambda(1,5,3) + \mu(2,4,3)$$

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15(x+1)+4z+6(y+4)-(10z+3(y+4)+12(x+1) = 3x+3y-6z+15$$

$$\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$$

b)

$$(3,a,2) \in \pi \Rightarrow 3 + a - 4 + 5 = 0 \quad \Rightarrow a = -4$$

37.1.32.

a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,3,4) y es perpendicular al plano $\pi \equiv \mathbf{x + y + 2z + 4 = 0}$.

b) Calcular a para que las rectas $\mathbf{r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-2}{2}}$, $\mathbf{s \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}}$ sean perpendiculares.

Septiembre 2017. Opción B, E2.

Solución: a) El vector normal al plano es $(1,1,2)$, luego basta tomar este como vector director de la recta:

$$r \equiv (2,3,4) + \lambda(1,1,2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de los vectores directores de las rectas debe ser nulo:

$$\vec{v_r} = (1,1,2) \quad \vec{v_s} = (a,2,3)$$

$$(1,1,2) \cdot (a,2,3) = a + 2 + 6 = a + 8 = 0 \quad \Rightarrow a = -8$$

37.2. Problemas métricos

37.2.1.

Se considera la recta $\mathbf{r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases}}$ $\mathbf{a \in \mathbb{R}}$ y el plano $\mathbf{\pi \equiv x + y + z - 2 = 0}$.

a) **Hallar los valores de a para los que r es paralela a π.**

b) **Para a = 2, hallar la distancia de r a π.**

c) **Para a = 1, hallar la distancia de r a π.**

Junio 2010, Fase general, Opción A, E4.

Solución:

La recta r está definida por la intersección de dos planos cuyos vectores normales son $\vec{n_1} = (1, -1, a)$ y $\vec{n_2} = (0, a, -1)$. El vector director de r es el producto vectorial de estos dos vectores:

$$(1, -1, a) \times (0, a, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a \end{vmatrix} \right) = (1 - a^2, 1, a)$$

El ángulo entre una recta y un plano verifica la igualdad:

$$cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

El vector normal del plano π es $(1, 1, 1)$ y por tanto para que la recta r sea paralela al plano se debe verificar:

$$0 = cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1 - a^2 + 1 + a}{\sqrt{(1 - a^2)^2 + 1^2 + a^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$$

Lo que implica:

$$0 = 1 - a^2 + a - 1 \Rightarrow 0 = a^2 - a - 2 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Para a = 2, hallar la distancia de r a π.

Solución:

Para $a = 2$ la recta r es paralela al plano π, y la distancia entre r y π es la distancia entre cualquier punto P de r y π.

$dist(P, \pi) = dist(P, P')$ donde P' es la proyección de P sobre π. Si $P = (x_0, y_0, z_0)$ y $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ entonces:

$$dist(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

En nuestro caso un punto P cualquiera de r será de la forma:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z \\ 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -2z \\ 2y = 4 + z \end{cases}$$

Si tomamos z como parámetro λ obtenemos:

$$P = (2 - \frac{3}{2}\lambda, 2 + \frac{\lambda}{2}, \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si tomamos un punto cualquiera, por ejemplo para $\lambda = 0$, $P = (2, 2, 0)$, aplicando la fórmula anterior para $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ obtenemos la distancia pedida:

$$dist(P, \pi) = \frac{|2 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} u^2$$

Para $\mathbf{a = 1}$, hallar la distancia de r a π.
Solución:
Para $a = 1$, la recta no es paralela a π luego se cortan y por tanto la distancia es 0.

37.2.2.

Dados el punto $\mathbf{P(1, 1, -1)}$, la recta $\mathbf{r \equiv x = \frac{y + 6}{4} = z - 3}$ y el plano $\boldsymbol{\pi \equiv 6x + 6z - 12 = 0}$, se pide:

a) **Hallar el punto simétrico de P respecto del plano $\boldsymbol{\pi}$**

b) **Hallar los puntos Q de r que distan $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ unidades de longitud de $\boldsymbol{\pi}$**

Junio 2010, Fase general, Opción B, E4)

Solución:
a) Obtenemos la recta s que pasa por P y es perpendicular a π:

$$s \equiv (1, 1, -1) + \lambda(1, 0, 1)$$

Calculamos el punto M corte de s con π

$$6(1 + \lambda) + 6(-1 + \lambda) - 12 = 0 \Rightarrow 12\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$M = (2, 1, 0)$$

M es el punto medio entre P y su simétrico $P'(x_0, y_0, x_0)$, luego:

$$\frac{1+x_0}{2} = 2 \quad \frac{1+y_0}{2} = 1 \quad \frac{-1+z_0}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 3 \quad y_0 = 1 \quad z_0 = 1$$

Luego la solución es el punto $\mathbf{P'(3,1,1)}$.

b) Hallar los puntos Q de r que distan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ u de π.

$$Q \in r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-3}{1} \Longrightarrow Q = (\lambda, -6+4\lambda, 3+\lambda)$$

$$dist(Q,\pi) = \frac{|6\lambda + 6(3+\lambda) - 12|}{\sqrt{6^2+6^2}} = \frac{|12\lambda+6|}{6\sqrt{2}} = \frac{|2\lambda+1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|2\lambda+1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \quad \Rightarrow Q = \begin{cases} (0,-6,3) \\ (-1,-10,2) \end{cases}$$

37.2.3.

Dadas las rectas:

$$\mathbf{s \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-1}{2}} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}}$$

Se pide hallar la perpendicular común a s y a t y la distancia entre ambas rectas.

Junio 2010, Fase específica, Opción B, E4.

Solución:

Primero calculamos los vectores directores $\vec{v_s}$ y $\vec{v_t}$ de ambas rectas:

$$s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_s} = (3,1,2)$$

$$t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2y = 4 + z \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{2} = 1 + \dfrac{1}{4}\lambda \\ y = 2 + \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow t \equiv (1,2,0) + \lambda(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1) \equiv (1,2,0) + \lambda'(1,2,4) \quad \Rightarrow \quad \vec{v_t} = (1,2,4)$$

Calculamos $\vec{n}$, el vector perpendicular a $\vec{v_s}$ y a $\vec{v_t}$, utilizando el producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{v_s} \times \vec{v_t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (0, -10, 5) = 5 \cdot (0, -2, 1)$$

Expresaremos la recta perpendicular como intersección de dos planos:

π: contiene a la recta s y al vector $\vec{n}$

π': contiene a la recta t y al vector $\vec{n}$

En ecuaciones paramétricas son:

$$\pi \equiv (1, 0, 1) + \lambda(3, 1, 2) + \mu(0, -2, 1)$$

$$\pi' \equiv (1, 2, 0) + \lambda'(1, 2, 4) + \mu'(0, -2, 1)$$

En ecuaciones implícitas:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (x-1)-6(z-1)-(3y-4(x-1)) = 0 \quad \Rightarrow 5x-3y-6z+1 = 0$$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 2x - 2(z+4) - (y-8x) = 0 \quad \Rightarrow 10x - y - 2z - 8 = 0$$

Luego la ecuación implícita de la recta perpendicular es:

$$\begin{cases} 5x - 3y - 6z + 1 = 0 \\ 10x - y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema con z como parámetro, obtenemos la ecuación paramétrica de la recta:

$$p \equiv (1, 2, 0) + \lambda(0, -2, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para calcular la distancia entre s y t vamos a utilizar la fórmula de dos rectas que se cruzan, utilizando el producto mixto y el producto vectorial:

$$d(r, s) = \frac{\left| [\vec{AB}, \vec{n}, \vec{m}] \right|}{|\vec{n} \times \vec{m}|}$$

En nuestro caso: $\vec{AB} = (1, 2, 0) - (1, 0, 1) = (0, 2, -1)$

$$\left[\vec{AB}, \vec{v_s}, \vec{v_t}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 - (-1 + 24) = -25$$

$$|\vec{v_s} \times \vec{v_t}| = |\vec{n}| = \sqrt{(-10)^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

Sustituyendo obtenemos la distancia pedida:

$$d(s,t) = \frac{25}{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,\mathrm{u}$$

37.2.4.

Determinar las ecuaciones de los planos paralelos al plano

$$\boldsymbol{\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7}$$

que distan 6 unidades del mismo.

Septiembre 2010, Fase general, Opción A, E3.a)

Solución:

Tomamos un punto cualquiera del plano π, y calculamos la recta perpendicular al plano por este punto.

Por ejemplo el punto $(0, 1, -1) \in \pi$

$$r \equiv (0, 1, -1) + \lambda(12, 2, -4) = (12\lambda, 1 + 3\lambda - 1 - 4\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos los dos puntos de esta recta que distan 6 unidades de π

$$d(P, \pi) = \frac{|12(12\lambda) + 3(1 + 3\lambda) - 4(-1 - 4\lambda) - 7|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{|169\lambda|}{13} = |13\lambda|$$

$$|13\lambda| = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} \frac{6}{13} \\ \frac{-6}{13} \end{cases}$$

Sustituyendo cada valor de λ en la ecuación de la recta obtenemos los dos puntos:

$$P_1 = (12 \cdot \frac{6}{13}, 1 + \frac{18}{13}, -1 - \frac{24}{13}) = (\frac{72}{13}, \frac{31}{13}, -\frac{37}{13})$$

$$P_2 = (12 \cdot \frac{-6}{13}, 1 - \frac{18}{13}, -1 + \frac{24}{13}) = (-\frac{72}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{11}{13})$$

Ahora calculamos el plano paralelo a π que pasa por P_1:

$$12 \cdot \frac{72}{13} + 3 \cdot \frac{31}{13} - 4 \cdot \frac{-37}{13} + D_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = -85$$

$$\pi_1 \equiv 12x + 3y - 4z - 85 = 0$$

Y el plano paralelo a π que pasa por P_2

$$12 \cdot \frac{-72}{13} + 3 \cdot \frac{-5}{13} - 4 \cdot \frac{11}{13} + D_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_2 = 71$$

$$\pi_2 \equiv 12x + 3y - 4z + 71 = 0$$

37.2.5.

b) Hallar la distancia del punto $\mathbf{B(2,-2,2)}$ a la recta $\mathbf{s \equiv x = y = z}$.

Septiembre 2011. Opción B, E4.b

Solución:

$$s \equiv (0,0,0) + \lambda(1,1,1)$$

$$\vec{BP} = (0,0,0) - (2,-2,2) = (-2,2,-2)$$

$$\vec{BP} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,-4)$$

$$dist(B,s) = \frac{|\vec{BP} \times \vec{v_s}|}{|\vec{v_s}|} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$

37.2.6.

Sean los puntos A(1,2,-1), P(0,0,5), Q(1,0,4) y R(0,1,6)
b) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por P,Q yR

Junio 2013, Opción A, E2.b

Solución:

La ecuación del plano que pasa por P,Q y R la hemos calculado en el apartado a). Ver apartado a $\pi \equiv x - y + z - 5 = 0$

$$d(A,\pi) = \frac{|1 - 2 + (-1) - 5|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\ u^2$$

37.2.7.

Sea el plano $\pi \equiv \mathbf{x+y+z=0}$, la recta $\mathbf{r \equiv x=y=z}$, y el punto A(3,2,1)
b) Hallar los puntos de r que equidistan de A y de π.

Septiembre 2013. Opción A.E2.b

Solución: Tomamos un punto cualquiera de r. Sea $Q \in r$, $Q = (\lambda, \lambda, \lambda)$ calculamos la distancia al punto A:

$$d(Q,A) = \left|\vec{QA}\right| = |(3-\lambda, 2-\lambda, 1-\lambda)| = \sqrt{(3-\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2}$$

Calculamos ahora la distancia de Q al plano:

$$d(Q,\pi) = \frac{|3\lambda|}{\sqrt{3}}$$

Igualamos las distancias y obtenemos el punto buscado:

$$\sqrt{(3-\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = \frac{3\lambda}{\sqrt{3}}$$

$$(3-\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 = \frac{9\lambda^2}{3} = 3\lambda^2$$

$$-12\lambda + 14 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{7}{6} \quad \Rightarrow P(7/6, 7/6, 7/6)$$

37.2.8.

Sean las rectas $\mathbf{r \equiv x = -y = z-1}$ $\quad \mathbf{s \equiv x-2 = y = z-m}$
b) Para m=2, calcular la distancia entre las rectas.

Septiembre 2013. Opción B.E2.b

Solución: Consideramos el plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\pi \equiv (0,0,-1) + \lambda(1,-1,1) + \mu(1,1,1)$$

La ecuación general del plano será:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + z + 1 + y - (-z - 1 + y + x) = -x + z + 1$$

Tomamos cualquier punto de s, por ejemplo $Q = (2, 0, 2)$ y calculamos la distancia al plano:

$$d(Q, \pi) = \frac{|-2+2+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

37.2.9.

Sea π el plano que pasa por los puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) y r la recta dada por $\mathbf{r \equiv \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}}$

b) Calcular los puntos de r que distan 6 unidades del plano π .

Junio 2104. Opción A. E2.b

Solución: Un punto cualquiera de la recta es:

$$P = (7, -6, -3) + \lambda(2, -1, 2) = (7 + 2\lambda, -6 - \lambda, -3 + 2\lambda)$$

Calculamos la ecuación del plano. Hecho en el apartado a). Ver Solución.

$$\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2(7+2\lambda) - (-6-\lambda) + 2(-3+2\lambda) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3\,|1+\lambda| = 6$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Obtenemos por tanto dos puntos:

$$Q1 = (9, -7, -1) \quad Q2(1, -3, -9)$$

37.2.10.

Sea el punto A(1,1,3) y la recta de ecuación $\mathbf{r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}}$

b) Calcular la distancia del punto A a la recta r.

Septiembre 2104. Opción A. E2.b

Solución:

En el apartado a) hemos calculado la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A, $\pi \equiv x + y - 2 = 0$ (Ver Solución)

Calculamos la intersección de este plano con r:

$$r \equiv (\lambda - 2, \lambda, 2) \quad \Rightarrow \lambda - 2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2 \quad r \cap \pi = P(0, 2, 2)$$

Calculamos la distancia de A a este punto:

$$d(A,r) = d(A,P) = |((0,2,2)-(1,1,3))| = |(-1,1,-1)| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}\ u$$

37.2.11.

Dos caras de un cubo están contenidos en los planos $\pi_1 \equiv \mathbf{2x-2y+z-1=0}$ y $\pi_2 \equiv \mathbf{2x-2y+z+5=0}$. Calcular el volumen de dicho cubo.

Septiembre 2106. Opción B. E2.b

Solución:

Los dos planos tienen el mismo vector normal, luego son paralelos. Basta entonces calcular la distancia entre los dos planos que será la longitud de la arista del cubo. Tomamos un punto cualquiera de π_2 por ejemplo $P(0,0,-5)$ y calculamos la distancia de este punto al plano π_1 :

$$d(P,\pi_1) = \frac{|-5-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{3} = 2 \quad \Rightarrow V = 2^3 = 8\ u^3$$

38. Probabilidad

38.0.1.

Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8?

Junio 2017. Opción A. E5

Solución: Realizamos una tabla de doble entrada para contar los casos favorables:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(S=8) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{5}{36}$$

38.0.2.

La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos?

Junio 2017. Opción B. E5

Solución: Sea la variable aleatoria X=”número de caras en tres lanzamientos”. X sigue una distribución Binomial con p=1/2 y n=3.

$$P[X=3]=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$$

38.0.3.

De una bolsa con dos bolas blancas , dos negras y dos amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas.

Septiembre 2017. Opción A. E5

Solución: Sean los sucesos

1B=”la primera bola es blanca”

2B=”la segunda bola es blanca”

$$P[1B\cap 2B]=P[1B]\cdot P[2B|1B]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

38.0.4.

Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara?

Septiembre 2017. Opción B. E5

Solución: Llamamos 5=”sacar 5 en el dado” C=”sacar cara en la moneda”. Por ser sucesos independientes, la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades:

$$P[5\cap C]=P[5]\cdot P[C]=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$