UNIDAD 2: Determinantes

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 40

1. Calcula las matrices inversas de las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Empleando el método de Gauss-Jordan, obtenemos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong$

$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de B es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -18 \end{pmatrix}$

Aplicando las operaciones elementales por filas, obtenemos:

a) $Rango\ de\ A = Rango\ de \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 9 & 12 \end{pmatrix} = Rango\ de \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2.$

b) $Rango\ de\ B = Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -18 \end{pmatrix} = Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -30 \\ 0 & -2 & -30 \end{pmatrix} =$

$$= Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

3. Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales por filas, obtenemos:

$$Rango\ de\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Rango\ de \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 2a & -a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si a = 0, el rango de A es 2.

Si a ≠ 0, el rango de A es 3.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 57

1. Lugar geométrico. Sobre la recta y = a se considera un punto variable P. Llamamos Q a la proyección del punto P sobre el eje OX. Determina el lugar geométrico del punto M proyección de Q sobre la recta OP.

La solución queda:

La recta OP es y = mx y el punto P es $P\left(a/_{m},\ a\right)$.

El punto Q es $Q\left(a/_{m},\ 0\right)$ y el punto M es el punto de intersección de la recta OP (y = mx), y la recta perpendiculares a ésta pasando por Q, que su ecuación sería $m^2y + mx = a$, por tanto:

$$\begin{cases} y = mx \\ m^2 y + mx = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{m^3 + m} \\ y = \dfrac{am}{m^3 + m} \end{cases}$$

Eliminando el parámetro m, obtenemos la ecuación del lugar geométrico: $y^3 + x^2y - ax^3 = 0$.

2. Pirámides de bolas. Un mago apila bolas, todas iguales, para formar dos pirámides tetraédricas. De pronto se da cuenta de que juntando las bolas de ambas pirámides, puede formar una sola pirámide tetraédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de bolas de las que tendrá que disponer el mago inicialmente?

Al construir pirámides tetraédricas de bolas aparecen los números tetraédricos:

1, 4, 10, 20 35, 56, 84…

que forman una progresión aritmética de tercer orden, de término general $T_n = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$.

● Si las dos pirámides son iguales, el mínimo número es 20 bolas, con lo que formaría una pirámide tetraédrica de arista 4 a partir de dos tetraédricas de arista 3.

● Si las dos pirámides iniciales no son iguales, el mínimo número es 680 bolas, número obtenido al sumar las bolas de dos pirámides tetraédricas de aristas 8 y 14, y de bolas 120 y 560.

La nueva pirámide tetraédrica formada por 680 bolas tiene de arista 15, ya que se cumple:

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} = 680 \quad \Rightarrow \quad n = 15.$$

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 59

1. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$**, calcula:**

a) A + 3 · B **b) A · B** **c) B^3** **d) A^{-1}**

En la calculadora definimos las matrices A y B. Para ello activamos el menú *Matrices* y en la opción **EDIT** introducimos las dimensiones de la matriz, que en nuestro caso serían 3 x 3, tecleando: **3 NTER 3 ENTER**.

Introducimos los elementos de la matriz de forma ordenada. Para la matriz A del enunciado, la secuencia de teclas sería: **1 ENTER 2 ENTER -1 ENTER 3 ENTER 8 ENTER 2 ENTER 4 ENTER 9 ENTER -1 ENTER.**

Para introducir la matriz B tecleamos -**1 ENTER 0 ENTER 3 ENTER 0 ENTER -2 ENTER 1 ENTER 3 ENTER 2 ENTER 0 ENTER.**

Realizamos las operaciones indicadas tecleando éstas en la pantalla principal con ayuda del menú *Matrices*, donde están las matrices A y B. Obtenemos los resultados que pueden verse en los gráficos.

a)

[A] + 3 * [B]

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \\ 13 & 15 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

[A] * [B]

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 \\ 3 & -12 & 17 \\ -7 & -20 & 21 \end{bmatrix}$$

c)

[B]^3

$$\begin{bmatrix} -19 & -18 & 36 \\ -9 & -16 & 15 \\ 36 & 30 & -13 \end{bmatrix}$$

d)

[A]^-1

$$\begin{bmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Resuelve la ecuación matricial A · X + B = C, siendo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Utilizando las propiedades de las operaciones con matrices obtenemos:

$$A \cdot X + B = C \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot X = C - B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

Introduciendo en la calculadora las matrices A, B y C y realizando las operaciones indicadas, obtenemos la matriz que aparece en el gráfico.

[A]^-1 * ([C] – [B])

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Resuelve los sistemas que siguen, diagonalizando las matrices ampliadas:

a) $\begin{cases} 3x + 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 4 \\ 8x + 8y - 7z = 8 \end{cases}$

Las matrices ampliadas de los sistemas son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 8 & 8 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Introducimos en la calculadora las matrices anteriores.

La función **rref (**, que podemos encontrar en el menú *Matrices* y en la opción **MATH**, nos devuelve la forma diagonal de una matriz dada.

Para los sistemas del enunciado a), b) y c), obtenemos las matrices [A], [B] y [C] que aparecen en los gráficos.

a)

escre ([A]) ► Frac

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

El sistema tiene por solución x = 1/5, y = 1/5, z = - 1/5 y es compatible determinado.

b)

escre ([B])

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema del apartado tiene por soluciones x = 1 – z; y = 0 y es compatible indeterminado.

c)

escre ([C]) ► Frac

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema carece de soluciones y es incompatible.

En la resolución de los sistemas de los apartados a) y c) hemos activado la opción ► Frac que se encuentra en el menú *Matemáticas* (tecla MATH), para obtener los elementos de las matrices expresados en forma de fracción.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 62

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ c) $\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = -1$ e) $\begin{vmatrix} m & -n \\ n & m \end{vmatrix} = m^2 + n^2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = 0$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Los valores de los determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 - 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -1$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1$

Desarrollamos los determinantes, resolvemos las ecuaciones resultantes y obtenemos:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 34x \\ x & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & x^2 \\ x^2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^4 - 34x^2 + 225 = 0$.

Las soluciones son x = - 5, x = - 3, x = 3 y x = 5.

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & -x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - x = 0.$

Las soluciones son x = - 1, x = 0 y x = 1.

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -0 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad 3 - x = -1.$

La solución es x = 4.

4. Encuentra el número de inversiones que existen en las siguientes permutaciones de números naturales del orden que se indica:

a) orden 4: 1342, 2341 y 3124 **b) orden 5: 41325, 52341 y 12534** **c) orden 6: 213654 y 326145.**

Las soluciones son:

a) La permutación 1342 tiene 2 inversiones.

La permutación 2341 tiene 3 inversiones.

La permutación 3124 tiene 2 inversiones.

b) La permutación 41325 tiene 4 inversiones.

La permutación 52341 tiene 7 inversiones.

La permutación 12534 tiene 2 inversiones.

c) La permutación 213654 tiene 4 inversiones.

La permutación 326145 tiene 6 inversiones.

5. Determina el signo de los términos que siguen, que aparecen en el desarrollo de un determinante de quinto orden:

a) $a_{23} \cdot a_{41} \cdot a_{14} \cdot a_{35} \cdot a_{52}$ **b)** $a_{43} \cdot a_{21} \cdot a_{54} \cdot a_{15} \cdot a_{32}$ **c)** $a_{51} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{14}$

Ordenamos los términos por las filas (primer subíndice) y vemos el número de inversiones que tienen las columnas (columnas).

a) El término $a_{23} \cdot a_{41} \cdot a_{14} \cdot a_{35} \cdot a_{52}$ es el mismo que $a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{35} \cdot a_{41} \cdot a_{52}$ que se corresponde con la permutación de orden 5: 43512. Esta tiene siete inversiones, por lo que es una permutación impar. Al término anterior le corresponde un signo menos.

b) El término $a_{43} \cdot a_{21} \cdot a_{54} \cdot a_{15} \cdot a_{32}$ es el mismo que $a_{15} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{54}$ que se corresponde con la permutación de orden 5: 51234. Esta tiene cuatro inversiones, por lo que es una permutación par. Al término anterior le corresponde un signo más.

c) El término $a_{51} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{14}$ es el mismo que $a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{51}$ que se corresponde con la permutación de orden 5: 42531. Esta tiene siete inversiones, por lo que es una permutación impar. Al término anterior le corresponde un signo menos.

6. Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, justifica que son nulos los determinantes que siguen, sin desarrollarlos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -8 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Las razones en cada caso son:

a) Las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = 3 \cdot F_1$.

b) Las columnas primera y tercera coinciden: $C_1 = C_3$.

c) La columna tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $C_3 = 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2$.

d) La fila tercera es combinación lineal de la primera y la segunda; $F_3 = 3 \cdot F_1 + F_2$

7. Prueba, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son múltiplos de 2, 3, 7 y 11, respectivamente.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

a) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 2 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \dot{2}$$

b) Sumamos los elementos de las tres filas y el resultado lo colocamos en la primera ($F_1 + F_2 + F_2 \rightarrow F_1$), sacamos factor común 3 de la primera fila y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{3}$$

c) Realizamos la siguiente operación con las columnas ($C_3 + C_2 - 2 \cdot C_1 \rightarrow C_3$), sacamos factor común 7 de la tercera columna y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{7}$$

d) Puede observarse que los números que forman cada una de las filas, 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados a la tercera columna, quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix} = \dot{11}$$

8. Demuestra las siguientes igualdades aplicando las propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

a) Multiplicamos y dividimos la primera fila por a, la segunda fila por b y la tercera por c, dejando la expresión $\frac{1}{abc}$ fuera del determinante. Después sacamos factor común de la primera columna abc y el determinante resultante es nulo al tener dos columnas iguales.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^{-1} \\ ac & b & b^{-1} \\ ab & c & c^{-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & 1 \\ abc & b^2 & 1 \\ abc & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Comenzamos en el determinante de la derecha multiplicando y dividiendo la primera fila por a, la segunda fila por b y la tercera por c, dejando la expresión $\frac{1}{abc}$ fuera del determinante. Después sacamos factor común de la primera columna abc y el determinante resultante lo trasponemos para lograr la igualdad buscada.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

9. Sean F_1, F_2 y F_3 las tres filas de una matriz cuadrada A de orden 3 tal que su determinante es det (F_1, F_2, F_3) = 5. Calcula:

a) det (2A) **b) det (A^3)** **c) det ($3F_1 - F_3$, $2F_3$, F_2)**

a) Teniendo en cuenta la propiedad:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

y que el orden es 3:

det (2A) = 2^3 · det (A) = 8 · 5 = 40.

b) Teniendo en cuenta la propiedad:
El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

Obtenemos:

$$\det(A^3) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

c) Teniendo en cuenta las propiedades:
Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

Si en una matriz cuadrada se permutan dos líneas, su determinante cambia de signo.

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = 2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3)$$

Haciendo uso de la propiedad:
Si a los elementos de una línea de una matriz cuadrada se les suma una combinación lineal de otras líneas, su determinante no varía.

$$\det(3F_1 - F_3, 2F_3, F_2) = -2 \cdot \det(3F_1 - F_3, F_2, F_3) = -2 \cdot \det(3F_1, F_2, F_3) = -6 \cdot \det(3F_1, F_2, F_3) = -30$$

10. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla det (A).

a) Utilizando la propiedad $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se obtiene: $\det(A^2) = [\det(A)]^2$. Por tanto:

$$[\det(A)]^2 - \det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) \cdot [\det(A) - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det(A) = 0 \\ \quad o \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

b) Teniendo en cuenta las propiedades $\det(A) = \det(A^t)$ y $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, se obtiene:

$$\det(A \cdot A^t) = \det(I) \quad \Rightarrow \quad \det(A)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det(A) = -1 \\ \quad 0 \\ \det(A) = 1 \end{cases}$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 63

11. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{12}, α_{22}, α_{23} y α_{31}, si existen.
b) Calcula, si existen, los adjuntos A_{12}, A_{22}, A_{23} y A_{31}, si existen.
c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

Las respuestas son:

a) Los menores complementarios pedidos son:
En la matriz A: α_{12} = 0; α_{22} = 2; α_{23} y α_{31} no existen.

En la matriz B: α_{12} = 4; α_{22} = - 12; α_{23} = - 8 y α_{31} = - 16.

En la matriz C: α_{12} = - 6; α_{22} = - 3; α_{23} = 6 y α_{31} = 1.

b) Los adjuntos pedidos son:
En la matriz A: A_{12} = 0; A_{22} = 2; A_{23} y A_{31} no existen.

En la matriz B: B_{12} = - 4; B_{22} = - 12; B_{23} = 8 y B_{31} = - 16.

En la matriz C: C_{12} = 6; C_{22} = - 3; C_{23} = - 6 y C_{31} = 1.

c) Las matrices adjuntas son:

$$Adj\ (A)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -4 & -20\\ 6 & -12 & 8\\ -16 & -2 & -10\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}1 & 6 & 12 & -10\\ 0 & -3 & -6 & 6\\ 1 & 3 & 3 & -4\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

12. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix}0 & 2 & 0 & -3\\ 5 & 0 & -4 & 0\\ 0 & -7 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 3 & 0\end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 5\\ 5 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 6 & 3\\ -1 & 2 & 3 & 2\end{vmatrix}$

a) Desarrollando el determinante de orden cuatro por los adjuntos de la primera columna y los de orden tres resultantes por la regla de Sarrus, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

b) Desarrollando el determinante de orden cuatro por los adjuntos de la primera columna y los de orden tres resultantes por la regla de Sarrus, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot 51 - 4 \cdot 68 = -527$$

c) Desarrollando el determinante de orden cuatro por los adjuntos de la segunda fila y los de orden tres resultantes por la regla de Sarrus, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -295$$

13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Las matrices inversas de las matrices del enunciado son:

a) $\begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$**, averigua los valores del parámetro a para los cuales la matriz no tiene inversa. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando a = 2.**

El determinante de la matriz A es det (A) = - a^2 + 4a – 3 = - (a – 1) (a – 3).

La matriz no tiene inversa para a = 1 o a = 3.

La matriz para a = 2 es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Determina, según los valores de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene que:

- Si a = 0, el rango de A es 2.

- Si a ≠ 0, el rango de A es 3.

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$ según los distintos valores de a.**

La matriz B^2 es $A^2 = \begin{pmatrix} a+2 & 2a & 1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz M = A^2 - A^t es $M = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de M es det (M) = (a – 2) (2a – 1) y los valores del rango son:

- Si a ≠ 2 y a ≠ 1/2, el rango de M es 3.

- Si a = 2, el rango de B es 2.

- Si a = 1/2, el rango de B es 2.

17. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**. Comprueba que $A^{-1} = A^t$, y utilizando el resultado anterior calcula $(A^t \cdot A)^{20016}$.**

Calculamos A^{-1} mediante el procedimiento de Gauss-Jordan. Para ello intercambiamos las filas primera y segunda y, posteriormente la segunda y tercera, para obtener:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $A^t = A^{-1}$, y la definición de matriz inversa, obtenemos la siguiente expresión:

$$A^t \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^t = I \text{ y } (A^t \cdot A)^{2016} = (A^{-1} \cdot A)^{2016} = I^{2016} = I.$$

18. Usamos el código numérico:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
14	5	18	9	23	1	12	25	6	16	13	22	2	24

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
17	7	21	15	27	8	10	20	3	26	19	4	11	28

a) Codifica el mensaje MANDA_DINERO, utilizando como matriz de cifrado $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$**.**

b) Mi amiga Marisa me dice que su nombre escrito en clave con una matriz A, 2 x 2, es:

16 14 33 6 22 14

¿Podrías hallar A?

a) El mensaje anterior, según el código numérico se transforma en:

2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7

Para enviar de forma cifrada el mensaje anterior se toma la secuencia 2 14 24 9 14 28 9 6 24 23 27 7 y se multiplica, tomando números de dos en dos, por la matriz de cifrado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 76 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 117 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 154 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 57 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 187 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 116 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hay que tener en cuenta que si los números que resultan de multiplicar por la matriz de cifrado son mayores de 28, como por ejemplo en el primer caso que son 30 y 76, hay que restar 28 las veces que sean necesarias hasta obtener un número menor que 28. En nuestro caso:

$$30 - 28 = 2 \quad \text{y} \quad 76 - 28 - 28 = 20$$

El mensaje codificado será: 2 20 14 5 14 14 21 1 14 19 13 4, que se convierte en:

MUABAAPAFAXKY.

b) Teniendo en cuenta el código numérico inicial, la palabra Marisa se corresponde con la clave numérica:

M	A	R	I	S	A
2	14	27	6	8	14

Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz 2x2 buscada. Se cumplirá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+14b=16 \\ 2c+14d=14 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 27 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 33 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 27a+6b=33 \\ 27c+6d=6 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas se obtiene: a = 1, b = 1, c = 0 y d = 1.

La matriz es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 64

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **: a) Calcula A^{-1}. b) Resuelve la ecuación det (A^{-1} – xI) = 0.**

a) El determinante de la matriz A es det (A) = - 1.La matriz inversa de A es $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) La ecuación es $\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix}=0.$

Desarrollando el determinante obtenemos (1 + x) (1 + x^2) = 0.

Las soluciones de la ecuación son x = - 1 y los números complejos i y – i.

2. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

La solución en cada caso es:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ bc & 0 & 2bc \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2a^2b^4c^2.$

(1) Hemos sacado factor común a de la tercera columna, b de la segunda y bc de la primera.

(2) La suma de la primera y segunda columna la colocamos en la segunda columna. La diferencia de la tercera y la primera columna la colocamos en la tercera columna.

(3) Desarrollamos por la diagonal principal.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2.$

(1) La diferencia de las dos primeras filas a la segunda fila.

(2) Desarrollando por la primera columna.

(3) Utilizando la regla de Sarros.

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & b \\ 0 & c-b & -c & a \\ 0 & 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} -b & 0 & b \\ c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ a+c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = b \cdot (a+b+c) \begin{vmatrix} a+b-c & -c \\ 0 & a-c \end{vmatrix} =$

= b · (a – c) · (a + b + c) · (a + b – c)

d) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & x & 0 & 0 \\ 4+x & 0 & x & 0 \\ 4+x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3 \cdot (4+x).$

3. Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3 que verifica B2 = 16 I, siendo I la matriz unidad. Calcula el determinante de B.

b) Sea A un matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$ (siendo I la matriz identidad). Prueba que A admite inversa y utiliza la igualdad dada para expresar A^{-1} en función de A.

c) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2 x 2 para la cual se cumple que $A^{-1} = A^t$, ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

d) Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz 2 · A vale – 16. ¿Cuál es el orden de la matriz A?

Las respuestas a los distintos apartados son:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes:

El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices:

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número:

$$\det(F_1, F_2, \ldots, k \cdot F_i, \ldots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots, F_n)$$

A partir de $B^2 = 16\,I$ podemos escribir $\det(B^2) = \det(16\,I)$. Calculamos ambos determinantes:

$$\det(B^2) = \det(B \cdot B) = \det(B) \cdot \det(B) = (\det(B))^2$$

$$\det(16\,I) = \det\left(16 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16^3$$

Por tanto, $(\det(B))^2 = 16^3 \;\Rightarrow\; \det(B) = \sqrt{16^3} \;\Rightarrow\; \det(B) = 64.$

b) La matriz A tendrá inversa siempre que el determinante de A sea distinto de cero. Razonamos por reducción al absurdo, suponiendo que el determinante de A es nulo. Tomando determinantes en la igualdad matricial $A^2 - 3A = -2I$ y teniendo en cuenta alguna de las propiedades de los determinantes podemos escribir:

$$\det(A^2 - 3A) = \det(-2I) \;\Leftrightarrow\; \det[A \cdot (A - 3I)] = (-2)^n \cdot \det(I) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \det(A) \cdot \det(A - 3I) = (-2)^n$$

En la última igualdad si el determinante de A fuese nulo, el resultado del producto sería cero, pero la potencia $(-2)^n$ no se anula nunca y, por tanto, el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

Expresamos la matriz A^{-1} en función de la matriz A. Para ello operamos en la igualdad matricial del enunciado $A^2 - 3A = -2I$, en la forma:

$$A^2 - 3A = -2I \iff -\frac{1}{2}\left(A^2 - 3A\right) = I \iff -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = I \iff A \cdot \left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$.

c) No puede ser det (A) = 3 ya que se cumple:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A^t) \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} = \det(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$

d) Sea n el orden de la matriz A, entonces $\det 2 \cdot A = 2^n \cdot \det A$.

Sustituyendo en la expresión anterior los datos del enunciado, obtenemos:

$$-16 = 2^n \cdot (-1) \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow 2^n = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

El orden de la matriz A es 4.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$**.**

a) ¿Para qué valores de a la matriz es inversible?
b) Estudia el rango según los valores de a.
c) Halla a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$**.**

a) Una matriz A es inversible si su determinante es distinto de cero. Hallamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 \Rightarrow -2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Por tanto, A es inversible si $a \neq 0$.

b) Estudio del rango:

- Si $a \neq 0$ el rango de la matriz A es 3, ya que el determinante de A es distinto de 0.

- Si $a = 0$ el rango de A es 1, ya que tiene dos columnas con todos sus elementos nulos.

c) Calculamos la matriz $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left[Adj\ (A)\right]^t$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-2a & 0 & 0\\ 2a & a^2 & -a\\ 0 & 0 & -2a\end{pmatrix}\qquad [Adj(A)]^t=\begin{pmatrix}-2a & 2a & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ 0 & -a & -2a\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

Expresamos la igualdad matricial $A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot A$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{4} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{a}{4}\\ -\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2a}=\frac{1}{4}\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a^2=4;\ a=-2\ y\ a=2\\ a=2\\ a=2\end{cases}\quad\Rightarrow a=2$$

El valor de A buscado es a = 2. Para este valor se cumple:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad y\quad \frac{1}{4}\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

5. Halla el rango de las matrices M y N, según el valor del parámetro a, siendo:

$$M=\begin{pmatrix}1 & a^2-1 & a\\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{pmatrix}\ \mathbf{y}\ N=\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ a & a+3 & a+4\\ a & a+5 & a+6\end{pmatrix}$$

El valor del determinante de la matriz M es det (M) = $(a-1)^2\cdot(a+1)^2$. Esta expresión nos permite realizar el siguiente estudio del rango:

- Si a ≠ 1 y a ≠ - 1, el rango de M es 3.
- Si a = - 1, el rango de M es 2.
- Si a = 1, el rango de M es 1.

Hallamos el rango de la matriz N haciendo ceros en la matriz:

$$rango\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ a & a+3 & a+4\\ a & a+5 & a+6\end{pmatrix}=rango\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=rango\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$$

Las operaciones elementales que hemos hecho son:

- $F_2-F_1\rightarrow F_2$
- $F_3-F_2\rightarrow F_3$
- $F_3-F_2\rightarrow F_3$

El rango de la matriz N es 2 para cualquier valor de a.

Puede comprobarse que $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ a+3 & a+4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y que el determinante de N es 0.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **obtén razonadamente el valor de los siguientes determinantes:**

- **a) det (A + B)**
- **b)** $\det\left(\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right)$
- **c)** $\det\left((A+B)^{-1}\cdot A\right)$
- **d)** $\det\left(A^{-1}\cdot(A+B)\right)$
- **e) det ($2ABA^{-1}$)**
- **f) det ($A^3 B^{-1}$)**

Teniendo en cuenta que los valores de los determinantes det (A) = 4 y det (B) = - 4 obtenemos:

a) det (A + B) = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 24.$

b) $\det\left(\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \det\left((A+B)^{-1}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\det(A+B)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{192}.$

c) $\det\left((A+B)^{-1}\cdot A\right) = \det\left((A+B)^{-1}\right)\cdot \det(A) = \frac{1}{\det(A+B)}\cdot\det(A) = \frac{1}{24}\cdot 4 = \frac{1}{6}.$

d) $\det\left(A^{-1}\cdot(A+B)\right) = \det\left(A^{-1}\right)\cdot\det(A+B) = \frac{1}{\det(A)}\cdot\det(A+B) = \frac{1}{4}\cdot 24 = 6.$

e) det ($2ABA^{-1}$)= 2^3 · det (A) · det (B) · det (A^{-1}) = $2^3\cdot 4\cdot(-4)\cdot\frac{1}{4} = -32.$

f) det ($A^3 B^{-1}$) = $\det(A^3)\cdot\det(B^{-1}) = (\det(A))^3\cdot\frac{1}{\det(B)} = 4^3\cdot\frac{1}{-4} = -16.$

7. Resuelve la ecuación matricial B (2A + I) = AXA + B, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operamos en la ecuación matricial para despejar X:

B (2A + I) = AXA + B $\Rightarrow$ 2BA + B = AXA + B $\Rightarrow$ 2BA = AXA $\Rightarrow$ 2B = AX $\Rightarrow$ X = 2A^{-1}B

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ y finalmente $X = 2A^{-1}\,B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}$.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 65

Matemáticas y criptografía

La criptografía o arte de escribir en clave, aparece y se desarrolla con la invención de la escritura. Las civilizaciones más antiguas ya hicieron uso de ella, aunque fueron los griegos y romanos los que la desarrollaron para comunicarse en secreto con fines belicistas.

A lo largo de los siglos, y en numerosas ocasiones, tanto los criptógrafos como sus oponentes, los descodificadores, han utilizado las matemáticas en sus respectivos trabajos. Entre las herramientas utilizadas podemos encontrar: el análisis por frecuencias, la aritmética modular, los números primos, etc.

Intenta descifrar los mensajes que siguen.

ÑDV · ODWHODWLFDV · VLUYHP · SDUD · WRGR · HP · ÑD · YLGD · BD · TXH · WH · HPVHQDP · D · UDCRPDU · D · UHVRÑYHU · SUREÑODV · SHUR · VREUH · WRGR · OH · KDP · GDGR · GLVFLSÑLPD · SDUD · OL · OLVOD · XPD · GLVFLSÑLPD · YXH · PR · HV · SDUD · PDGD · RSUHVLYD · VLPR · YXH · OH · IDFLÑLWD · VHU · ÑLEUH

EDUEDED · KHPGULFNV

α↑ · ↑7↓5β · ≠α · 4◊3α4◊371◊Δ · ↑β · >α · ≠α□◊≠β · α8 · 47 · 3◊2+7↑↑◊ · 3◊4↓7α8 · 9+α≠αΔ · α81β835◊5 · ↑◊Δ · ◊137■7≠◊≠αΔ · 5αΔ+α↑3◊Δ · ≠α · ↑◊ · +87≠◊≠ · Δ7α3α · ↑◊ · ↑↑◊■α · ≠α · ↑◊ · 3◊2+7↑↑◊ · ↑◊ · 37α8α · α↑ · 1β8Δα5□α · ≠α↑ · 1β↑α<7β · αΔ9α5β · 2+α · 3α · Δ75■◊8 · 9◊5◊ · 95α9◊5◊5 · α↑ · α●◊4α8

◊8◊

Para ayudarte, podemos decirte que uno de los mensajes está codificado con el *cifrado César*, y puedes descifrarlos mediante el análisis por frecuencias.

Investiga sobre criptografía.

El primer mensaje está puesto en clave con el ***cifrado César*** siguiente:

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Letra cifrada	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O

Letra	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
Letra cifrada	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z	A	B	C

y dice:

LAS MATEMÁTICAS SIRVEN PARA TODO EN LA VIDA, YA QUE TE ENSEÑAN A RAZONAR, A RESOLVER PROBLEMAS. PERO SOBRE TODO ME HAN DADO DISCIPLINA PARA MI MISMA. UNA DISCIPLINA QUE NO ES PARA NADA OPRESIVA QUE ME FACILITA SER LIBRE.

BARBARA HENDRICKS

El segundo mensaje dice:

EL LIBRO DE MATEMÁTICAS LO HE DEJADO EN MI TAQUILLA. TAMBIÉN PUEDES ENCONTRAR LAS ACTIVIDADES RESUELTAS DE LA UNIDAD SIETE. LA LLAVE DE LA TAQUILLA LA TIENE EL CONSERJE DEL COLEGIO. ESPERO QUE TE SIRVAN PARA PREPARAR EL EXAMEN.

ANA

El cifrado puede verse en las tablas:

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Símbolo	◊	↓	1	≠	α		<	>	7	□		↑	4

Letra	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
Símbolo	8		β	9	2	5	Δ	3	+	■	●		

La descodificación de los mensajes puede hacerse mediante el análisis de frecuencias.

El análisis por frecuencias, para descifrar un criptograma, se basa en estudiar la frecuencia con la que aparecen los distintos símbolos en un lenguaje determinado y luego estudiar la frecuencia con la que aparecen en los criptogramas, y de esta manera establecer una relación entre ellos.

La idea fundamental es que no todas las letras aparecen con la misma frecuencia, sino que algunas aparecen más a menudo que otras. Contando los signos del texto cifrado y ordenándolos de mayor a menor frecuencia podemos establecer conjeturas acerca de qué letra corresponde a cada signo. El análisis se completa con la búsqueda de palabras frecuentes como artículos y preposiciones. El resto es cuestión de intuición.

En nuestro idioma las letras E (≈ 17%) y A (≈ 12%) destacan sobre todas las demás y pueden identificarse con facilidad, aunque en un texto corto la frecuencia de ambas se puede invertir. Todas las vocales ocupan un 47% del texto.

Las consonantes más frecuentes son L, S, N y D (≈ 30%) y las seis letras menos frecuentes son V, Ñ, J, Z y K (con poco más del 1%).