Problemas de Selectividad de Matemáticas II

Comunidad de Madrid

Por materias y resueltos

(2000-2021)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

2 de enero de 2022

A mi familia,
a mis alumnos,
habéis aguantado estoicamente,
mis ausencias unos,
mis clases otros.
Con unos convivo,
a los otros les añoro.
Un Abrazo muy grande para cada uno.
Isaac Musat Hervás

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Año 2000

1.1.1. Modelo

Opción A

Problema 1.1.1 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & \lambda y+ & 2z = & \lambda \\ 2x+ & \lambda y- & z = & 2 \\ \lambda x- & y+ & 2z = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array}\right), \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Como tiene dos filas iguales y el menor $\left|\begin{array}{rr} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) =$ 2 =Rango$(\overline{A})$ <nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x- & y+ & 2z = & -1 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & t \end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & 2y+ & 2z = & 2 \\ 2x+ & 2y- & z = & 2 \\ 2x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rr} x = & 2/3 \\ y = & 2/3 \\ z = & 2/3 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.1.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \left(\begin{array}{ccc} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{array}\right)$$

es invertible.

b) (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

para $\lambda = 1$

Solución:

a) $|A| = (\lambda-1)(3\lambda-4) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = \dfrac{4}{3}$.

Si $\lambda = 1$, o $\lambda = \dfrac{4}{3} \Longrightarrow$ No es invertible.

Si $\lambda \neq 1$, y $\lambda \neq \dfrac{4}{3} \Longrightarrow$ Si es invertible.

b) Si $\lambda = 2$:

$$A = \left(\begin{array}{ccr} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad A^{-1} = \left(\begin{array}{crr} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A \cdot A^{-1} = \left(\begin{array}{ccr} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{crr} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c) Con $\lambda = 1$ y $AX = O$:

$$\left(\begin{array}{crr} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} & y- & z = 0 \\ - & y+ & z = 0 \\ x+ & & 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} & y- & z = 0 \\ x+ & & 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & -2t \\ y = & t \\ z = & t \end{array}\right.$$

1.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

Solución:

a) Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$Traza(A) = a_1 + a_4, \quad Traza(B) = b_1 + b_4$$

$$Traza(A) + Traza(B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow Traza(A + B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

Luego:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Traza(AB) = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4 \\ Traza(BA) = a_1b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_4b_4 \end{array} \right. \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA)$$

c) Suponemos que la igualdad es cierta, es decir:

$$AB - BA = I \Longrightarrow AB = BA + I \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA + I) \Longrightarrow$$

$$Traza(AB) = Traza(BA) + Traza(I), \text{ como } Traza(AB) = Traza(BA)$$

$$\Longrightarrow 0 = 2$$

Luego esta igualdad es falsa.

d) Sea A una matriz cualquiera y $B = I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \Longrightarrow Traza(A \cdot B) = Traza(A) = 4, \quad Traza(B) = 2$$

$$Traza(A) \cdot Traza(B) = 4 \cdot 2 = 8$$

Luego $Traza(A \cdot B) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$

Opción B

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z = & (a-1)(a+2) \\ x+ & ay+ & z = & (a-1)^2(a+2) \\ x+ & y+ & az = & (a-1)^3(a+2) \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.

c) (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2) \\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2) \end{array} \right), \quad |A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \quad a = -2$$

- ☛ Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.
- ☛ Si $a = 1$: (Homogéneo)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) < \text{nincógnitas} \Longrightarrow \text{SCI}$$

- ☛ Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº incógnitas$\Longrightarrow$ SCI

Para cualquier valor de a el sistema es, por tanto, compatible.

b) Si $a = 1$ se trata de tres planos coincidentes, $x + y + z = 0$.

Si $a = -2$ se cortan en una recta que calculamos en el siguiente apartado.

c)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z = & 0 \\ x+ & y+ & -2z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} x- & 2y = & -z \\ x+ & y = & 2z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.1.5 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1\\ (\lambda-1)x+ & y+ & z= & \lambda\\ x+ & (\lambda-1)y- & z= & 0\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1\\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda-1 & -1 & 0\end{array}\right),\quad |A|=\lambda(\lambda-1)=0\Longrightarrow \lambda=0,\ \lambda=1$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}\overline{A} =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Como la tercera fila es igual a la segunda multiplicada por -1, y como el menor $\left|\begin{array}{rr} 0 & 1\\ -1 & 1\end{array}\right| = 1 \neq 0$ Tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- Si $\lambda = 1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Como la primera fila es igual a la segunda, y como el menor $\left|\begin{array}{rr} 0 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right| = -1 \neq 0$ Tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $\lambda = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1\\ -x+ & y+ & z= & 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & 1\\ y= & 1-t\\ z= & t\end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 3$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1\\ 2x+ & y+ & z= & 3\\ x+ & 2y- & z= & 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=0\\ z=1\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.1.6 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

Solución:

a)

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = -2k - 12 = 0 \Longrightarrow k = -6$$

Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, es siempre compatible.

- Si $k \neq -6 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Como la solución es única, sólo tiene la trivial: $x = y = z = 0$
- Si $k = -6$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) < \text{nincógnitas} \Longrightarrow \text{SCI}$$

El sistema en este caso es Compatible Indeterminado, si escogemos el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = -2 \neq 0$, vemos que el Rango$(A) = 2$ y, además podemos eliminar la segunda fila, para la solución del sistema, y nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y = & -5\lambda \\ x- & y = & -\lambda \\ & z = & \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & -3\lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

b) Ahora tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right) \text{ y que } \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -18$$

$$|\overline{A}| = \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right| = \lambda \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -18\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 4 \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.(No tiene solución)
- Si $\lambda = 0$ se trata de un sistema homogéneo. Tenemos que Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

La única solución en este caso es la solución trivial: $x = y = z = 0$

1.2. Año 2001

1.2.1. Modelo

Opción A

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|B| = \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 1-b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2$$

$$|A| = \begin{bmatrix} F_1 - F_2 \\ F_2 \\ F_3 - F_4 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 \\ F_4 - F_1 \end{bmatrix} =$$

$$ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \\ F_4 - F_3 \end{bmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2b \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2$$

Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(B+X)=C \Longrightarrow X=A^{-1}C-B$

$$\left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 4 & -3\\ -1 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} 21\\ 24 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} 5\\ -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 7\\ 4 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z=3\\ 2x- & y+ & kz=9\\ x- & y- & 6z=5 \end{array}\right.$$

b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & k & 9\\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right)$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$, $\overrightarrow{C_3}$ y $\overrightarrow{C_4}$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & k & 9\\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right),\quad |A|=2k+16=0 \Longrightarrow k=-8$$

- Si $\lambda\neq -8 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda=-8$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -8 & 9\\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ 2 & -1 \end{array}\right|=-3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A|=0,\ \ |A_2|=0,\ \ |A_3|=0,\ \ |A_4|=0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

Podemos tachar la tercera ecuación y nos queda el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z=3\\ 2x- & y- & 8z=9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=4+2\lambda\\ y=-1-4\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

b)

$$\overrightarrow{F_3}+a\overrightarrow{F_1}+b\overrightarrow{F_2}=(0,0,0,0)\Longrightarrow a=\frac{1}{3},\ \ b=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{F_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{O}$$

$$4\overrightarrow{C_1}-\overrightarrow{C_2}+0\overrightarrow{C_3}-\overrightarrow{C_4}=\overrightarrow{O}$$

1.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.2.4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2\\ 2x- & y+ & 3z = & 2\\ 5x- & y+ & az = & 6 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2\\ 5 & -1 & a & 6 \end{array}\right), \quad |A| = -3a + 24 = 0 \Longrightarrow a = 8$$

- ☛ Si $a \neq 8 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.
- ☛ Si $a = 8$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2\\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$\left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Estudiamos el Rango$(\overline{A})$:

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 5 & 8 & 6 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & -1 & 6 \end{array}\right| = 0, \quad |A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 2\\ -1 & 8 & 6 \end{array}\right| = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCI. El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 8$ por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2\\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y = & 2-2z\\ 2x- & y = & 2-3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4/3 - 5/3\lambda\\ y = 2/3 - 1/3\lambda\\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.2.5 *(2 puntos)* Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{r} 0\\ 1\\ -1 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

a) (1 punto) Calcular A^k.

b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX = BC$.

Solución:

a)

$$A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^kX = BC \Longrightarrow X = (A^k)^{-1}BC$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.2.6 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \ |\overline{A}| = (3+\lambda)(\lambda-1)^3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \lambda = -3$$

☛ Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 4 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ SI.

☛ Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{y} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{array} \right| = -16 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3 =$Rango$(A) =$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.

☛ Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 1 =$Rango$(A) <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCI.

b) Si $\lambda = -3$ quitamos la cuarta ecuación y nos queda el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & -3 \\ x+ & y+ & -3z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

c) Si $\lambda = 1$ tenemos que suprimir tres ecuaciones y nos queda $x + y + z = 1$, se trata de un plano, en forma paramétrica será:

$$\left\{ \begin{array}{llll} x = & 1- & \lambda & -\mu \\ y = & & \lambda & \\ z = & & & \mu \end{array} \right.$$

1.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.2.7 *(3 puntos)* Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & ay- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & a \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right), \quad |A| = a^2 + 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -3$$

☛ Si $a \neq 1$ y $a \neq -3 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como la segunda columna y la cuarta son iguales Rango$(\overline{A})$ = Rango(A) < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

☛ Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{array} \right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 <$ pero el menor

$$\left| \begin{array}{rrr} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right| = -28 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(\overline{A}) = 3$.

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución).

b) Para $a = 2$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & 2y- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & -\dfrac{13}{5} \\ y = & \dfrac{3}{5} \\ z = & \dfrac{7}{5} \end{array} \right.$$

c) Para $a = 1$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 4z = & 1 \\ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & -3\lambda \\ y = & 1 - \lambda \\ z = & \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.2.8 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{array} \right)$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.

c) (1 punto) Calcular A^{100}.

Solución:

a)
$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego $A^3 + I = -I + I = O$.

b) $A^3 + I = O \Longrightarrow A \cdot A^2 = -I \Longrightarrow A \cdot (-A^2) = I \Longrightarrow A^{-1} = -A^2$
$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Tenemos $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = -I$, $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$, $A^6 = I$,...

Dividiendo 100 entre 6 el resto es 4 luego $A^{100} = A^4 = -A$.

1.3. Año 2002

1.3.1. Modelo

Opción A

Problema 1.3.1 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

c) (1 punto) Si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$
cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Solución:

a) Aplicamos la propiedad $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$:
$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow |A + 2I||A| = |I| = 1$$
Si $|A| = 0 \Longrightarrow 0 = 1$, lo que es imposible y, por tanto, la matriz A no es singular ($|A| \neq 0$). Esto quiere decir que siempre tiene inversa:
$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A + 2I$$

b) $A^2 = I - 2A$
$$A^3 = A^2 \cdot A = A - 2A^2 = A - 2I + 4A = -2I + 5A$$
Luego $p = -2$ y $q = 5$.

c)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 + 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & k + 2 \\ k + 2 & (k + 1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow k = -2$$

Opción B

Problema 1.3.2 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AX = BA \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.3.3 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los diferentes valores de O.

Solución:

a)

$$B = A - OI = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$

$$|B| = O^2 - 1 \Longrightarrow O = \pm 1$$

b) Se trata de un sistema homogéneo

$$B = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$

Por el apartado anterior tenemos que:

Si $O \neq \pm 1 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única). La solución es la trivial $x = y = 0$.

Si $O = \pm 1 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones):

- Si $O = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

tenemos $x - 3y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

- Si $O = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos $x - y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

1.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.3.4 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\begin{cases} x - 14 = & 5(\ \ y + z - 28) \\ x + 10 = & y + z + 20 \\ x - 42 = & y - z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x- & 5y- & 5z+ & 126 = 0 \\ x- & y- & z- & 10 = 0 \\ x- & y+ & z- & 42 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por -5 y la sumamos a la 1ª:

$$\begin{cases} x- & 5y- & 5z+ & 126 = 0 \\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow -4x + 176 = 0 \Longrightarrow x = 44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\begin{cases} y + z = & 34 \\ y - z = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 18 \\ z = 16 \end{cases}$$

Problema 1.3.5 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = 2$
$|A_2| = -8(a+4) = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2
Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

Opción B

Problema 1.3.6 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x- & y & & = & 2 \\ ax+ & y+ & 2z & = & 0 \\ x- & y+ & az & = & 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a) Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas; el sistema sería compatible determinado.
Si $a = 0$:

- ☛ Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- ☛ Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3$$

- ☛ En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

b) Si $a = -1$:

- ☛ Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- ☛ Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.
- ☛ En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

c) Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y- & z & = 1 \end{array}\right.$$

Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x = & 2+ & \lambda \\ y = & & \lambda \\ z = & 1 & \end{array}\right.$$

d) Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y & = & 2 \\ 2x+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & 2z = & 1 \end{array}\right.$$

Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 2 \\ 2x+ & y = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \end{array}\right.$ Es decir:

$$\left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \\ z = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

1.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.3.7 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & \lambda z = & \lambda^2 \\ & y- & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right| = 2\lambda(1-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \ \lambda = 1$$

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

b) Si $\lambda = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$$

Si $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 4 \\ & y- & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

Los tres planos se cortan dos a dos

Opción B

Problema 1.3.8 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = I \Longrightarrow A = A^{-1}$

b) $A^1 = A$, $A^2 = I$, $A^3 = A$, $A^4 = I, \cdots$ luego:

$$A^n = \left\{\begin{array}{lll} A & \text{si} & n \text{ es impar} \\ I & \text{si} & n \text{ es par} \end{array}\right.$$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \\ a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a = -1$$

1.4. Año 2003

1.4.1. Modelo

Opción A

Problema 1.4.1 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

a)

$$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M-2)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M-2)M = I \Longrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M-2)$$

b)

$$M^2 = 2M + 3I \Longrightarrow M^3 = (2M+3I)M =$$

$$2M^2 + 3M = 2M^2 + 3M = 2(2M+3I) + 3M = 7M + 6I$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$3I + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2+b^2 = 3+2a \\ 2ab = 2b \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1, \ \ b = \pm 2 \\ a = -1, \ \ b = 0 \\ a = 3, \ \ b = 0 \end{array} \right.$$

Las matrices serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.4.2 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = a+c \Longrightarrow c = 0 \\ c+d = d \Longrightarrow c = 0 \\ a+b = b+d \Longrightarrow a = d \end{array}\right.$$

La matriz buscada es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 1.4.3 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k^2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -k^2 + 4k - 3 = 0 \Longrightarrow k = 1, \;\; k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow$Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Si $k = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

1.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr}(m+2)x+ & (m-1)y- & z=3\\ mx- & y+ & z=2\\ x+ & my- & z=1\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:

a) Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr}3x+ & & z=3\\ x- & y+ & z=2\\ x+ & y- & z=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ y=1\\ z=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrr}(m+2)x+ & (m-1)y- & z=3\\ mx- & y+ & z=2\\ x+ & my- & z=1\end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc}m+2 & m-1 & -1\\ m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{array}\right)\ \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc}m+2 & m-1 & -1 & 3\\ m & -1 & 1 & 2\\ 1 & m & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc}m+2 & m-1 & -1\\ m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{array}\right|=-m(m+1)$$

$$-m(m+1)=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=0\\ m=-1\end{array}\right.$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

- Cuando $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cc}2 & -1\\ 0 & -1\end{array}\right| = -2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc}2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$

  El menor $\left|\begin{array}{ccc}-1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

  En conclusión, cuando $m = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

☛ Cuando $m=-1 \Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m=-1 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2 \neq \text{Rango}(\overline{A})=3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Opción B

Problema 1.4.5 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 1.4.6 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda-3)x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda-3)z = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x=z=0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

1.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.4.7 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9\\ mx+ & 2y+ & z=5\\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m=1$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9\\ mx+ & 2y+ & z=5\\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3\\ m & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 9\\ m & 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3\\ m & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|=-m+1=0\Longrightarrow m=1$$

Si $m\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$A=$Rango$\overline{A}=3=$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

b) Para $m=1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9\\ x+ & 2y+ & z=5\\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

Tenemos

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 9\\ 1 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Rango$(A)=2$ ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 1 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0$.

Calculando todos los determinantes posibles que se pueden hacer de orden 3 en la matriz $\overline{A}$, comprobamos que se anulan todos ellos, y por tanto, Rango$\overline{A}=2$.

En conclusión, si $m=1$ Rango$(A)=$Rango$\overline{A}=2<$nº de incógnitas, luego es este caso el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido anteriormente, podemos eliminar la primera ecuación y nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rc} x= & -1-t \\ y= & 3 \\ z= & t \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.4.8 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.

b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Solución:

a) $x =$ precio de un billete con destino nacional.

$y =$ precio de un billete con europeo comunitario.

$z =$ precio de un billete con internacional no comunitario.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 10x+ & 10y & +10z= & 12000 \\ 10x+ & & 20z= & 13000 \\ 10x+ & 10y & = & 7000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 1200 \\ x+ & & 2z= & 1300 \\ x+ & y & = & 700 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=300 \\ y=400 \\ z=500 \end{array}\right.$$

b) El total de billetes vendidos tienen que cumplir:
$30x + 20y + 30z = 32000$ si reducimos un $20\,\%$ a los billetes nacionales tenemos $0,8 \cdot 30 \cdot 300 = 7200$. Si mantenemos el precio de los billetes internacionles no comunitarios tenemos $30 \cdot 500 = 15000$. Aumentamos el precio de los billetes extranjeros europeos comunitarios $k \Longrightarrow k \cdot 20 \cdot 400 = 8000k$. En conclusión:

$$7200 + 8000k + 15000 = 32000 \Longrightarrow k = 1,225 \Longrightarrow \text{incremento } 22,5\,\%$$

Problema 1.4.9 *(2 puntos)*

a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:
$$(I-B)^{-1}=-B^{-1}A$$
(Donde I denota la matriz identidad).

b) Dada la matriz
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=AB$.

Solución:

a) $A+B=AB \Longrightarrow A+B-AB=0 \Longrightarrow A-AB=-B \Longrightarrow$

$A(I-B)=-B \Longrightarrow -A(I-B)(I-B)^{-1}=B(I-B)^{-1} \Longrightarrow$

$B(I-B)^{-1}=-A \Longrightarrow B^{-1}B(I-B)^{-1}=-B^{-1}A \Longrightarrow$

$(I-B)^{-1}=-B^{-1}A$

b) LLamamos $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix}$, y tendremos:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+z & -y+h \\ 2x-z & 2y-h \end{pmatrix}$$
Tenemos:
$$\begin{cases} x-1=-x+z \\ 2+z=2x-z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y+1=-y+h \\ -1+h=2y-h \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} h=0 \\ y=-1/2 \end{cases}$$
Luego
$$B=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5. Año 2004

1.5.1. Modelo

Opción A

Problema 1.5.1 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:
$$\begin{cases} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z= & 2 \\ \lambda x+ & y- & z= & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z= & 2\lambda \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = 2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \quad \lambda = 8/3$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{array} \right| = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 8/3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 16/3 & 2 \\ 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 16/3 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 8/3 & 1 \end{array} \right| = -\frac{14}{3} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{array} \right| = -\frac{268}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Sólo es compatible en los casos $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 2\lambda \\ 2 & 1 & -1 \\ 2\lambda & 3 & 3 \end{array} \right|}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{2(\lambda^2 - \lambda + 3)}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$y = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 6 & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 2\lambda & 3 \end{array} \right|}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = \frac{2\lambda^3 - 7\lambda + 13}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$z = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 6 & 4 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2\lambda \end{array} \right|}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{4\lambda^2 - 9\lambda + 3}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

Opción B

Problema 1.5.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 9a + 14 = 0 \Longrightarrow a = 2, \; a = 7$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{array}\right| = 4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango$(\overline{A}) \neq$ Rango(A)Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{array}\right| = 0, \quad |A_4| = \left|\begin{array}{rrr} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{array}\right| = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, admite infinitas soluciones.

b) Por el menor elegido cuando $a = 2$ para discutir el Rango(A) podemos decidir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & 2z = & 4 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 - 7\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z = 0 \\ x- & (1+a)y+ & z = 0 \\ -x+ & ay- & z = 0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -a - 3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$ y como el sistema es homogéneo resultaría que es compatible determinado. La solución en este caso sería $x = y = z = 0$.

Si $a = -3$ tenemos

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 8 + 2 = 10 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$ y como el sistema es homogéneo podemos concluir, en este caso que, el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y+ & 4z = 0 \\ x+ & 2y+ & z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y = & -4z \\ x+ & 2y = & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.5.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1}.

b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

b)

$$AXA^T = B \Longrightarrow A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1} = A^{-1}B(A^T)^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}B(A^T)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.5.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rr} x+ & 2y = 1 \\ 3x- & y = 2 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 1 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Solución:

a) La tercera ecuación debe de ser una combinación lineal de las anteriores, ya que en caso contrario el sistema resultaría incompatible. La suma de las dos puede ser una solución:

$$4x + y = 3$$

b) La tercera ecuación tiene que ser una combinación lineal de las dos anteriores, pues en caso contrario, el sistema resultaría compatible determinado o incompatible. Como el término independiente tiene que ser 1, podemos multiplicar la primera por 2 y le restamos la segunda:

$$3x + 3y - 4z = 1$$

1.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.5.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Solución:

a)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A = BX \Longrightarrow B^{-1}A = B^1BX \Longrightarrow B^{-1}A = X$

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.5.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$

b)

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 - 6k + 5 & 8(k-1) \\ 2 - 2k & k^2 + 2k - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} k^2 - 6k + 5 = 0 \\ 8(k-1) = 0 \\ 2 - 2k = 0 \\ k^2 + 2k - 3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k = 1$$

Opción B

Problema 1.5.8 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda x+ & 3y+ & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & y- & z = & 1 \end{array} \right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \ \ \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1. Si tenemos en cuenta que $\left| \begin{array}{rr} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y+ & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y = & 2- & z \\ x+ & 2y = & 1- & 2z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1 + 4t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array} \right.$$

1.6. Año 2005

1.6.1. Modelo

Opción A

Problema 1.6.1 *(3 puntos)*

a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array}\right), \quad |A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{array}\right| = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $\lambda = \dfrac{5}{2}$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{array}\right| = 23 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\left|\begin{array}{rrr} 5 & 5/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{array}\right| = -\frac{55}{2} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) El sistema sólo es compatible cuando $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$ y $|A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{array}\right|}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{2a^3 - 1}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{6a^2 - 2a - 5}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{4a^3 - 14a + 11}{2a^2 - 9a + 10}$$

Opción B

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az = & -a \\ 4x+ & ay- & az = & a \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 16 = 0 \Longrightarrow a = \pm 4$$

Si $a \neq \pm 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Cuando $a = 1$:

$$\begin{cases} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{cases} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{19}{15}$$

Problema 1.6.3 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto) Hallar A^n.

Solución:

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$2^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$2^3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

b) $A^n = 2^{n-1}A$

1.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.6.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z= & 3\\ mx+ & (m-1)y+ & 3z= & 2m-1\\ x+ & 2y+ & (m-2)z= & 4\end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

b) (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3\\ m & m-1 & 3 & 2m-1\\ 1 & 2 & m-2 & 4\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |A| = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 2,\ m = -1,\ m = 4$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m = -1$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 4\end{array}\right),\quad \begin{vmatrix} -2 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ -2 & 3 & -3\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego en este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right| = -4 \neq 0$$

Luego en este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 4$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{array}\right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$n$^{\text{o}}$ incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & y+ & z = 3 \\ 4x+ & 3y+ & 3z = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & y = & 3- & z \\ 4x+ & 3y = & 7- & 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{5} \\ \\ y = \dfrac{9}{5} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.6.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z=1 \\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y & =1- & 3z \\ 2x+ & y & =2+ & z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\dfrac{5}{3}t \\ \\ y=-\dfrac{7}{3}t \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

b) Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

sería $a(1,2,3,1)+b(2,1,-1,2)=(5,1,\alpha,\beta)\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b=5 \\ 2a+b=1 \end{array}\right. \Longrightarrow a=-1,\ b=3 \Longrightarrow \alpha = -6,\ \beta=5$

Problema 1.6.6 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA=B$$

siendo $A=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA=B\Longrightarrow XA=AB\Longrightarrow X=ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{(Adjt(A))^T}{|A|}=\left(\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{array}\right)$$

Efectuamos el producto

$$X=ABA^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{rr} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{array}\right)$$

1.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.6.7 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right),\quad I=\left(\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 2, \;\; \beta = -1$$

b)

$$A^5 = A^2A^2A = (2A - I)^2A = (4A^2 + I^2 - 4AI)A = (4A^2 - 4A + I)A =$$

$$4(2A - I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A - I) + A =$$

$$8(2A - I) - 4A - 8A + 4I + A = 5A - 4I = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$(A - X)(A + X) = A^2 - X^2 \Longrightarrow A^2 + AX - XA + X^2 = A^2 - X^2$$

$$\Longrightarrow AX - XA = 0 \Longrightarrow AX = XA$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX = XA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a + 2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = d \end{cases}$$

Serán las matrices A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.6.8 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^3 \cdot A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7. Año 2006

1.7.1. Modelo

Opción A

Problema 1.7.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & k \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \\ kx+ & ky- & 4z = & -1 \end{array} \right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & k \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ k & k & -4 & -1 \end{array} \right), \quad |A| = 4k - 4 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango($\overline{A}$) $= 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado se observa que la cuarta fila es la diferencia entre la primera y la segunda, luego el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$, en conclusión: $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y en este caso el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 11\lambda \\ y = 3 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.7.2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.

b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

Solución:

a)

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 0 \Longrightarrow A^2 = 2A - I$

$$A^4 = (A^2)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

1.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{rrl} x+ & ky & -z = 0 \\ kx- & y & +z = 0 \\ (k+1)x+ & y & = 0 \end{array} \right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ (k+1) & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = k^2 - k - 2 = 0 \Longrightarrow k = -1,\ k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0$ el sistema es compatible determinado $x = y = z = 0$.

Si $k = 2 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Si $k = -1 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y - z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.7.4 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = 2c + d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.7.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

a)
$$|M| = -2a(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = 1,\ \ a = -1$$
Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$
Si $a = 1$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$
Si $a = -1$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

b) M es invertible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1.

Si $a = 2$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

1.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.7.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A+I| = |A| + |I|$

b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:
$$|M+I| = |M| + |I|$$

Solución:

a)
$$|A^2| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$|A|^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

Luego $|A^2| = |A|^2$.

$$|A+I| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| + |I| = -1 + 1 = 0 \Longrightarrow |A+I| = |A| + |I|$$

b) Si podemos asegurar que $|M^2| = |M|^2$:

$$|M^2| = |M \cdot M| = |M| \cdot |M| = |M|^2$$

c)

$$M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad |I| = 1$$

$$|M+I| = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} = (a+1)(d+1) - cd$$

$$(a+1)(d+1) - cd = ad - cb \Longrightarrow a = -d$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + \quad y - \quad 3z = 0 \\ 2x + \quad 3y - \quad z = 5 \end{cases}$$

b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x + \quad y - \quad 3z = 0 \\ 2x + \quad 3y - \quad z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -5 + 8\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $-5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = 1$.

$$x = 3, \quad y = 0, \quad z = 1$$

Problema 1.7.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular

$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

Solución:

a)

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = a \\ a^2+ab = a \\ b^2 = b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = 1 \\ a(a+b-1) = 0 \\ b(b-1) = 0 \Longrightarrow b = 0,\ \ b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 0,\ \ b = 1 \\ a = 1,\ \ b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = A$; $A^3 = A^2A = AA = A$; $A^4 = A^3A = AA = A \cdots A^{10} = A$ Luego:

$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = 10A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8. Año 2007

1.8.1. Modelo

Opción A

Problema 1.8.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z = & 1 \\ x+ & ky- & kz = & k^2 \\ -x+ & ky- & k^2z = & k^2 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array}\right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El Rango$(A) = 1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución). Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego Rango(A) =Rango$(\overline{A}) <$ nº incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.8.2 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el Rango$(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M) = 2$.

b) Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.8.3 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\left(\begin{array}{ccc} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{array}\right)$ según los valores del parámetro m.

Solución:

$$|A| = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \quad m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $m = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right)$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Si $m = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| \neq 0 \text{ (dos filas iguales)}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Problema 1.8.4 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{cc} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{array}\right)$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Solución:

$$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$$

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc} 2a & -b \\ 2c & -d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 6a-9c=0 \\ b-d=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} b=d \\ c=2/3a \end{array}\right.$$

$$X = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 2/3a & b \end{array}\right), \quad \text{p.e } X = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.8.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-c=0 \\ b-c=0 \end{array} \right.$$

Las condición que debería de cumplir sería $a = b = c$

b)

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.8.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z= & -1 \\ kx+ & y+ & z= & k \\ (k-1)x- & 2y- & z= & k+1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (k+1) & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ (k-1) & -2 & -1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Longrightarrow k = \frac{1}{2}, \;\; k = 2$$

- ☛ Si $k\neq\frac{1}{2}$ y $k\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- ☛ $k=\frac{1}{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & -1\\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2\\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 3/2\\ 1/2 & 1 \end{array}\right|=-1/2\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Por otra parte

$$\left|\begin{array}{ccc} 3/2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1/2\\ -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right|=-3\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

- ☛ $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la diferencia de la segunda menos la primera, y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 3\\ 2 & 1 \end{array}\right|=-5\neq 0\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & 2z= & -1\\ 2x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=7/5-1/5\lambda\\ y=-4/5-3/5\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.8.7 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2+BA=A^2$$

siendo $A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Solución:

$$XA^2+BA=A^2\Longrightarrow XA^2=A^2-BA\Longrightarrow X=(A^2-BA)(A^2)^{-1}$$

$$A^2=A\cdot A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=I_3$$

$$(A^2)^{-1}=I_3$$

$$B\cdot A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)=2I_3$$

Luego:

$$X=(A^2-BA)(A^2)^{-1}=(I_3-2I_3)I_3=-I_3=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Problema 1.8.8 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax+y+bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Solución:

a) Para que las soluciones del sistema resultante sean las mismas que las del sistema del enunciado necesariamente la ecuación $ax+y+bz = 1$ tiene que ser combinación lineal de las otras dos, de esa manera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \\ ax+ & y+ & bz = & 1 \end{array}\right. \quad \text{es Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por k y la segunda por l su suma será la ecuación $ax + y + bz = 1$, es decir $F_3 = kF_1 + lF_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} a = k + 2l \\ 2k + 3l = 1 \\ -3k + l = b \\ 3k + 5l = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 2 \\ l = -1 \\ a = 0 \\ b = -7 \end{array}\right.$$

La ecuación sería $y - 7z = 1$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 11\lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Luego $(1 - 11\lambda) + (1 + 7\lambda) + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$ y sustituyendo tenemos:

$$x = \frac{25}{3},\ \ y = -\frac{11}{3},\ \ z = \frac{2}{3}$$

1.9. Año 2008

1.9.1. Modelo

Opción A

Problema 1.9.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array} \right)$$

$$|A| = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \quad m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = 2F_1 - F_2$ podemos decir que Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) <$ nº de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

A la vista de la matriz se ve que el Rango$(A) = 1$ al tener las tres filas iguales, pero Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2/3 + \lambda \\ y = -2/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.9.2 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{rr} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{array} \right)$$

a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

b) (1 punto) Calcular A^{10}.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

Solución:

a) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1}BA =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 + AM - MA - M^2 = A^2 - M^2 \Longrightarrow AM = MA$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+d = a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

La matriz buscada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

1.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.9.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x- & ay = & 2 \\ ax- & y = & a+1 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right), \quad |A| = -1 + a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado (solución única). Su solución sería, aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix}}{-1+a^2} = \frac{a+2}{a+1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix}}{-1+a^2} = -\frac{1}{a+1}$$

Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

En este caso Rango$(A) = 1$, mientras que Rango$(\overline{A}) = 2$ ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.
Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Está claro, que las dos filas son iguales y, por tanto, Rango$(A) = 1 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones, en este caso y aunque no las pida el problema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

b)

$$2 = -\frac{1}{a+1} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Cuando $a = 1$ e $y = 2 \Longrightarrow x = 4$, luego las soluciones de a pedidas son $a = 1$ y $a = -\dfrac{3}{2}$.

Opción B

Problema 1.9.4 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

Solución:

a)

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 10$$

b)

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

c)

$$A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^4 = 10000$$

1.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.9.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a^2+a-1) = 0 \Longrightarrow a = -1, \; a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

En los tres casos el Rango$(A) = 2$

b) Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz A es invertible.

Si $a = -1$ o $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz A no es invertible.

Cuando $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.9.6 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando la matriz vemos que, la 1ª columna es igual a la 3ª, y la segunda es igual a la 4ª multiplicada por dos, luego el Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ $= 2 < 4$ nº de incógnitas y se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con $4 - 2 = 2$ grados de libertad. Es decir, necesitaremos dos parámetros para su solución.

Como las dos primeras filas son linealmente independientes el sistema a resolver será:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ \\ y = \dfrac{4 - 3\mu}{2} \\ \\ z = \lambda \\ v = \mu \end{array} \right.$$

Problema 1.9.7 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución:

x: nº de billetes de 50 euros

y: nº de billetes de 20 euros

z: nº de billetes de 10 euros

$$\left\{ \begin{array}{c} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ y = 75 \\ z = 50 \end{array} \right.$$

1.10. Año 2009

1.10.1. Modelo

Opción A

Problema 1.10.1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 2k\\ 3 & -5 & k \end{array}\right)$$

$$|\overline{A}|=3(k-1)=0\Longrightarrow k=1$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ el Rango$(A)=2$ independientemente del valor de k.

Si $k\neq 1\Longrightarrow |\overline{A}|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución.

Si $k=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -5 & 1 \end{array}\right),\ |\overline{A}|=0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2$$

Luego en este caso Rango(A) =Rango$(\overline{A})=2=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 3\\ 2x- & 3y= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=4 \end{array}\right.$$

Problema 1.10.2 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & x+1\\ x-1 & x+1 & x+1\\ x-1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=$$

$$(x+1)^2(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & 1\\ x-1 & x+1 & 1\\ x-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=(x+1)^2(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & 1\\ -(x-1) & x & 0\\ -(x-1) & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$(x+1)^2(x-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & x & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-(x^2-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1\\ x & 0 \end{vmatrix}=x(x^2-1)^2=0\Longrightarrow x=\pm 1$$

Opción B

Problema 1.10.3 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

b) (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Solución:

a) ☛ $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 4^3 = 64$

☛ $|3A| = |(3C_1, 3C_2, 3C_3)| = 3^3|A| = 27 \cdot 4 = 108$

b) ☛ $|B| = |(2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)| = -10|(C_1, C_1 - C_2, C_3)| =$

$= -10\,[(C_1, C_1, C_3) - (C_1, C_2, C_3)] = 10|A| = 40$

☛ Si $|B \cdot B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{40}$

1.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.10.4 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{array}\right. ,$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array}\right) \quad |A| = -4\lambda(5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \;\; \lambda = 1 \;\; \lambda = \frac{1}{5}$$

☛ Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ y $k \neq 1/5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

☛ Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

☛ Si $\lambda = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

☛ Si $\lambda = 1/5$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

Si $\lambda = -1$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 4x- & 4y+ & 2z = & -2 \\ -x+ & y+ & z = & -1 \\ -4x- & 4y- & z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.10.5 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad |\overline{A}| = -(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \;\; \lambda = 6$$

☛ Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 6 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$ luego en este caso el sistema será Incompatible.

☛ Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Determinado.

☛ Si $\lambda = 6$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Determinado.

b) Cuando $\lambda = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2 \end{array} \right.$$

Cuando $\lambda = 6$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = -14 \end{array} \right.$$

Problema 1.10.6 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array} \right)$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

Solución:

a) $A = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Si $a = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -2$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $a = -1$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right)$$

1.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.10.7 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

a) (1,25 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Solución:

a) $|M| = 2m(m-1) = 0 \Longrightarrow m = 0,\ \ m = 1.$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow$ existe M^{-1}.

Si $m = 0$ o $m = 1 \Longrightarrow$ no existe M^{-1}.

b) M^{25} no es invertible si $|M^{25}| = 0 \Longrightarrow |M|^{25} = 0 \Longrightarrow |M| = 0$. Luego M^{25} es invertible si $m \neq 0$ y $m \neq 1$

c)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.10.8 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases},$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo

a)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \ \ \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado y la única solución es la trivial.

$$x = y = z = 0$$

- Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 5 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 <$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

b) Cuando $\lambda = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = -\lambda \\ 5x - y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ y = \dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.10.9 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

Solución:

$$AXB = A + B \Longrightarrow X = A^{-1}(A + B)B^{-1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -5/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

1.10.4. Reserva

Opción A

Problema 1.10.10 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

Añadimos una tercera ecuación:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \\ ax + by + cz = d \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 3 & 0 & 2 & 2\sqrt{5} \\ a & b & c & d \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2a - 4b + 3c$$

a) Para que sea compatible determinado $|A| \neq 0$ y una solución posible puede ser $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$.

b) Para que sea compatible indeterminado $|A| = 0$, es decir, la fila $F_3 = \alpha F_1 + \beta F_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2\alpha + 3\beta \\ b = -\alpha \\ c = 2\beta \\ d = \alpha\sqrt{3} + \beta 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Bastaría tomar cualquier $\alpha \neq 0$ o cualquier $\beta \neq 0$, por ejemplo, si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 1$ tenemos:

$$a = 3, b = 0, c = 2 \ \text{ y } \ d = 2\sqrt{5}$$

Problema 1.10.11 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

Solución:

$$XB = A + B \Longrightarrow X = (A + B)B^{-1}$$

$$X = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} -4 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr} -7 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.10.12 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z= & 0\\ x+ & (m+1)y+ & z= & m\\ x+ & y+ & (m+1)z= & m^2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 0\\ 1 & (m+1) & 1 & m\\ 1 & 1 & (m+1) & m^2 \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2(m+3) = 0 \Longrightarrow m = 0 \;\; m = -3$$

- Si $m \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado.

- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

  Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 1 <$ nº de incógnitas, y el sistema es compatible indeterminado.

- Si $m = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

  En este caso Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, y el sistema es incompatible. Los determinantes:

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 9 \end{array}\right| = 18 \neq 0, \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ -2 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$$

b) Cuando $m = 0 \Longrightarrow x + y + z = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda - \mu\\ y = \lambda\\ z = \mu \end{array}\right.$$

1.11. Año 2010

1.11.1. Modelo

Opción A

Problema 1.11.1 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Solución:

Si $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si $n = n$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Problema 1.11.2 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{array}\right) \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \;\; k = -2$$

- ☛ Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- ☛ Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

☛ Si $k = -2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos:

$$F_3 = -(F_1 + F_2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

Opción B

Problema 1.11.3 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 4 \\ -\lambda x- & y- & z = & -5 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ

b) (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \quad |A| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \;\; \lambda = 2$$

☛ Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

☛ Si $\lambda = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

☛ Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x+ & 2y- & z = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z= & 2\\ x- & 2y- & z= & 4\\ 2x- & y- & z= & -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3\\ y=-6\\ z=5 \end{array}\right.$$

1.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.4 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky- & z= & 0\\ 2x- & y+ & 2z= & 0\\ x- & 4y+ & kz= & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$.

b) (1 punto) Resolverlo para el casa de $k=3$.

Solución:

a)

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & k & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -4 & k \end{array}\right) \quad |A|=-2k^2+k+15=0 \Longrightarrow k=3 \;\; k=-5/2$$

- Si $k\neq 3$ y $k\neq -5/2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado y la única solución sería la trivial $x=y=z=0$
- Si $k=3$ o $k=-5/2 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y tendría infinitas soluciones distintas de la trivial.

b) Si $k=3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 0\\ 2x- & y+ & 2z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{7}\lambda\\ y=\frac{4}{7}\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.11.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{rr} 1 & 1\\ 1 & -2 \end{array}\right),\quad I=\left(\begin{array}{rr} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2=aA+bI$.

b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

$$A^2 = -A + 3I$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = (-A + 3I)A = -A^2 + 3A = A - 3I + 3A = 4A - 3I$

$$A^3 = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3A = 4(-A + 3I) - 3A = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A + 12I)A = -7A^2 + 12A = -7(-A + 3I) + 12A = 19A - 21I$$

$$A^5 = 19\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.11.6 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & a \\ ax+ & & 2z = & -2 \\ x+ & & z = & -2 \end{array} \right.$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad |A| = 2a - a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \;\; a = 2$$

☛ Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

☛ Si $a = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

☛ Si $a = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & z = & 0 \\ & 2z = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{array}\right.$$

1.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.7 *(3 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4\right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = 2^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = 6^4$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$

c) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$-4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -12$

Opción B

Problema 1.11.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my+ & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & (m+1)y+ & z = & 9 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{array}\right) \quad |A| = -2(2m+3) = 0 \Longrightarrow m = -\frac{3}{2}$$

- Si $m \neq -3/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = -3/2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3/2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1/2 & 1 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{array} \right| = -30 \neq 0$$

Sistema Incompatible.

b) Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & y+ & z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 1.11.9 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a$$

Si $a = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz no tiene inversa.

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz si tiene inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a - a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$$

1.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.10 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1\\ 1 & m-1 & m & 1\\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m

b) (1 punto). En el caso de $m=0$, resolver el sistema

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

a)

$$|A_1|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & m\\ 1 & m-1 & m\\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1\\ 1 & m-1 & 1\\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}=m^3-3m^2+4=0\Longrightarrow m=-1,\ m=2$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & m\\ 1 & m-1 & m\\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} m-1 & m & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix}=m^3-3m^2+4=0\Longrightarrow m=-1,\ m=2$$

$$|A_4|=\begin{vmatrix} 1 & m & 1\\ m-1 & m & 1\\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix}=-m^3+3m^2-4=0\Longrightarrow m=-1,\ m=2$$

Si $m=-1$:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Si $m=2$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow \text{Rango}(A)=1$$

Si $m\neq -1$ y $m\neq 2\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.

b) Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} -x+ & y+ & & t = & 0 \\ x- & y+ & & t = & 0 \\ x+ & y+ & 2z- & t = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lr} x = & -\lambda \\ y = & -\lambda \\ z = & \lambda \\ t = & 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.11.11 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema

b) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

c) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A}$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

b) Se elige una ecuación linealmente independiente de las otras dos por ejemplo $x + z = 1$ (Los tres planos se tienen que cortar en un sólo punto)

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A}$ =Rango$(A) = 3 =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

c) Se elige una ecuación de forma que los términos en x, y y z dependan de las otras dos pero el término independiente no. (Los planos se cortarían dos a dos sin coincidir los tres en una recta). Por ejemplo: $3x + y = 1$

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A} = 3 \neq$Rango$(A) = 2 =$ luego el sistema es incompatible.

Problema 1.11.12 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 2$$

Si $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

En conclusión, Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$. Por el contrario, si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

b) Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow$ existe inversa.

Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow$ no existe inversa. Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.13 *(3 puntos)* El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{vmatrix} = 0$ sea cual sea el valor de a, luego el sistema no compatible determinado en ningún caso.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & b \end{array}\right)$$

$$|A_1| = |C_1C_2C_3| = 0, \quad |A_2| = |C_1C_2C_4| = 2b + 5 = 0 \Longrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$|A_3| = |C_1C_3C_4| = 0, \quad |A_2| = |C_2C_3C_4| = -2b - 5 = 0 \Longrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

El sistema es imcompatible para cualquier valor distinto de -5/2.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

Sabemos que Rango$(A) = 2$, luego tenemos que encontrar c de forma que la segunda fila sea combinación lineal de las otras dos, de esa forma Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas. Tendremos $F_2 = mF_1 + nF_2$:

$$(0, 2, 0, c) = m(1, 0, 1, 0) + n(4, 5, 4, 10) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = m + 4n \\ 2 = 5n \\ 0 = m + 4n \\ c = 10n \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = -4n \\ n = 2/5 \\ c = 10n \end{array}\right. \Longrightarrow c = 4$$

Es decir cuando $c = 4$ tenemos que $F_2 = -8/5F_1 + 2/5F_2$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 0 \\ 2y = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.11.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz = & k \\ x+ & ky+ & z = & k^2 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = -2$$

- ☛ Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas, luego el sistema sería compatible determinado.

- ☛ Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \text{ y } \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -9 \neq 0$$

En este caso tenemos $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

- ☛ Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Claramente Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 1 <$ nº de incógnitas y se trata de un sistem compatible indeterminado.

b) Si $k = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & & = 0 \\ x+ & & z = & 0 \\ & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

1.12. Año 2011

1.12.1. Modelo

Opción A

Problema 1.12.1 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array}\right) \quad |A| = -6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

☛ Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

☛ Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & + & z = & 2 \\ x+ & y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.12.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{array}\right), \quad I = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\frac{1}{3}(4I - A)$.

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Solución:

a)

$$A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^2 - 4A + 3I = O \Longrightarrow A(A - 4I) = -3I \Longrightarrow A\left(-\frac{1}{3}(A - 4I)\right) = I \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$$

c)

$$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = A^2 - 2IA - 2AI + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I =$$
$$A^2 - 4A + 3I + I = O + I = I \Longrightarrow (A - 2I)^{-1} = A - 2I$$

.

1.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.12.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 4 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$, por tanto, si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego el $\text{Rango}(A) = 2$ independientemente del valor de b. Tal y como se había estudiado en el apartado anterior.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 6(b-3) = 0 \Longrightarrow b = 3$$

Si $b \neq 3 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$ y el sistema sería Incompatible, por el contrario, si $b = 3$ el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$, y en este caso sería Compatible Indeterminado. En este último caso:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

Opción B

Problema 1.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & (m-1)z = & m \\ & (m-1)y+ & z = & m \\ (m-2)x+ & & = & m+2 \end{array}\right.$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & (m-1) & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{array}\right) \quad |A| = -m(m-2)^2 = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

  Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $m = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

  Sistema es Incompatible.

b) Si $m = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y- & z = & 0 \\ -2x & & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y & = & 1 \\ & & z = & 1 \\ -x & & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.12.5 *(2 puntos).* Calcular el rango de la matriz

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{array}\right)$$

según los valores del parámetro a.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = 2(a+2) = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 3, \ \forall\, a \in \Re$

Problema 1.12.6 *(2 puntos).* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M.

b) (1 punto). Hallar la matriz M^2.

c) (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25}.

Solución:

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

b)

$$M^2 = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c)

$$M^n = \left\{ \begin{array}{lll} M & \text{si} & n \text{ impar} \\ I & \text{si} & n \text{ par} \end{array} \right. \Longrightarrow M^{25} = M$$

Opción B

Problema 1.12.7 *(3 puntos).* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = 4k \\ -k^3x+ & k^2y+ & kz & = 0 \\ x+ & ky & & = k^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 4k \\ -k^3 & k^2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 \end{array} \right); \quad |A| = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{array} \right| = 2k(2-k) = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = 2$$

☛ Si $k \neq 0$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ *SCD* Sistema compatible determinado.

☛ Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ *SCI* Sistema compatible indeterminado.

☛ Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right); \quad 2F_3 = F_1 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -8 & 4 \end{array} \right| = 40 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ *SCI* Sistema compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = 4 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & y & & = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = 8 \\ -8x+ & 4y+ & 2z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4/5 + 1/5\lambda \\ y = 8/5 - 1/10\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.13. Año 2012

1.13.1. Modelo

Opción A

Problema 1.13.1 *(3 puntos)* Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & m & -5 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -9m - 27 = 0 \Longrightarrow m = -3$$

Si $m \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{array}\right| = -44 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & y- & 5z = & -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.13.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -a \\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -a \\ -3 & 2a & 7 \end{array}\right) \Longrightarrow |\overline{A}| = 2a^2 + 12a - 32 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = -8$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array}\right| = -5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a\neq 2$ y $a\neq -8 \Longrightarrow |\overline{A}|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a=2\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a=-8\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y= & 1\\ 3x+ & y= & -2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1\\ y=1\end{array}\right.$$

Si $a=-8$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y= & 1\\ 3x+ & y= & 8\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=-1\end{array}\right.$$

1.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.13.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr} k & k & k^2\\ 1 & -1 & k\\ 2k & -2 & 2\end{array}\right),\ B=\left(\begin{array}{r} 12\\ 6\\ 8\end{array}\right),\ C=\left(\begin{array}{r} 4\\ 3\\ 3\end{array}\right),\ X=\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z\end{array}\right)$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k=2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX=B$.

c) (0,75 puntos) Para $k=1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX=C$.

Solución:

a)

$$|A|=4k(k^2-1)=0\Longrightarrow k=0,\ \ k=\pm 1$$

- ☛ Si $k\neq 0$ o $k\neq \pm 1\Longrightarrow$ Rango$(A)=3$
- ☛ Si $k=0$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

- ☛ Si $k=1$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

- ☛ Si $k=-1$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

b) Si $k = 2$:

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$ el sistema $AX = C$ tiene como matriz asociada:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right), \text{ Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Opción B

Problema 1.13.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Solución:

a)

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2-a & 3+a \end{vmatrix} = 40(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Luego si $a \neq 1 \Longrightarrow$Rango$(B) = 3$. Si $a = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 2$$

b) Si $a=0$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2\\ -2 & -3 & -7 & -8\\ 3 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B:$$

$$X=\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1\\ 1/4 & 1/4 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2\\ -2 & -3 & -7 & -8\\ 3 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Problema 1.13.5 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1\\ 1 & y & 1 & 1\\ 1 & 1 & z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1\\ 1 & y & 1 & 1\\ 1 & 1 & z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1-F_4\\ F_2-F_4\\ F_3-F_4\\ F_4\end{bmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & y-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & z-1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(x-1)(y-1)(z-1)$$

1.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.13.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x+ & 2y+ & (a-1)z= & 1\\ -x+ & ay+ & z= & 0\\ 2x+ & y- & 2z= & 3\end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & (a-1) & 1\\ -1 & a & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{array}\right);\ |A|=-2\left(a+\frac{1}{2}\right)(a+2)=0\Longrightarrow$$

$$a=-\frac{1}{2},\ a=-2$$

☛ Si $a=-\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1/2 & 1\\ -1 & 1/2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2\\ -1 & 1/2\end{vmatrix}\neq 0\Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

☛ Si $a = --2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x+ & 2y & & = & 1 \\ -x+ & y+ & z = & & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1 \\ z = -4/3 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.13.7 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ (1,5 \text{ puntos}) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad b)\ (1,5 \text{ puntos}) \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$b) \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

1.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.13.8 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & ay+ & 4z= & 6\\ x+ & (a+1)y+ & z= & 3\\ (a-1)x- & ay- & 3z= & -3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a=-1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & a & 4 & 6\\ 1 & (a+1) & 1 & 3\\ (a-1) & -a & -3 & -3 \end{array}\right) \quad |A|=-3a^2-8a-5=0 \Longrightarrow a=-1,\ \ a=-5/3$$

- Si $k\neq -1$ o $k\neq -5/3 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas, y el sistema es compatible determinado (solución única).

- Si $k=-5/3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -5/3 & 4 & 6\\ 1 & -2/3 & 1 & 3\\ -8/3 & 5/3 & -3 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{rr} 4 & 6\\ 1 & 3 \end{array}\right| = 6\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -8/3 & -3 & -3 \end{array}\right| = -4\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 4 & 6\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right);\ \ F_3=F_2-F_1$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & 4z= & 6\\ x+ & & z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.13.9 *(3 puntos)* Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d} \in R^3$, vectores columna. Si

$$det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{d}) = -1, \quad det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}) = 3, \quad det(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) (0,5 puntos). $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})$.

b) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d})$.

c) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d})$

Solución:

a) $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = 3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = -3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = 3$

b) $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) + det(-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = -3 - 2 = -5$

c) $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) +$
$det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) = -2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 4$

Problema 1.13.10 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ ax- & y+ & z = & -8 \\ 2x+ & & az = & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array}\right); \quad |A| = -a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

- Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right); |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0; \ |A_4| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego cuando $a = -4$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\begin{cases} x- \quad\quad 2z = 2 \\ -5x- \ y+ \ z = -8 \\ 2x- \quad\quad 5z = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

1.14. Año 2013

1.14.1. Modelo

Opción A

Problema 1.14.1 *(3 puntos)* Dado el sistema

$$\begin{cases} x+ \ 2y+ \ (m+3)z = 3 \\ x+ \ y+ \ (4+m-m^2)z = 3 \\ 2x+ \ 4y+ \ 3(m+2)z = 8 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto). Resolverlo para $m = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3 \\ 2 & 4 & 3(m+2) & 8 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -m = 0 \Longrightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = -2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & = & 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.14.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX = XA$.

b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A.

Solución:

a)

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+y \\ z+2t & 2z+t \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2z = x+2y \Longrightarrow z = y \\ y+2t = 2x+y \Longrightarrow t = x \\ 2x+z = z+2t \Longrightarrow t = x \\ 2y+t = 2z+t \Longrightarrow z = y \end{array}\right. \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

Problema 1.14.3 *(2 puntos)* De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A - B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B.

Solución:

a)

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$A-B=(A+B)^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\\ \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\ \\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

1.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.14.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & 7y+ & 5z= & 0\\ x+ & ay+ & z= & 3\\ & y+ & z= & -2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=4$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0\\ 1 & a & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=a^2-a-2=0\Longrightarrow a=-1,\ a=2$$

Si $a\neq -1$ y $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incóngitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \begin{vmatrix} -1 & 7\\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-6\neq 0\Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$|A_1| = |A| = 0, \; |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \; |A_4| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango(A) = Rango$(\overline{A})$ < nº incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado(infinitas soluciones).

b) Para $a = 4$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 4x+ & 7y+ & 5z = & 0 \\ x+ & 4y+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array} \right.$$

c) Para $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.14.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.

b) (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

Solución:

a) $|A| = \lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$. Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ por tanto la solución del sistema $XA = B \Longrightarrow X = BA^{-1}$ tiene solución única.

b) Si $\lambda = 4$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}; \quad X = BA^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2/5 & 3/5 & 11/5 \\ 3/5 & 7/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

c) $|A^2B| = |A||A||B| = -(\lambda+1)^2$

1.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 2y- & 3z = & 2\lambda \\ x+ & y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 2 & -3 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 5\lambda + 15 = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$$

Si $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incóngitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para un $\lambda \neq -3$ cualquiera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{5\lambda + 15} = \frac{2\lambda + 3}{\lambda + 3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{5\lambda + 15} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{5\lambda + 15} = -\frac{\lambda}{\lambda + 3}$$

Opción B

Problema 1.14.7 *(2 puntos)* Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar det $\left[B^{-1}A^2B^2\right]$

b) (0,5 puntos). Hallar det $\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$.

c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1\ c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Solución:

a) $|B^{-1}A^2B^2| = |B^{-1}||A^2||B^2| = |B|^{-1}|A|^2|B|^2 = \dfrac{1}{3}\cdot 25\cdot 9 = 75$

b) $\left|\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]\right| = \left|\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) A\right]\right| =$
$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot |A| = 30$

c) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (c_1\ c_2)$, tenemos $AX = (c_1) \Longrightarrow X = A^{-1}(c_2)$:
Como $|A| = 5 \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -cb + ad \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.14.8 *(2 puntos)* Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

Solución:

a) $|A| = (\lambda+1)(4\lambda-3) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1,\ \ \lambda = 3/4$. La matriz es invertible para cualquier valor distinto de los calculados anteriormente.

b) Si $\lambda = 1$: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1/2 & -3/2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.14.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & a \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = -(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(1-a^2) = -(a+1)(a-1)^3$$

$$-(a+1)(a-1)^3 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = 1$$

Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 4$.

b) Si $a = 1$ el Rango$(A) = 1$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4 - 1 = 3$ parámetros:

$$x + y + z + w = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu - \sigma \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ w = \sigma \end{cases}$$

c) Si $a=-1$ el Rango$(A)=3$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4-3=1$ parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} x+ & y- & z- & w= & 0 \\ -x+ & y+ & z- & w= & 0 \\ -x- & y- & z+ & w= & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \\ w=\lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.14.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & \lambda y+ & \lambda z= & 1-\lambda \\ x+ & y+ & (\lambda-1)z= & -2\lambda \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z= & \lambda-1 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda=1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda=-1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 & -2\lambda \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \lambda^3-3\lambda^2+4=0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda=-1 \\ \lambda=2 \end{array} \right.$$

Si $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda=2$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso el Rango$(A)=1$ y el Rango$(\overline{A})=2$ y el sistema es incompatible.

Si $\lambda=-1$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso: $F_1=-F_3 \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y+ & z = & 0\\ x+ & y & = & -2\\ & y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0\\ y = -2\\ z = 2 \end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z = & 2\\ x+ & y- & 2z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{4}{3} + \mu\\ y = \frac{2}{3} + \mu\\ z = \mu \end{array}\right.$$

1.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A.

b) (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?

c) (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6\\ 8\\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Si, $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\\ 8\\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.14.12 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6\\ x-1 & 0 & -6\\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ x & 0 & -6 \\ x^2 & x & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -6 \\ 2 & x & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ x & 0 & -6 \\ x^2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & x & 2 \end{vmatrix} =$$

$$6x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = -6x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix} = -6x(2-x) = 6 \Longrightarrow$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Problema 1.14.13 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & ay- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & az = & 0 \\ 7x+ & 9y+ & 9z = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 7a^2 - 36a + 5 = 0 \Longrightarrow a = 5, \ \ a = 1/7$$

Si $a \neq 5$ y $a \neq 1/7 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial ($x = y = z = 0$)
Si $a = 5$ o $a = 1/7$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para Si $a = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & 5y- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & 5z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -27/13\lambda \\ y = 8/13\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.15. Año 2014

1.15.1. Modelo

Opción A

Problema 1.15.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.

c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall k, , \in R$$

b)

$$k = 6 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AX - A = B \Longrightarrow X = A^{-1}(B + A)$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.15.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrr} (a+2)x+ & (a+1)y = & -6 \\ x+ & 5y = & a \\ x+ & y = & -5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & a+1 & -6 \\ 1 & 5 & a \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

a) $|\overline{A}| = -21a - 21 = 0 \Longrightarrow a = -1$. Si $a = -1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A} = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ el sistema sería incompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

En este caso Rango$(\overline{A} = 2 =$ Rango$(A) =$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema sería compatible determinado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{r} x = -6 \\ x + y = -5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -6 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Problema 1.15.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

1.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.15.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b) (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Solución:

a)
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 9/2 \\ \gamma = -3 \end{array} \right.$$

b) $\beta = \gamma = 1$:
$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |A| = -\alpha(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0, \ \ \alpha = 1$$

Se trata de un sistema homogéneo:
Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas por lo que es un sistema compatible determinado y su única solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.
Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) <$ nº de incógnitas por lo que es un sistema compatible indeterminado.

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.15.5 *(2 puntos)* Dada la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \ \text{se pide}:$$

a) (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

Solución:

a) $|A| = -2a^2 + 5 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
Si $a \neq \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.
Si $a = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

b) Para $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.15.6 *(2 puntos)* Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

Solución:
Sean x el precio de un cuaderno, y el precio de un rotulador y z el de un bolígrafo.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + y + 6z = 14 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -6 + 9z \\ y = 26 - 24z \end{array} \right.$$

b) $8x + 3y = 8(-6 + 9z) + 3(26 - 24z) = 30$ euros.

1.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & a \\ x+ & y- & z = & 3a^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 3a^2 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = |A_1| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$
Rango$(A) = 2 \ \ \forall a \in \mathbb{R}$.

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 3a^2 - 2a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -1/3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & 3a^2 \end{vmatrix} = -3a^2 + 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -1/3$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión si $a \neq 1$ y $a \neq -1/3 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A)$ y el sistema sería incompatible. Por el contrario si $a = 1$ o $a = -1/3 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 2 = \text{Rango}(A) <$ nº de incógnitas y el sistema sería compatible indeterminado.

b) Para $a = -1/3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1 \\ & y- & z= & -1/3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -1/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Para $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1 \\ & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.15.8 *(3 puntos)* Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B.

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ 2x & y & z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ y & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 20$$

b) $$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -60$$

c) $$|B| = \begin{vmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$$

$$|(BB^t)^3| = |BB^t|^3 = (|B||B^t|)^3 = (|B|^2)^3 = |B|^6 = 10^6$$

1.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.15.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{array} \right), \quad X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right), \quad O = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

a) (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Solución:

a) $|A| = -a(a^2 - 3a + 2) = 0 \Longrightarrow a = 0$, $a = 1$ y $a = 2$.
Si $a = 0$ o $a = 1$ o $a = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1/12 & 1/3 & -1/4 \\ -5/24 & -1/6 & -1/8 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{array} \right)$$

c) Si $a = 1$ y $AX = O$ tenemos:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.15.10 *(2 puntos)* Dada la ecuación matricial:

$$\left(\begin{array}{cc} a & 2 \\ 3 & 7 \end{array} \right) \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) (1 punto).Calcular B en el caso $a = 1$.

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{cc} a & 2 \\ 3 & 7 \end{array} \right); \quad C = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

a) $A \cdot B = C \Longrightarrow B = A^{-1}C$, luego la ecuación tiene solución siempre que exista A^{-1}:

$$|A| = 7a - 6 = 0 \Longrightarrow a = \frac{6}{7}$$

Si $a = 7/6 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $a \neq 7/6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $B = A^{-1}C$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.15.11 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -7 & a+10 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 5 & 0 & -7 & a+5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & a+10 \\ 3 & -2 & 11 \\ 5 & -7 & a+5 \end{vmatrix} = 12 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 6$$

Si $a \neq 6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 4$.
Si $a = 6 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 4$. Y como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

1.16. Año 2015

1.16.1. Modelo

Opción A

Problema 1.16.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20}.

c) (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.

d) (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \forall m \in R \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -2m + 4 = 0 \Longrightarrow m = 2 \Longrightarrow \text{Si } m \neq 2 \ \text{Rango}(A) = 2$$

Y si $m = 2$ tenemos $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

Por tanto, $\text{Rango}(A) = 2 \ \ \forall m \in R$.

b) $|A^{20}| = |A|^{20} = 0^{20} = 0$

c) Se trata de un sistema homogéneo y el $\text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas, luego es un sistema compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + 4y + 2z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/2\lambda \\ y = -3/4\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

d) Para $m = 0$ se observa que $F_1 = 2F_2$ y como $\text{Rango}(A) = 2$ se trata de un sistema compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{c} -2x + 4y + 2z = -2 \\ -x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = \frac{-1-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.16.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

.

b) $Z^2\cdot 3I\cdot Z^{-1}=3Z\cdot Z\cdot Z^{-1}=3Z=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3\\ 1 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow Z=\left(\begin{array}{cc} 1/3 & 1\\ 1/3 & 2/3\end{array}\right)$

Problema 1.16.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrl} mx+ & y= & 0\\ x+ & my= & 0\\ mx+ & my= & 0\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 0\\ 1 & m & 0\\ m & m & 0\end{array}\right)\quad\left|\begin{array}{cc} m & 1\\ 1 & m\end{array}\right|=m^2-1=0\Longrightarrow m=\pm 1$$

Si $m\neq\pm1\Longrightarrow\left|\begin{array}{cc} m & 1\\ 1 & m\end{array}\right|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$ nº de incógnitas y, por ser un sistema homogéneo, sería un sistema compatible determinado.
Si $m=-1$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{array}\right);\ \left|\begin{array}{cc} 1 & -1\\ -1 & -1\end{array}\right|=-2\neq 0\Longrightarrow$ como antes sería un sistema compatible determinado.
Si $m=1$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right)$ Las tres filas son iguales y el sistema sería compatible indeterminado. $(x+y=0)$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=\lambda\end{array}\right.$$

1.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.16.4 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 4x+ & 3y+ & (m-1)z= & 0\\ x- & 2y+ & mz= & 1\\ 5x+ & my+ & z= & 1\end{array}\right.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m=1$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & m-1 & 0\\ 1 & -2 & m & 1\\ 5 & m & 1 & 1\end{array}\right)\quad |A|=-3m^2+24m-21=0\Longrightarrow m=1,\ \ m=7$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 7\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.
Si $m=7$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0\\ 1 & -2 & 7 & 1\\ 5 & 7 & 1 & 1\end{array}\right);\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 4 & 3\\ 1 & -2\end{array}\right|=-11\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como
$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & 7 & 1\end{array}\right|=-24\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.
Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 4 & 3\\ 1 & -2\end{array}\right|=-11\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como $F_3=F_1+F_2\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})$ =2. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m=1$:
$$\left\{\begin{array}{rrrl} 4x+ & 3y & & =0\\ x- & 2y+ & z & =1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{11}-\frac{3}{11}\lambda\\ y=-\frac{4}{11}+\frac{4}{11}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.16.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}

b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X=B-3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Solución:

a) $A^1=A$, $A^2=A\cdot A=I\Longrightarrow A^n=\left\{\begin{array}{ccc} A & \text{si} & n \text{ impar}\\ I & \text{si} & n \text{ par}\end{array}\right.$
$A^{15}=A$ y $A^{20}=I$

b) $6X = B - 3AX \Longrightarrow 6X + 3AX = B \Longrightarrow (6I + 3A)X = B \Longrightarrow X = (6I + 3A)^{-1}B$

$$6I + 3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(6I + 3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$X = (6I+3A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.16.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$, e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.

b) (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

Solución:

a) $|A| = t^2 - 9t + 14 = 0 \Longrightarrow t = 7$ y $t = 2$. Si $t \neq 7$ y $t \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $t = 7$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $t = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b)

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - tI| = -2(-7 + t) = 0 \Longrightarrow t = 7$$

1.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.7 *(2 puntos)* Dadas las matrices: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa de L.

b) (1 punto). Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.

Solución:

a) $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = L^{-1}(L^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/9 & -1/9 \\ 2/3 & -1/9 & 14/9 \end{pmatrix}$$

Problema 1.16.8 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.

b) (1 punto). Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$.

Solución:

a) $|A| = -2m^2 = 0 \Longrightarrow m = 0$. Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. Si $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b) $|4A^{-1}| = 4^3 \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{4^3}{|A|} = |A| \Longrightarrow \dfrac{4^3}{-2m^2} = -2m^2 \Longrightarrow m^4 = 2^4 \Longrightarrow m = \pm 2$

Opción B

Problema 1.16.9 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+ & y = & 5 \\ x+ & my = & 7 \\ x- & y = & 4 \end{cases}$, en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

b) (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\begin{cases} x- & y+ & kz = & 2 \\ kx- & ky+ & 4z = & -4 \end{cases}$$

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 5\\ 1 & m & 7\\ 1 & -1 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow |\overline{A}|=3m+12=0\Longrightarrow m=-4$

Si $m\neq -4\Longrightarrow |\overline{A}|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ sistema incompatible.
Si $m=-4$ como $\left|\begin{array}{rr} 2 & 1\\ 1 & -1\end{array}\right|=-3\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=$Rango$(A)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y= & 5\\ x- & 4y= & 7\\ x- & y= & 4\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=-1\end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & k & 2\\ k & -k & 4 & -4\end{array}\right)$ $|A_1|=0$, $|A_2|=4-k^2$, $|A_3|=-4-2k$, $|A_4|=4+2k$, $|A_5|=-4k+8$
Si $k=2\Longrightarrow |A_3|=-8\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2\neq$Rango$(A)=1\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $k=-2\Longrightarrow |A_5|=8\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2\neq$Rango$(A)=1\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $k\neq\pm 2\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2=$Rango$(A)<$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

1.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.16.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -mx+ & my+ & z= & 0\\ x- & my+ & 3z= & 4\\ 2x- & 2y- & z= & 0\end{array}\right.$$

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m=0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m=2$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -m & m & 1 & 0\\ 1 & -m & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)\quad |A|=-m^2+3m-2=0\Longrightarrow m=1,\ m=2$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.
Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right);\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} -1 & 1\\ 1 & 3\end{array}\right|=-4\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.
Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right); \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -F_1 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})$ =2. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{r} z = 0 \\ x + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

c) para $m = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} -2x+ & 2y+ & z = & 0 \\ x- & 2y+ & 3z = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 4\lambda \\ y = -4 + \frac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.16.11 *(2 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 2a - 2b & b & c \\ 2d - 2e & e & f \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-5 \left(\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & b & c \\ -2e & e & f \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = -30$$

b)

$$\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} =$$

$$2\left(\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}\right) = -12$$

Problema 1.16.12 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3a+c = 3a+b \\ 3b+d = a \\ a = 3c+d \\ b = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3b+d \\ b = c \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3c+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

1.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.13 *(3 puntos)* Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

b) (1 punto). Hallar la inversa de M, para $a = 2$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

Solución:

a) $|M| = 2a^2 - 5a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3/2$:
Si $a \neq 1$ y $a \neq 3/2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow \exists M^{-1}$
Si $a = 1$ o $a = 3/2 \Longrightarrow |M| = 0 \Longrightarrow \nexists M^{-1}$.

b) Si $a = 2$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Si $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ como $F_2 = -F_1 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{l} y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.16.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ (k-1)x+ & y+ & z = & k \\ x+ & (k-1)y+ & z = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$ y para $k = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = (k-1)(k-2) = 0 \Longrightarrow k = 1$ y $k = 2$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$\overline{A} = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $k = 1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$ como $F_1 = F_2 \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $k = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$ y el sistema es incompatible.

b) Para $k = 0$: $\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & -y+ & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$

Para $k = 1$: $\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ x+ & & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

1.17. Año 2016

1.17.1. Modelo

Opción A

Problema 1.17.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & kz = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad |A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = \frac{1}{2}$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right); \ |A| = 0; \ \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \ |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = 0;$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0; \ |A_4| = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0$$

$\left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2.$
Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right); \ |A| = 0; \ \left|\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Si $k = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 2y- & z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array}\right.$$

c) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/2 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.17.2 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M-\lambda I$ sea igual a 0.

b) (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Solución:

a) $|M-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \quad \lambda = 3$

b) $M - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a este sistema homogéneo que es claramente compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 4z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 1.17.3 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(BA^t + 3B - 3B) = A^{-1}BA^t =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 13 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

1.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.17.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A; B; C; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

Solución:

a) Vamos a aplicar la propiedad $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$:

$$X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B) \Longrightarrow X(CD)^{-1} - X(D^{-1}C^{-1} - B) = A \Longrightarrow$$

$$X((CD)^{-1} - (D^{-1}C^{-1} + B) = A \Longrightarrow XB = A \Longrightarrow X = AB^{-1}$$

b) $YB = A \Longrightarrow Y = AB^{-1}$:

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.17.5 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 3x+ & y & + & mz = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & (m+1)y & + & 2z = & 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array} \right) \quad |A| = m^2 - 4 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2$$

Si $m \neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right); \ |A| = 0; \ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right); \ |A| = 0; \ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$F_3 = 2F_1 - F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x+ & y & & & = & 1 \\ x- & y & + & 2z & = & -2 \\ 5x+ & y & + & 2z & = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 7/2 \end{array} \right.$$

c) Si $m = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x+ & y & + & 2z & = & 1 \\ x- & y & + & 2z & = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/4 - \lambda \\ y = 7/4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.17.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

Solución:

a)

$$A^2 = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

b) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c)

$$|(2B)^{-1}| = \frac{1}{|2B|} = \frac{1}{8|B|} = \frac{1}{32}$$

Opción B

Problema 1.17.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & az = & 0 \\ ax+ & 4y & + & 2z = & a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right) \quad |A| = -5a^2 + a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -1, \;\; a = 6/5$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 6/5 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a = 6/5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6/5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 6/5 & 4 & 2 & 6/5 \end{array}\right); \; |A| = 0; \; \left|\begin{array}{cc} 6/5 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 11/5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \;\; |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 6/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6/5 & 4 & 6/5 \end{array}\right| = 66/25 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right); \; |A| = 0; \; \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$F_2 = -F_1 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & z = & 0 \\ x+ & 4y & + & 2z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

c) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & - & z = & 0 \\ -x+ & 4y & + & 2z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/5 + 6/5\lambda \\ y = -1/5 - 1/5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.17.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha + \beta & -4\alpha \\ 5\alpha + 4\beta & -\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 3 \\ -4\alpha = -8 \\ 5\alpha + 4\beta = -2 \\ -\alpha + \beta = -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{array}\right.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \ \lambda = -\frac{1}{4}$$

El Rango$(A) = 2$ si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -1/4$.

Problema 1.17.9 *(2 puntos)* Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Solución:
x : nº de becas para grado, y : nº de becas para FP y z : nº de becas para postgrado.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 3000x+2000y+1500z=247000 \\ y=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 6x+4y+3z=494 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=31 \\ y=56 \\ z=28 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.17.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x+ & (a-1)y & - & 2z= & a \\ 2x+ & y & - & az= & 2 \\ -x+ & y & + & z= & 1-a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \quad |A|=a^2-a-2=0 \Longrightarrow a=-1,\ \ a=2$$

Si $a\neq -1$ y $a\neq 2 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);\ |A|=0;\ \left|\begin{array}{rr} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right|=6\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_1|=|A|=0;\ \ |A_2|=\left|\begin{array}{rrr} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right|=9\neq 0;$$

Luego Rango$(A)=2\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right);\ |A|=0;\ \left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|=3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$F_1=F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) ☛ Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x+ & y & - & 2z & = & 2\\ -x+ & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=0\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

☛ Si $a\neq -1$ y $a\neq 2$ por Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc} a & a-1 & -2\\ 2 & 1 & -a\\ 1-a & 1 & 1 \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)}=a;$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & a & -2\\ 2 & 2 & -a\\ -1 & 1-a & 1 \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)}=\frac{2-a}{a+1};$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & a-1 & a\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1-a \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)}=\frac{2a-1}{a+1}$$

1.18. Año 2017

1.18.1. Modelo

Opción A

Problema 1.18.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & m\\ 2 & 4 & 1\\ m & 2 & -1 \end{array}\right),\quad C=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de B en función de los valores de m.

b) (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1}=\frac{1}{5}(A^2+3C)$.

Solución:

a) $|B|=-4m^2+6m-2=0\Longrightarrow m=1,\ m=1/2$ luego si $m\neq 1$ y $m\neq 1/2\Longrightarrow |B|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(B)=3$.

Si $m=1$: $B=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$, $|B|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 2 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(B)=2$.

Si $m=1/2$: $B=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1/2\\ 2 & 4 & 1\\ 1/2 & 2 & -1 \end{array}\right)$, $|B|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 1/2 & 2 \end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(B)=2$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 - 3C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Luego $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

Opción B

Problema 1.18.2 *(2 puntos)* A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?

Solución:

Sea x el número de rosas, y el número de tulipanes y z el número de lilas de un ramo, respectivamente.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ x=2(y+z) \\ 6x+4y+3z=\frac{610}{5}=122 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=24 \\ x-2y-2z=0 \\ 6x+4y+3z=122 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=16 \\ y=2 \\ z=6 \end{array}\right.$$

1.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.18.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{array}\right.$, se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \quad |A| = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0; \ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0;\ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right);\ |A| = 0;\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array} \right.$$

c) Si $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + z = 2 \\ 4y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.18.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto). Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

Solución:

a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = P^{-1}J^{-1} = (JP)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1/2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $|A| = |PJP^{-1}| = |P||J||P^{-1}| = |P||J|\dfrac{1}{|P|} = |J| = -2$. Luego $|A^2| = |A|^2 = (-2)^2 = 4$.

1.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.5 *(2 puntos)* En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=26 \\ 1,4x+1,25y+1,5z=35,20 \\ 1,25y+z=1,5z+y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=26 \\ 28x+25y+30z=704 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=8 \\ y=12 \\ z=6 \end{array}\right.$$

Problema 1.18.6 *(2 puntos)* Dada la matriz $\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular su inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz B para que $X=\left(\begin{array}{c} -4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$ sea solución del sistema $A^2X=B$.

Solución:

a) $A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right)$

b) $B=A^2X=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} -4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -17 \\ -22 \\ -53 \end{array}\right)$

Opción B

Problema 1.18.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{llrr} x+ & my+ & 3z= & 4 \\ x+ & y- & 2z= & -2 \\ 3x & + & (m+1)z= & m+2 \end{array}\right. ,$$

, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $m=-3$.

c) (0,5 puntos) Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y=0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m?

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \quad |A|=-(m^2+6m+8)=0\Longrightarrow m=-2,\quad m=-4$$

Si $m\neq -2$ y $m\neq -4 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right); F_3=F_1+2F_2\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $m=-4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4\\ 0 & 5 & -5 & -6\\ 0 & 12 & -12 & -14 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 5F_3-12F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4\\ 0 & 5 & -5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m=-3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y+3z=4\\ x+y-2z=-2\\ 3x-2z=-1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=1\\ z=2 \end{array}\right.$$

c) Si $y=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3z=4\\ x-2z=-2\\ 3x+(m+1)z=m+2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2/5\\ y=0\\ z=6/5 \end{array}\right.\Longrightarrow m=-2$$

1.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.18.8 *(2 puntos)* Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=25\\ x+0,75y+0,60z=0,72\cdot 25\\ 0,15y+0,22z=0,16\cdot 25 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y+z=25\\ 100x+75y+60z=1800\\ 15y+22z=400 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=3\\ y=12\\ z=10 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.18.9 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.

b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Solución:

a) $B = (A - I)(2I + 2A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A - I| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A - I) = 2$.

$A^2 - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ Rango$(A^2 - I) = 1$.

$A^3 - I = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A^3 - I| = 0$ y $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A - I) = 2$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Longrightarrow A^6 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^6)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & = & 1 \\ & ty+ & z= & 0 \\ x+ & (1+t)y+ & tz= & t+1 \end{array}\right.$,

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $t=0$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo para $t=-1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array}\right) \quad |A|=t^2-t=0 \Longrightarrow t=0, \quad t=1$$

Si $t\neq 0$ y $t\neq 1 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $t=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $t=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right); F_3=F_1 \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $t=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right.$$

c) Si $t=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ -y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1/2 \\ y=1/2 \\ z=1/2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.18.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a\\ 1 & 0 & 5 & 2a\\ 0 & 2 & -4 & 2a\end{pmatrix}$, se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:

a) (1 punto) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible.

b) (1 punto) Obtener el rango de A en función de los valores del parámetro real a.

c) (1 punto) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, en el caso $a=0$.

Solución:

a) $|A|=0\Longrightarrow \nexists B^{-1}\ \forall a\in\mathbb{R}$

b) Por Gauss: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a\\ 1 & 0 & 5 & 2a\\ 0 & 2 & -4 & 2a\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a\\ 0 & 1 & -2 & a\\ 0 & 2 & -4 & 2a\end{pmatrix}=$ $\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3-2F_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a\\ 0 & 1 & -2 & a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2\ \forall a\in\mathbb{R}$.

c) Con $a=0$ se trata de un sistema compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} -x+7y=1\\ 5y=1\\ 2x-4y=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2/5\\ y=1/5\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

1.19. Año 2018

1.19.1. Modelo

Opción A

Problema 1.19.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, y $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que la matriz $A-mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A-2I$.

Solución:

a) $A-mI=\begin{pmatrix} -m & 1 & 1\\ 0 & 3-m & 0\\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix} \Longrightarrow |A-mI|=-m(m-3)^2=0 \Longrightarrow m=0$ y $m=3$.
Luego $\exists (A-mI)^{-1}$ si $m\in\mathbb{R}-\{0,3\}$.

b) $(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.19.2 *(2,5 puntos)* Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ m & 1 & m+1\\ 1 & m & m \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX=B$ en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX=B$ cuando $m=-1$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ m & 1 & m+1 & 1\\ 1 & m & m & 2+m \end{array}\right) \quad |A|=-m(m-1)=0 \Longrightarrow m=0,\quad m=1$$

Si $m\neq 0$ y $m\neq 1 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1\\ -x+y=1\\ x-y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2\\ z=-2 \end{array}\right.$$

1.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.19.3 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$A = \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & my & = & 1 \\ -2x- & (m+1)y+ & z = & -1 \\ x+ & (2m-1)y+ & (m+2)z = & 2+2m \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array} \right) \quad |A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.19.4 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

b) (1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.

c) (0,5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) $|A| = -(m^2 + 4m + 4) = 0 \Longrightarrow m = -2$:

- Si $m = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
- Si $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Si $m = 0$ tenemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$B^t \cdot B = (-2, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (4)$

1.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.19.5 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

b) (1,25 puntos) Hallar A^{-1} y resolver el sistema lineal $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) (0,75 puntos) Calcular C^2, donde $C = ABA^t$.

Solución:

a) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow AA^t = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$ y

$$A^tA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$.

c) $C = ABA^t = A2IA^t = 2AA^t = 2I = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^2 = 2I2I = 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.19.6 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \begin{cases} 10x- & 20y- & 10z = & 8\alpha + 44 \\ 2x- & 5y+ & 3z = & 4\alpha + 4 \\ 3x- & 7y+ & 2z = & 5\alpha + 9 \end{cases},$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real α.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $\alpha = -3$.

Solución:

a) Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ -5F_2 + F_1 \\ 10F_3 - 3F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 0 & 5 & -25 & -12\alpha + 24 \\ 0 & -10 & 50 & 26\alpha - 42 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 0 & 5 & -25 & -12\alpha + 24 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha + 6 \end{array}\right)$$

Si $2\alpha + 6 = 0 \Longrightarrow \alpha = -3 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y si $\alpha \neq -3 \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Si $\alpha = -3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y - z = 2 \\ y - 5z = 12 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 26 + 11\lambda \\ y = 12 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.19.7 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \left(\begin{array}{rrr} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{array}\right)$, $X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$ y $B = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{array}\right)$ se pide:

a) (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.

b) (0,75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) (0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

Solución:

a)

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{array}\right) \quad |A| = 490(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$$

Si $\alpha \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\left|\begin{array}{rr} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{array}\right| = 98 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $\alpha = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{array}\right)$$

c) Si $\alpha = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 14F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 56 & 40 & 148 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 8F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = 37/2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 1/7 - (5/7)\lambda \\ y = 37/14 - (5/7)\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.19.8 *(2,5 puntos)* Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución:

x días en Francia, y días en Alemania y z días en Suiza.

$$\left\{\begin{array}{l} (20+20+8)x+(25+15+8)y+(30+25+8)z=765 \\ x+y+z=15 \\ x=2z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 48x+48y+63z=765 \\ x+y+z=15 \\ x-2z=0 \end{array}\right. \quad x=6, \ \ y=6, \ \ z=3$$

1.20. Año 2019

1.20.1. Modelo

Opción A

Problema 1.20.1 *(2,5 puntos)* Para cada uno de los siguientes apartados, proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

a) (0,5 puntos) El determinante de A vale 0.

b) (0,5 puntos) El determinante de A vale 1.

c) (0,5 puntos) La matriz A coincide con su traspuesta.

d) (1 punto) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A\cdot C=C\cdot A$. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.)

Solución:

a) Basta con que una fila o columna sea combinación lineal de las otras dos, por ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ como $F_3=F_1+F_2 \Longrightarrow |A|=0$

b) Dividiendo una fila o columna por el valor del determinante de esa matriz obtenemos una nueva matriz de determinante 1, por ejemplo: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $|B|=-15 \Longrightarrow A=$ $-\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/15 & -2/15 & -1/15 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=1$

c) La matriz tiene que ser simétrica, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = A^T$

d) Bastaría con que $C = k \cdot I, , \forall k \in \mathbb{R}$, una matriz proporcional a la identidad: $A \cdot C = A \cdot k \cdot I = k \cdot I \cdot A = C \cdot A$, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & -5 & 25 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & -5 & 25 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Luego $A \cdot C = C \cdot A$.

Opción B

Problema 1.20.2 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones
$\left\{ \begin{array}{rrrr} x & -my- & z = & 0 \\ mx- & 4y+ & (6-2m)z = & -8m \\ -x+ & 2y+ & z = & 6 \end{array} \right.$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \quad |A| = -m^2 + 8m - 12 = 0 \Longrightarrow$$

$$m = 2, \quad m = 6$$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 6 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -16 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

Si $m = 6$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 6F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $m = 6$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 6y - z = 0 \\ 2y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -9 + \lambda \\ y = -3/2 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.20.3 *(2,5 puntos)*

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2+a-2 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = -2$. Luego si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ y $F_3 = -F_2 \Longrightarrow$ $\text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

En consecuencia $\text{Rango}(A) = 3$ si $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ y $\text{Rango}(A) = 2$ si $a = 1$ o $a = -2$.

b) Si $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|AM| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists (AM)^{-1}$:

$$(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.20.4 *(2,5 puntos)* Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:

Sea x el precio de un bocadillo, y el de un refresco y z el de una bolsa de patatas.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 19 \\ x + z = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 19 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

1.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.5 *(2,5 puntos)* La aerolínea "Air", para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) (0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

b) (2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

Solución:

Sea x el número de billetes vendidos de (P), y el número de billetes vendidos de (T) y z el número de billetes vendidos de (E)

a) $12 + 36 + 72 = 120$ plazas ofertadas $\Longrightarrow 0,9 \cdot 120 = 108$ plazas vendidas.

b) $\begin{cases} 250x + 150y + 100z = 13800 \Longrightarrow 5x + 3y + 2z = 276 \\ x + y + z = 108 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 276 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \\ 0 & 0 & -3 & -204 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 30 \\ z = 68 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.20.6 *(2,5 puntos)*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $m = 1$, calcular la inversa de la matriz B.

c) (1 punto) Para $m = 2$, calcular la matriz producto A^tB (donde A^t denota la matriz traspuesta de A) y el determinante de la matriz A^2B.

Solución:

a) $|B| = 4(2 - m^2) = 0 \Longrightarrow m = \pm\sqrt{2}$, para estos valores la matriz B no es invertible.

b) Si $m = 1 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 2 & -1 \\ 1/4 & -1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Para $m = 2 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^tB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2B| = |A^2||B| = |A|^2|B| = 2^2(-8) = -32$$

1.20.4. Ordinaria-Valencia

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

Opción A

Problema 1.20.7 Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ y que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$,siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2+2 puntos) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$.

b) (3 puntos) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a=-1$.

c) (3 puntos) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = 2(a^2+2a+1) = 0 \Longrightarrow a=-1$. Luego si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3$.

Si $a=-1 \Longrightarrow |A|=0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.

Si $a=1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A|=8 \Longrightarrow |2A^{-1}| = 2^3\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{8}{8} = 1$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) =$

$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2+2F_1 \\ F_3+3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = \dfrac{3}{2} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

c) $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \Longrightarrow 3(B^2+2B) = I \Longrightarrow B(3B+6I) = I \Longrightarrow$

$B^{-1} = 3B + 6I$, luego B es invertible con $m=3$ y $n=6$.

Opción B

Problema 1.20.8 Se da el sistema $\begin{cases} x+ & y+ & z = & 4 \\ 3x+ & 4y+ & 5z = & 5 \\ 7x+ & 9y+ & 11z = & \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

b) (4 puntos) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) (2 puntos) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-3F_1 \\ F_3-7F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & \alpha-28 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-14 \end{array}\right)$$

Si $\alpha = 14$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha \neq 14$ el sistema sería incompatible. Como $|A| = 0$ para cualquier valor de α el sistema nunca sería compatible determinado.

Si $\alpha = 14 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 4 \\ 3x+ & 4y+ & 5z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 11+\lambda \\ y = -7-2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Si cambiamos 11 por a: $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & a \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a - 11 = 0 \Longrightarrow$ el único valor que anula el determinate es $a = 11$ luego para cualquier otro valor, como es el caso, $|A| \neq 0$ el sistema sería compatible determinado.

1.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.20.9 *(2,5 puntos)*

Dado el sistema de ecuaciones $A = \left\{\begin{array}{rrrr} kx+ & (k+1)y+ & z = & 0 \\ -x+ & ky- & z = & 0 \\ (k-1)x- & y & = & -(k+1) \end{array}\right.$; se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2k^2 + 2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$. Luego

- ☛ Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow SCD$.
- ☛ Si $k = 1$:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) =$
  $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3+F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema incompatible. (SI)
- ☛ Si $k = -1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema homogéneo y $|A| = 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. (SCI)

b) Si $k = -1$: $\left\{\begin{array}{l} -x+z = 0 \\ -x-y-z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Opción B

Problema 1.20.10 *(2,5 puntos)*
Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix} 1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a\in\mathbb{R}$ se verifica $A^2-I=2A$.

b) (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $A^2-I=2A$:

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2\\ 2 & a^2+2a+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2a & 2\\ 2 & 2+2a\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-2a+1=2-2a\Longrightarrow a=\pm 1\\ a^2+2a+1=2+2a\Longrightarrow a=\pm 1\end{cases}$$

b) $|A|=-a^2=0\Longrightarrow a=0\Longrightarrow \exists A^{-1}\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$A^{-1}=\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -(a+1) & 1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{a+1}{a^2} & \frac{1}{a^2}\\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2}\end{pmatrix}$$

c) $|(AA^t)^2|=|(AA^t)|^2=|(AA^t)||(AA^t)|=|A||A^t||A||A^t|=|A||A||A||A|=|A|^4=(-a^2)^4=a^8$

1.21. Año 2020

1.21.1. Modelo

Opción A

Problema 1.21.1 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) (0,5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Solución:

a) Se necesitan: de nitrógeno $2000 \cdot 0,78 = 1560$ l, de oxígeno $2000 \cdot 0,21 = 420$ l y de argón $2000 \cdot 0,01 = 20$ l.

b) Se x el nº litros de mezcla A, y el nº litros de mezcla B y z el nº litros de mezcla C.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ 0,1y = 20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.2 *(2,5 puntos)* Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

Solución:

a) Por Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Si $t = 0$ el Rango$(A) = 1$ y si $t \neq 0$ el Rango$(A) = 2$.

b) El sistema es compatible determinado si Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas$= 2 \Longrightarrow$ $t \neq 0$ por el apartado anterior. Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array}\right) \Longrightarrow 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

El sistema sería:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

1.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.21.3 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$; $|A| = a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$: Sistema compatible determinado, solución única.

- Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.

- Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow SCI$: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.4 *(2,5 puntos)* Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:
Sea x el precio del kg de doradas, y el precio del kg de lubinas y z el precio del kg de rodaballos.

$$\left\{\begin{array}{l}1374000x+23440000y+7400000z=275800000\\7400000z=63600000\\x=0,11+y\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=5,7767 \text{ euros/kg}\\y=5,6667 \text{ euros/kg}\\z=8,5945 \text{ euros/kg}\end{array}\right.$$

1.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.21.5 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c}(k+1)x+3y+kz=1\\3x+(k+1)y+2z=k-1\\kx+2y+kz=2\end{array}\right.,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k=-3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}k+1&3&k&1\\3&k+1&2&k-1\\k&2&k&2\end{array}\right);\ |A|=k^2-4=0\Longrightarrow k=\pm 2$$

- ☛ Si $k\neq\pm 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&3&2&1\\3&3&2&1\\2&2&2&2\end{array}\right)=\left[\ F_1=F_2\ \right]\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- ☛ Si $k=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&-2&1\\3&-1&2&-3\\-2&2&-2&2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2+3F_1\\F_3-2F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&-2&1\\0&8&-4&0\\0&-4&2&0\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2\\F_3+2F_2\end{array}\right]==\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&-2&1\\0&8&-4&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $k=-3$:

$$\left\{\begin{array}{l}-2x+3y-3z=1\\3x-2y+2z=-4\\-3x+2y-3z=2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2\\y=1\\z=2\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.6 *(2,5 puntos)* Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A.

b) (1 punto) Calcular BCB^{-1}.

c) (1 punto) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|AB| = |BC| \Longrightarrow |A||B| = |B||C| \Longrightarrow |A| = |C| = 6$

b)

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.21.7 *(2,5 puntos)* Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0,5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) (0,5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución:

Tenemos $A=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{array}\right)$ con $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ y $d\neq 0$.

a) Hacemos $F_3=5F_1-F_2\Longrightarrow A=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{array}\right)$.

b) Hacemos $A=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{array}\right)$ con $|A_1|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow$ las tres filas son linealmente independientes.

c) Tomamos la matriz anterior y tenemos:
$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{array}\right)$ $|A_1|=-1\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A_1)=3=$Rango$(A)=$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible determinado.

d) Tomamos la matriz del primer apartado: (Por Gauss)

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-3F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

e) A la matriz anterior le cambiamos el último valor de la tercera fila: (Por Gauss)

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-3F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

Opción B

Problema 1.21.8 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right)$, $I=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right)$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0,5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $BB^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|BB^t| = 0 \Longrightarrow |D| = |ABB^t| = |A||BB^t| = 0$

1.22. Año 2021

1.22.1. Modelo

Opción A

Problema 1.22.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

c) (1 punto) Para $x = 1$, hallar $(AB^t)^3$ y $(AB^t)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $|A| = x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

b) Si $x = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

c) Si $x = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$C = AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I$$

$$C^{2020}=(C^3)^{673}\cdot C=(-I)^{673}\cdot C=-C=-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.22.2 *(2,5 puntos)* Dados la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ a & -3 & a\\ a-1 & -3 & a\end{pmatrix}$ y el vector $B=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a para los que:

a) (1,5 puntos) El sistema $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=B$ no tenga solución.

b) (1 punto) $A=A^{-1}$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0\\ a & -3 & a & 1\\ a-1 & -3 & a & 2\end{array}\right);\quad |A|=3-a=0\Longrightarrow a=3$$

- Si $a\neq 3\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0\\ 3 & -3 & 3 & 1\\ 2 & -3 & 3 & 2\end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1=F_2\\ F_2=F_1\\ F_3\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 3 & 2\end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ 3F_3-2F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 4\end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3+3F_2\end{bmatrix}=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) $A = A^{-1} \Longrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elegimos del producto la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda matriz y tiene que dar uno:

$$a + 9 - 3a = 1 \Longrightarrow a = 4$$

Como sólo da un valor este debe de ser único. Comprobamos que con este valor se cumple el enunciado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.22.3 *(2,5 puntos)* Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:

Si una acción de B cuesta 1 € $\Longrightarrow$ una acción A cuesta 3 € $\Longrightarrow$ una acción C cuesta 6 €.
Sean x el número de acciones de A, y el número de acciones de B y z el número de acciones de C.
Tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ z = \frac{y}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1560 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 360 \\ y = 120 \\ z = 60 \end{array} \right.$$

A cada hermano le corresponderán $\frac{360}{3} = 120$ acciones de A, $\frac{120}{3} = 40$ acciones de B y $\frac{60}{3} = 20$ acciones de C.

Opción B

Problema 1.22.4 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{c} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{array} \right.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array}\right);\quad |A|=3a^2-29a+26=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=\frac{26}{3}$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq \frac{26}{3}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=26/3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 26/3 & -2 & 23/3 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} 3F_1\\ F_2\\ 3F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{array}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 13F_2+F_1\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12\\ 0 & 33 & -55 & 38\\ 0 & -3 & 5 & 30 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 11F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12\\ 0 & 33 & -55 & 38\\ 0 & 0 & 0 & 368 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -6 & 10\\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{array}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -6 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y=4\\ -2x+3y-6z=2\\ -x+y-6z=6 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-16-12\lambda\\ y=-10-6\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

1.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.22.5 *(2,5 puntos)* Dadas las siguientes matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ m & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 0 \end{array}\right)$$

a) (1,25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

b) (0,75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m.

c) (0,5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$.

Solución:

a) $|A| = -m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \ \forall m \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ m & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ m & 1 & -m\\ 1 & -1 & m\end{pmatrix}$$

b) $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = B \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0\\ m & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$ con $|A| = -m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1$

- Si $m \neq -12 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_3\\ F_2\\ F_1\end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1\\ F_2 + F_1\\ F_3\end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3 - F_2\end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

c) Si $m = 2$

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = B \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} y + z = 0\\ 2x + y = 1\\ x + z = 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3\\ y = 1/3\\ z = -1/3\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.22.6 *(2,5 puntos)* Una tienda online de productos gourmet elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a 7,85 euros/kg), el Paradiso (a 13,3 euros/kg) y el Cremissimo (a 24,85 euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90 % de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %.
A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27,1 kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de 3112,5 euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de

grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.
Solución:
Sean x los kg café Gold Cuvée, y los kg café Paradiso y z los kg café Cremissimo.

$$\left\{\begin{array}{c} 7,85x+13,3y+24,85z=3112,5\\ 0,1x+0,15y+0,20z=27,1\\ z=2(x+y)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 157x+266y+497z=62250\\ 2x+3y+4z=542\\ 2x+2y-z=0\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30\\ y=22\\ z=104\end{array}\right.$$

Los kg de tipo Arábica utilizados son $0,9x+0,85y+0,8z=0,9\cdot 30+0,85\cdot 22+0,8\cdot 104=128,9$ kg.

1.22.4. Extrordinaria

Opción A

Problema 1.22.7 *(2,5 puntos)* Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución:

Sean x el número de seguidores de Sara, y el número de seguidores de Cristina y z el número de seguidores de Jimena. Tendremos:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=15000\\ 0,75z=3x\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=\frac{z}{4}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=15000\\ 4x-z=0\\ 10x+4y-5z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2000\\ y=5000\\ z=8000\end{array}\right.$$

Sara tiene 2000 seguidores, Cristina 5000 seguidores y Jimena 8000 seguidores.

Opción B

Problema 1.22.8 *(2,5 puntos)*

a) (0,75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x=1,\ y=2\}$ y $\{x=0,\ y=0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=\lambda-2\\ z=\lambda-1\end{array}\right.$$

c) (0,75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x=1$ e $y=2$.

Solución:

a) Un sistema de ecuaciones lineales o bien tiene solución única o bien tiene infinitas soluciones o bien no tiene solución. Luego el caso que nos ocupa debe de tener infinitas soluciones, como una de ellas tiene que ser $\{x = 0,\ y = 0\}$ las infinitas soluciones buscadas serían:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda = x = \frac{y}{2} \Longrightarrow 2x - y = 0$$

La segunda ecuación del sistema tiene que ser proporcional

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -6x + 3y = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \Longrightarrow \lambda = x = y + 2 = z + 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ x = z + 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

c) Calculamos un sistema con la solución buscada, por ejemplo

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Como el sistema tiene que ser compatible determinado la tercera ecuación tiene que ser irrelevante, hacemos una combinación lineal de las dos, por ejemplo multiplico la segunda por 3 y le sumo la primera. Me queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

1.23. Año 2022

1.23.1. Modelo

Opción A

Problema 1.23.1 *(2,5 puntos)* En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.
Solución:
Sean x número de alumnos de inglés, y número de alumnos de francés y z número de alumnos de alemán.

$$\begin{cases} x = 0,6(x + y + z) \\ y - 10 = z + 10 \\ \frac{x}{4} = 8 + 2(y - z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ y - z = 20 \\ x - 8y + 8z = 32 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 192 \\ y = 74 \\ z = 54 \end{cases}$$

Opción A

Problema 1.23.2 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & a\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ -2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a=1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para $a=2$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=B$.

Solución:

a) $|A|=a^2+a=0\Longrightarrow a=0$ y $a=-1$, para estos valores $\nexists A^{-1}$

b) Si $a=1\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$

c) Si $a=2\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/6 & 1/3 & -1/6\end{pmatrix}$

$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/6 & 1/3 & -1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\\ 2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Geometría

2.1. Año 2000

2.1.1. Modelo

Opción A

Problema 2.1.1 *(2 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (1, a, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

b) (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

c) (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 1)0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = \pm 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Independientes.

Si $a = 0$ o $a = \pm 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Dependientes.

b) si $a = 2$, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base. Luego el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ es combinación lineal de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$. Veamos de que combinación lineal se trata, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (2, 3, 4) \\ \overrightarrow{v} = (2, 1, 2) \\ \overrightarrow{w} = (1, 2, 1) \end{array} \right.$$

$$(3,3,0) = a(2,3,4) + b(2,1,2) + c(1,2,1) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2a+ & 2b+ & c = & 3 \\ 3a+ & b+ & 2c = & 3 \\ 4a+ & 2b+ & c = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{3}{2} \\ \\ b = \dfrac{3}{2} \\ \\ c = 3 \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{c} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{u} + \frac{3}{2}\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$$

c) Si $a = 0$ tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{v} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{w} = (1,0,1) \end{array}\right.$$

Sabemos que $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$. Pero

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0$$

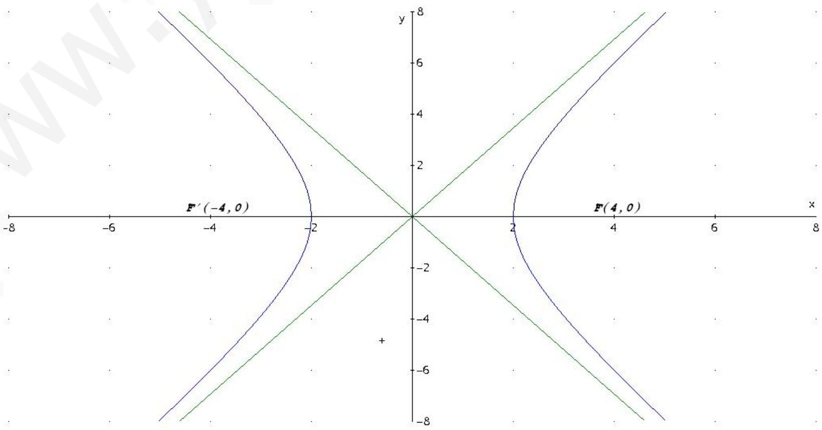
Luego $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$

Problema 2.1.2 *(2 puntos)*

a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4,0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.

b) Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

Solución:



a)
$$d(P,A)=2d(P,r),\quad r:x=1,\quad A(4,0)$$
$$\left\{\begin{array}{l} d(P,A)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}\\ \\ d(P,r)=\dfrac{|x-1|}{1}\end{array}\right.\Longrightarrow (x-4)^2+y^2=4(x-1)^2\Longrightarrow$$
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

b) Se trata de una hipérbola $a^2=4$ y $b^2=12$, como $c^2=a^2+b^2=16\Longrightarrow c=4$. Los focos serían los puntos $F'(-4,0)$ y $F(4,0)$.

Opción B

Problema 2.1.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1,-1,3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1,2,1)$ y $R(1,0,-1)$.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R.

c) (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

Solución:

a) Calculamos la ecuación de la recta r que pasa por Q y R:
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{QR}=(0,-2,-2)\\ Q(1,2,1)\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=2-2\lambda\\ z=1-2\lambda\end{array}\right.$$
$$|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 0&-2&-2\\ 0&-3&2\end{array}\right||=|(-10,0,0)|=10$$
$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|}=\frac{10}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\,u$$

b) Tenemos
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=(0,-3,2)\\ \overrightarrow{QR}=(0,-2,-2)\end{array}\right.$$
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|=5\ u^2$$

c) El plano π que contiene a los puntos P, Q y R es el siguiente
$$\pi:\left|\begin{array}{ccc}0&0&x-1\\ -3&-2&y\\ 2&-2&z+1\end{array}\right|=10(x-1)=0\Longrightarrow\pi:x-1=0$$

- Sean P, Q y R vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{QR} = (1,-1,3) + (0,-2,-2) = (1,-3,1)$
- Sean P, R y Q vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{RQ} = (1,-1,3) + (0,2,2) = (1,1,5)$
- Sean Q, P y R vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{PR} = (1,2,1) + (0,1,-4) = (1,3,-3)$
- Sean Q, R y P vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{RP} = (1,2,1) + (0,-1,4) = (1,1,5)$
- Sean R, P y Q vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{PQ} = (1,0,-1) + (0,3,-2) = (1,3,-3)$
- Sean R, Q y P vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{QP} = (1,0,-1) + (0,-3,2) = (1,-3,1)$

Los puntos S son $(1,-3,1)$, $(1,1,5)$ y $(1,3,-3)$. Todos ellos están contenidos en el plano π

2.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.1.4 *(2 puntos)* Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{x} \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$$

sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".

Solución:

LLamamos $\overrightarrow{x} = (a,b,c) \Longrightarrow (a,b,c) \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-b-c, a+2c, a-2b) = (1,3,5) \Longrightarrow \begin{cases} -b-c = 1 \\ a+2c = 3 \\ a-2b = 5 \end{cases}$$

Como la primera ecuación es el resultado de restar a la tercera la segunda, sólo tendríamos dos ecuaciones, la tercera la obtenemos de $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6} \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 = 6$:

$$\begin{cases} -b-c = 1 \\ a+2c = 3 \\ a^2+b^2+c^2 = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a = 5/3 \\ b = -5/3 \\ c = 2/3 \end{cases}$$

Es decir, $\overrightarrow{x} = (1,-2,1)$ y $\overrightarrow{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Problema 2.1.5 *(2 puntos)*

a) Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

Solución:

a)
$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ -2c = 8 \\ a^2+b^2+c^2-r^2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -4 \\ r = 5 \end{cases}$$

Esfera de centro $(1, -2, -4)$ y radio $r = 5$.

b) Al cortar la esfera con el plano $z = 0$ nos queda la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ a^2+b^2-r^2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ r = 3 \end{cases}$$

Circunferencia de centro $(1, -2, 0)$ y radio $r = 3$.

Opción B

Problema 2.1.6 *(3 puntos)* Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) (1 punto) Obtener la ecuación del plano π.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

Solución:

a) Se trata de un plano mediador. Calculamos punto medio del segmento $\overline{PQ}$ que será $M(2, 1, 0)$ y el vector $\overrightarrow{PQ} = (-12, -24, -16) = -4(3, 6, 4)$.

$$3x + 6y + 4z + \lambda = 0, \;\; 6 + 6 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -12$$

$$\pi : 3x + 6y + 4z - 12 = 0$$

b) Calculamos una recta r perpendicular a π que pase por O y después calculamos el corte de esa recta r y el plano π.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 6, 4) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

$$3(3\lambda) + 6(6\lambda) + 4(4\lambda) - 12 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{12}{61}$$

El punto proyectado es: $O'\left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}\frac{48}{61}\right)$

c) Los puntos de corte son:

Con el eje OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A\,(4, 0, 0)$.

Con el eje OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B\,(0, 2, 0)$.

Con el eje OZ: hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow C\,(0, 0, 3)$.

Los vectores:

$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0)$.

$\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$.

$\overrightarrow{OC} = (0, 0, 3)$.

El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}| = 4\ u^3$$

2.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.1.7 *(3 puntos)* Sea la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2-6x-6y-8z+9 = 0$.

a) (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY.

c) (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencia que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

d) (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.

Solución:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0 \Longrightarrow$ centro $C(3, 3, 4)$ y radio $r = 5$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0, 1, 0) \\ P_t(3, 3, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 \end{array} \right.$$

c) Imponemos $z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ circunferencia de centro $(3, 3, 0)$ y radio $r = 3$

d) Si cortamos la esfera con el eje OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow$

$$(x - 3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 = 25 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow P(3, 0, 0)$$

El vector característico del plano tangente puede ser $\overrightarrow{PC} = (0, 3, 4)$

$$\pi : 3y + 4z + \lambda = 0$$

Como tiene que contener al punto $P \Longrightarrow \lambda = 0$. Luego el plano buscado es $\pi : 3y + 4z = 0$.

Opción B

Problema 2.1.8 *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(1, a, 0)$, $B(1, 1, a - 2)$ y $C(1, -1, a)$.

a) (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\; \forall a \in R$$

Luego no están alineados.

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, a-2) - (1, a, 0) = (0, 1-a, a-2) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -1, a) - (1, a, 0) = (0, -1-a, a) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1-a & a-2 \\ 0 & -1-a & a \end{vmatrix}| = |(-2, 0, 0)| = 2$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 1\, u^2$$

Problema 2.1.9 *(2 puntos)* Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

a) (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

b) (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

Solución:

a) Deben ser $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$ o proporcionales:

$$(m, 4, 2)\lambda = (2, -1, k) \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}, \;\; m = -8, \;\; k = -\frac{1}{2}$$

b) El producto escalar de ambos vectores debe ser igual a cero:

$$2m - 4 + 2k = 0 \Longrightarrow m + k = 2$$

El punto $(1, 0, 1) \in r \subset \pi \Longrightarrow 2 - 0 + k = 0 \Longrightarrow k = -2$ y, por tanto, $m = 4$.

2.2. Año 2001

2.2.1. Modelo

Opción A

Problema 2.2.1 *(3 puntos)* Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abscisa a y Q de abscisa b, (a_1, b), $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

a) (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v.

b) (1 punto) Hallar la relación entre a y b para que las rectas u y v sean perpendiculares.

c) (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

Solución:

a) u tangente en el punto $P(a, a^2/4)$ y v tangente en el punto $Q(b, b^2/4)$. Tenemos $f'(x) = \dfrac{1}{2}x$:

$$m_1 : f'(a) = \frac{1}{2}a, \quad m_2 = f'(b) = \frac{1}{2}b$$

$$\begin{cases} u : y - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{1}{2}a(x-a) \\ \\ u : y - \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{1}{2}b(x-b) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{ab}{4} \end{cases} \Longrightarrow R\left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{4}\right)$$

b)

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \Longrightarrow ab = -4$$

c) Se trata de una parábola vertical cuya directriz es la recta $d : y = -1$. Si $ab = -4 \Longrightarrow R\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{-4}{4}\right) = R\left(\dfrac{a+b}{2}, -1\right) \in d$

Opción B

Problema 2.2.2 *(2 puntos)* Los vértices de un triángulo son $A(-2, -1)$, $B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

a) Calcular el área del triángulo en función de x e y.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x+2, y+1, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (9, 6, 0) \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x+2 & y+1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix} | =$$

$$= \frac{1}{2}|(0, 0, 6x - 9y + 3)| = \frac{3}{2}(2x - 3y + 1)$$

b)

$$\frac{3}{2}(2x-3y+1)=36 \Longrightarrow 2x-3y-23=0$$

Problema 2.2.3 *(2 puntos)* Sea $A(1,1)$ y $B(-1,1)$ dos puntos del plano.

a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.

b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y=x$.

Solución:

a) Los centros de las circunferencias están en la mediatriz que une los dos puntos, es decir, la recta $x=0$. Luego el centro de ellas es de la forma $C(0,a)$ y el radio $r=d(C,A)=\sqrt{a^2-2a+2}$. La ecuación de una circunferencia con este centro y este radio es:

$$x^2+(y-a)^2=a^2-2a+2 \Longrightarrow x^2+y^2-2ay+2a-2=0$$

b) Si la recta $y=x$ es tangente a la circunferencia y el punto de tangencia tiene que ser $A(1,1)$, necesariamente.

Una recta perpendicular a $y=x$ tiene de pendiente $m=-1$.

Construimos una recta con esta pendiente que pase por A:

$$y-1=-(x-1) \Longrightarrow x+y-2=0$$

Esta recta corta a $x=0$ en el punto $(0,2)$, que será el centro de la circunferencia. Y el radio $r=|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{2}$. Luego la circunferencia buscada es

$$x^2+(y-2)^2=2 \Longrightarrow x^2+y^2-2y+2=0$$

2.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.2.4 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi: x+y+x=1$, la recta $r:(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(0,1,1)$, y el punto $P(1,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.

b) (1 punto) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.

c) (1 punto) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Solución:

a) Hallamos un plano perpendicular a r que contenga a P

$$\pi_1: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{\pi_1}}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1) \\ P(1,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow y+z+\lambda=0 \Longrightarrow 1+\lambda=0$$

Como $\lambda = -1 \Longrightarrow \pi_1 : y + z - 1 = 0$.

Ahora encontramos el punto de corte de este plano π_1 con la recta r:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda + \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será $Q\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La recta que buscamos pasa por P y por Q:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1/2, -1/2) \\ P_s = P(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 1/2t \\ z = -1/2t \end{cases}$$

b) El simétrico de P respecto de r será el simétrico de P respecto del punto Q hallado en el apartado anterior:

$$Q = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2Q - P = (1, 0, 1)$$

c) Primero hallamos la ecuación de la recta t perpendicular a π que pasa por P:

$$t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos el punto de corte de esta recta t con el plano π:

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow$$

El punto de corte será $R\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Este punto R es el punto medio entre P y su simétrico P':

$$R = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2R - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Opción B

Problema 2.2.5 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r : x - 2 = \frac{y - 1}{k} = \frac{z + 1}{-2} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

a) (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.

b) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

Solución:

a)

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,k,-2)\\ P_r(2,1,-1)\end{cases}\quad s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,2)\\ P_s(1,2,0)\end{cases}\quad \overrightarrow{P_rP_s}=(-1,1,1)$$

$$\begin{vmatrix}1 & k & -2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow k=-1$$

Si $k=-1$ las dos rectas son coplanarias.

b)

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,-2)\\ P_r(2,1,-1)\end{cases}\quad s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,2)\\ P_s(1,2,0)\end{cases}\quad \overrightarrow{P_rP_s}=(-1,1,1)$$

$$\pi:\begin{vmatrix}1 & 1 & x-1\\ -1 & -1 & y-2\\ -2 & 2 & z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow x+y-3=0$$

c) Calculamos el punto de corte

$$r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-1-2\lambda\end{cases}\quad s:\begin{cases}x=1+\mu\\ y=2-\mu\\ z=2\mu\end{cases}\Longrightarrow \lambda=-\frac{3}{4},\ \mu=\frac{1}{4}$$

El punto es $P\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$.

El vector director de la recta es

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4(1,1,0)$$

$$t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,1,0)\\ P_r(5/4,7/4,1/2)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=5/4+\lambda\\ y=7/4+\lambda\\ z=1/2\end{cases}$$

2.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.2.6 *(2 puntos)* Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Solución:

Llamamos $O(0,0)$, $A(1,1)$ y $P(x,y)$:

$$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{AP}|\Longrightarrow x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0$$

Se trata de una circunferencia de centro $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y radio $r = 2$. Luego el área será: $S = \pi r^2 = 4\pi\, u^2$.

Problema 2.2.7 *(2 puntos)* Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

a) (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

b) (1 punto) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Solución:

a) Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AC}$ tenemos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

b) Volvemos a utilizar la propiedad triangular, para ello cogemos como punto auxiliar el $O(0, 0, 0)$ y el resultado del apartado anterior:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

Luego $C\left(\dfrac{3}{2}, 3, \dfrac{3}{2}\right)$

Opción B

Problema 2.2.8 *(3 puntos)* Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

a) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tatraedro $ABCD$.

b) (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

Solución:

a) Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 3) \end{array}\right.$$

$$S = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-1, -3, 3)| = \frac{\sqrt{19}}{2}\, u^2$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|7| = \frac{7}{6}\, u^3$$

b) Construimos el plano $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \\ A(1,0,0) \end{cases}$

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + 3y - 3z - 1 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|0 + 3 - 9 - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{19}} = \frac{7\sqrt{19}}{19}\, u$$

c) Calculamos las rectas r y s:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \\ A(1,0,0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-1,0,2) \\ B(1,1,1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB} = (0,1,1)$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]| = |\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = 7$$

$$|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = |(2,6,1)| = \sqrt{41}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|}{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7\sqrt{41}}{41}\, u$$

2.3. Año 2002

2.3.1. Modelo

Opción A

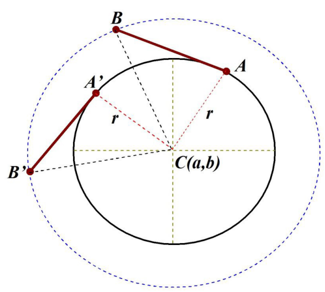
Problema 2.3.1 *(2 puntos)* Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Solución:

a) Veamos un dibujo aproximado:



Como se puede ver en la figura el segmento $\overline{CA} = \overline{CA'} = r$ radio de la circunferencia descrita por el punto A. El segmento $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ya que la varilla suponemos que siempre es del mismo tamaño. El ángulo $\widehat{CAB} = \widehat{CA'B'} = 90^\circ$. Luego los triángulos formados por los puntos ABC y $A'B'C$ son iguales y, por tanto, $\overline{CB} = \overline{CB'}$. En conclusión, el punto B recorre una circunferencia de centro C y radio $R = \overline{CB}$, que sería concéntrica con la dada en el problema.

b) La circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow C(2,1), \quad r = 2$.

$$R = \sqrt{\overline{AB}^2 + r^2} = \sqrt{5}$$

La circunferencia que buscamos es de centro $C(2,1)$ y radio $R = \sqrt{5}$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Problema 2.3.2 *(2 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ P_r(0,0,-1/6) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,a,1) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0,1,1/6)$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{array} \right), \quad |A| = \frac{a+2}{3} = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Si $a = -2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (2,-2,1)$ y además el Rango$(A) = 2$, ya que $\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = -2 \neq 0$, luego las rectas son paralelas.

b) Cuando $a = -2$ hemos visto que las rectas son paralelas, luego

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{53}}{9}$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right|| = |(4/3, 1/3, -2)| = \frac{\sqrt{53}}{3}\, u$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = 3$$

Opción B

Problema 2.3.3 *(3 puntos)* Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

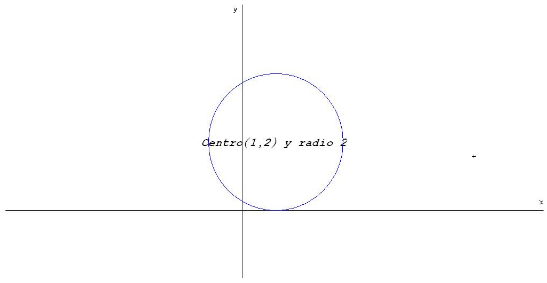
a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

Solución:

a) El centro es $C(1, 2)$ y el radio $r = 2$

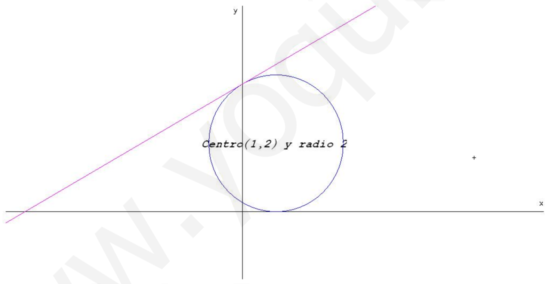


b) Para encontrar el punto hacemos $x = 0 \Longrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0 \Longrightarrow (0, 2 + \sqrt{3})$ y $(0, 2 - \sqrt{3})$. El punto más alejado es: $(0, 2 + \sqrt{3})$

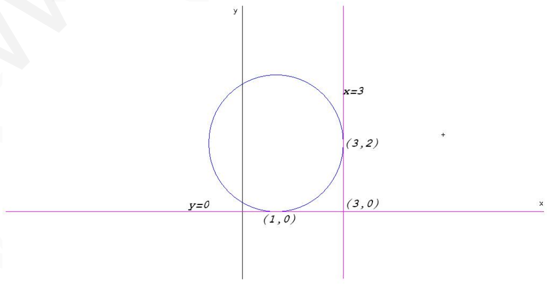
$$2xdx + 2ydy - 2dx - 4dy = 0 \Longrightarrow (2y - 4)dy = -(2x - 2)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2}{2y - 4} \Longrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta tangente es $y - 2 - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \Longrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$



c) El dibujo es:



Una de ellas es el eje de abscisa $y = 0$ y tendrá de punto de tangencia el $(2, 0)$, ya que el punto $(3, 0)$ está en el eje de abscisas. La otra recta tangente que pase por este punto debe de ser $x = 3$, ya que el punto de tangencia es el $(3, 2)$.

2.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.3.4 *(3 puntos)* Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

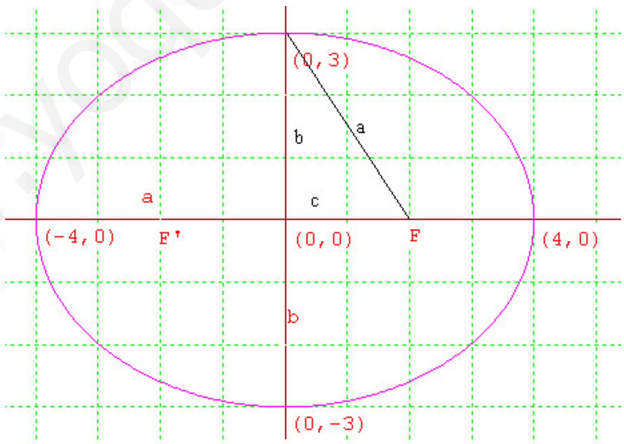
a) (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

a) $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0)$ $F(\sqrt{7}, 0)$
- Vértices: $(-4, 0)$ $(0, 3)$ $(0, -3)$ $(4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.



$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$

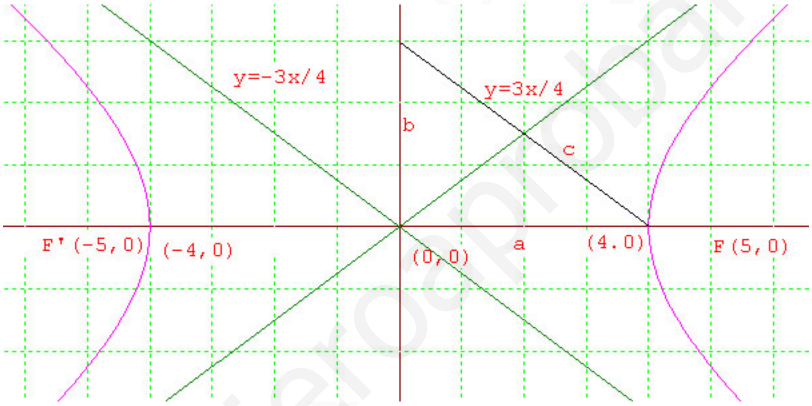
Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

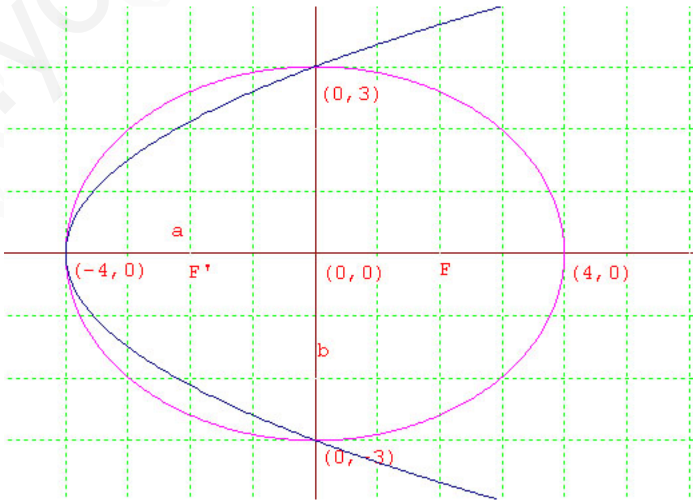
Podemos concluir:

- Focos: $(-5,0) \quad (5,0)$
- Vértices: $(-4,0) \quad (4,0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:

$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$



b) La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abscisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.



Como pasa por el vértice $(-4,0), (0,3), (0,-3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c=-4,\ a=\frac{4}{9}\ y\ b=0 \Longrightarrow x=\frac{4}{9}y^2-4$$

Opción B

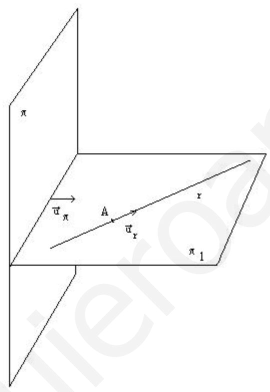
Problema 2.3.5 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Solución:



Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ A(1,-1,0) \end{array}\right. \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ A(1,-1,0) \end{array}\right.$$

La ecuación del plano vendrá dada por:

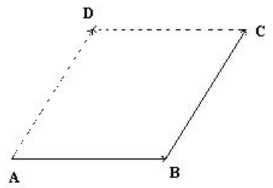
$$\left|\begin{array}{rrc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

Problema 2.3.6 *(2 puntos)* Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

a) (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

b) (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:



a) Los vectores que nos proporciona el problema son: $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 1)$.
Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1, 1, 1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 = 0,\ y_0 = 2\ z_0 = 2$, el punto será $D(0, 2, 2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

b) Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 1, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1 + 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

2.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.3.7 *(3 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{2} \quad s : \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{-1}$$

a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1,0,0)$.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-2,2)\\ P_r(0,1,3)\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(3,1,-1)\\ P_s(2,0,-1)\end{array}\right.\qquad \overrightarrow{P_rP_s}=(2,-1,-4)$$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\begin{vmatrix}2&-1&-4\\1&-2&2\\3&1&-1\end{vmatrix}|=|-35|=35$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&-2&2\\3&1&-1\end{vmatrix}|=|(0,7,7)|=7\sqrt{2}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{35}{7\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) La encontramos como intersección de dos planos y para ello nos apoyamos en el vector perpendicular a ambas rectas $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=(0,7,7)$:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,7,7)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,-2,2)\\ P_r(0,1,3)\end{array}\right.\qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,7,7)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,-1)\\ P_s(2,0,-1)\end{array}\right.\qquad t:\left\{\begin{array}{l}\pi_1\\ \pi_2\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}0&1&x\\7&-2&y-1\\7&2&z-3\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 4x+y-z=-2$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}0&3&x-2\\7&1&y\\7&-1&z+1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 2x-3y+3z=1$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}4x+y-z=-2\\ 2x-3y+3z=1\end{array}\right.$$

c) La encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PP_r}=(-1,1,3)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,-2,2)\\ P(1,0,0)\end{array}\right.\qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PP_s}=(1,0,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,-1)\\ P(1,0,0)\end{array}\right.\qquad t:\left\{\begin{array}{l}\pi_1\\ \pi_2\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}-1&1&x-1\\1&-2&y\\3&2&z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 8x+5y+z=8$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}1&3&x-1\\0&1&y\\-1&-1&z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow x-2y+z=1$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}8x+5y+z=8\\ x-2y+z=1\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 2.3.8 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0,3)$ y $B(0,-1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Solución:

Sea $X(x,y)$ un punto genérico, tendremos:

$$d(A,X) = \sqrt{x^2+(y-3)^2}, \quad d(B,X) = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2} - \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 1$$

$$4x^2 - 60y^2 + 120y - 45 = 0$$

Se trata por definición de una hipérbola.

Problema 2.3.9 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x+y+az = -2; \quad \pi_2 : x+ay+z = -1; \quad \pi_2 : ax+y+z = 3$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & az = & -2 \\ x+ & ay+ & z = & -1 \\ ax+ & y+ & z = & 3 \end{array}\right. \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow |A| = -a^3+3a-2 = 0 \Longrightarrow a = -2, \ a = 1$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = -2$ el Rango$\overline{A}$ =Rango(A) <nº de incógnitas con lo que el sistema es compatible indeterminado, los tres planos tienen infinitos puntos comunes. Como además no son planos coincidentes, tienen por tanto, una recta común.

Si $a = 1$ tenemos que Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1$ y el sistema es incompatible.

b) Si $a = -2$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z = & -2 \\ x- & 2y+ & z = & -1 \\ -2x+ & y+ & z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = -5/3+\lambda \\ y = -1/3+\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

2.4. Año 2003

2.4.1. Modelo

Opción A

Problema 2.4.1 *(3 puntos)* Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano π.

b) (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta r.

Solución:

a) Calculamos una recta perpendicular a π que pase por el punto $M(1,1,1)$:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π:

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) - 2(1-2\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = 1$$

$$M'(2, 2, -1)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M' - M = (4, 4, -2) - (1, 1, 1) = (3, 3, -3)$$

b) Calculamos un plano perpendicular a π que contenga al punto M:

$$2x + 3y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 + 3 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta, para ello ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$2(1+2\lambda) + 3(3\lambda) - (-1-\lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{14}$$

$$M'\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M' - M = 2\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right) - (1, 1, 1) =$$

$$\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7}\right)$$

Opción B

Problema 2.4.2 *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1,1,1),\ \ B(0,-2,2)\ \ C(-1,0,2)\ \ D(2,-1,-2).$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Solución:

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)\quad \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\quad \overrightarrow{AD}=(1,-2,-3)$$

a)

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=\frac{5}{2}u^3$$

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\\ A(1,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1\\ -3 & -1 & y-1\\ 1 & 1 & z-1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$2x+y+5z-8=0$$

$$d(D,\pi)=\frac{|4-1-10-8|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{15}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{2}\ u$$

c)

$$r=\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,5)\\ D(2,-1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=2+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=-2+5\lambda\end{array}\right.$$

2.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.4.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$$

$$s:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

a) (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

b) (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,-2,1) \\ P_r(2,1,0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,-1,2) \\ P_s(-1,-2,1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array} \right| = -3i - 4j + k = (-3,-4,1)$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,-2,1) - (2,1,0) = (-3,-3,1)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \left| \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{array} \right| = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

b)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,-2,1) \\ \overrightarrow{u} = (-3,-4,1) \\ P_r(2,1,0) \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,-1,2) \\ \overrightarrow{u} = (-3,-4,1) \\ P_s(-1,-2,1) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.4.4 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

Solución:

a) Datos:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,-1) \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (6,2,1) \\ P_r(-2,1,0) \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

b)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \dfrac{5}{2} \cdot \lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

2.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.4.5 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Solución:

$\overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1,2,-1)$

$$\pi' \equiv \left| \begin{array}{rrr} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y-2 \\ -1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x + y - 2 = 0$$

Problema 2.4.6 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s : \left\{ \begin{array}{llll} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j + 3k = (-1, 2, 3)$$

Si en la recta s hacemos $x = 0$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con el resultado de $y = -2$ y $z = 1$, luego un punto de la recta sería $P_s(0, -2, 1)$.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, -1, k) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 2, 3) \\ P_s(0, -2, 1) \end{array} \right.$$

El plano π que buscamos contiene a las dos rectas:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 2, 3) \\ P_r(1, -1, k) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 3 & z-k \end{vmatrix} = 0$$

$$-x - 2y + z - 1 - k = 0 \Longrightarrow x + 2y - z + 1 + k = 0$$

Como este plano contiene al punto $P_s(0, -2, 1)$ sustituimos en el plano

$$0 - 4 - 1 + 1 + k = 0 \Longrightarrow k = 4$$

b) El plano buscado es:

$$x + 2y - z + 5 = 0$$

Opción B

Problema 2.4.7 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

b) (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1 + t \\ y = & 2t \\ z = & -1 + 2t \end{array} \right.$$

$$1 + t + 2t - 1 + 2t = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow Q(1, 0, -1)$$

b) Calculamos una esfera de centro Q y radio 2: $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$; esta esfera corta a la recta r en dos puntos Q' y Q'':

$$t^2+4t^2+4t^2=4 \Longrightarrow t=\pm\frac{2}{3}$$

Si $t=\frac{2}{3} \Longrightarrow Q'\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π':

$$\frac{5}{3}+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{8}{3}$$

$$\pi' : x+y+z-\frac{8}{3}=0$$

Si $t=-\frac{2}{3} \Longrightarrow Q''\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{7}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π'':

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{7}{3}+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{10}{3}$$

$$\pi' : x+y+z-\frac{10}{3}=0$$

2.5. Año 2004

2.5.1. Modelo

Opción A

Problema 2.5.1 *(3 puntos)* Dado el plano:

$$\pi : x+y+az+1=0$$

y las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=t\\ z=t\end{array}\right. \quad r':\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=2t\\ z=t\end{array}\right. \quad r'':\left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=3t\\ z=t\end{array}\right.$$

Se pide:

a) Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).

b) Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).

c) Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

Solución:

a) Sea A el punto de corte de r con π:

$$1+t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{2}{a+1} \Longrightarrow A\left(1,-\frac{2}{a+1},-\frac{2}{a+1}\right)$$

Sea A' el punto de corte de r' con π:

$$2+2t+at+1=0 \Longrightarrow t=-\frac{2}{a+2} \Longrightarrow A'\left(2,-\frac{6}{a+2},-\frac{3}{a+2}\right)$$

Sea A'' el punto de corte de r'' con π:

$$3+3t+at+1=0\Longrightarrow t=-\frac{4}{a+3}\Longrightarrow A''\left(3,-\frac{12}{a+3},-\frac{4}{a+3}\right)$$

$$\overrightarrow{AA'}=\left(1,-\frac{4a+2}{(a+1)(a+2)},-\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}\right)$$

$$\overrightarrow{A'A''}=\left(1,-\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)},-\frac{a-1}{(a+3)(a+2)}\right)$$

Para que estén alineados los tres puntos:

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A'A''}\Longrightarrow\frac{4a+2}{(a+1)(a+2)}=\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)}\Longrightarrow a=0\quad a=1$$

Si $a=0$:

$$\overrightarrow{AA'}=(1,-1,1/2)\neq\overrightarrow{A'A''}=(1,-1,-1/6)$$

Esta solución no vale.

$a=1$:

$$\overrightarrow{AA'}=(1,-1,0)=\overrightarrow{A'A''}$$

Luego cuando $a=1$ los tres puntos están alineados.

b) La recta h que une estos puntos:

$$h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}=(1,-1,0)\\ A(1,-1,-1)\end{array}\right.\Longrightarrow h:\left\{\begin{array}{l}x=1+t\\ y=-1-t\\ z=-1\end{array}\right.$$

c)

$$d(O,h)=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{u_h}|}{|\overrightarrow{u_h}|}=\frac{|(1,-1,-1)\times(1,-1,0)|}{|(1,-1,0)|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\,u^2$$

Opción B

Problema 2.5.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\ 2x-z+1=0\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}2x-z+2=0\\ 2y-mz=6\end{array}\right.$$

a) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1+2\lambda\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}x=-1+\lambda\\ y=3+m\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(0,-2,1)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,m,2)\\ P_s(-1,3,0)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,5,-1)$$

$$\left|\begin{array}{rrr}1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & m & 2\end{array}\right| = -1+m=0 \Longrightarrow m=1$$

Cuando $m=1$ los vectores directores de las rectas r y s coinciden, luego para este valor las rectas son paralelas.

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(1,1,2)\\ \overrightarrow{v}=(-1,5,-1)\\ P(0,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{rrr}1 & -1 & x\\ 1 & 5 & y+2\\ 2 & -1 & z-1\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow 11x+y-6z+8=0$$

Problema 2.5.3 *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=5+3\lambda\end{array}\right.$$

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,3)\\ P_r(3,4,5)\end{array}\right.$$

Un plano perpendicular a esta recta y que contenga al punto P será:

$$\pi: 2x+y+3z+\lambda=0 \Longrightarrow 6-1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-5$$

$$\pi: 2x+y+3z-5=0$$

Este plano corta a la recta r en el punto P':

$$2(3+2\lambda)+4+\lambda+3(5+3\lambda)-5=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{10}{7}$$

$$P'\left(-\frac{1}{7},\frac{18}{7},\frac{5}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{P'P}=(3,-1,0)-\left(-\frac{1}{7},\frac{18}{7},\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{22}{7},-\frac{25}{7},-\frac{5}{7}\right)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P'P}=\left(\frac{22}{7},-\frac{25}{7},-\frac{5}{7}\right)\\ P(3,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=3+\dfrac{22}{7}\lambda\\ y=-1-\dfrac{25}{7}\lambda\\ z=-\dfrac{5}{7}\lambda\end{array}\right.$$

2.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.5.4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{array}\right. ;\quad \pi_1: 2-3x+2y-z=0;\quad \pi_2: 3+2x+2y-2z=0$$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

Solución:

a)

$$r: \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-4=-3y+3 \\ -x+2=-3z+12 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-7=0 \\ x-3z+10=0 \end{array}\right.$$

Primero estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_1: 3x-2y+z-2=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right);\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A|=-4\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ La recta corta al plano π_1.

Ahora estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_2: 2x+2y-2z+3=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right);\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A|=0$ y como $\left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{array}\right|=-3\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=2$.

Por otra parte tenemos que

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & -2 & -2 \end{array}\right|=36\neq 0\Longrightarrow\text{Rango}(\overline{A})=3.$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) $-\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{2}{2}\Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.

c) Un punto de r es $P_r(2,1,4)$ y tendremos:

$$d(P_r,\pi_2)=\frac{|2\cdot 2+1\cdot 2-2\cdot 4+3|}{\sqrt{4+4+4}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Opción B

Problema 2.5.5 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz = & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z = & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z = & -k \end{array}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Solución:

a) Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -k \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -3k^2 - 5k + 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{3} \\ \\ k = -2 \end{cases}$$

Si $k \neq \dfrac{1}{3}$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado$\Longrightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = \dfrac{1}{3}$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 1/3 \end{array}\right| = -\frac{7}{3} \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Por otra parte tenemos

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1/3 & 3 \\ 1/3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1/3 \end{array}\right| = -\frac{224}{27} \neq 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. En este caso tenemos que comparar los planos dos a dos:

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2: \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1/3} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3: \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1} \Longrightarrow \text{se cortan} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3: \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1} = \dfrac{-1}{-3} \neq \dfrac{-1}{-1/3} \Longrightarrow \text{son paralelos} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Dos planos son paralelos (π_2 y π_3) y otro plano corta a los dos (π_1).

Si $k = -2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -7 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(A) = 2$, y si observamos la matriz $\overline{A}$ la tercera fila es la suma de las anteriores y, por tanto, Rango$(\overline{A}) = 2$. Concluimos con que el sistema es Compatible Indeterminado; comparando los planos se compruebo que no hay coincidentes y concluyo con que se cortan los tres en una recta.

b) Puedo definir esta recta como intersección de dos de estos planos $r : \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & 2z = & 3 \\ x- & 2y- & z = & -1 \end{array}\right.$ y su vector director será:

$$\overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right| = (-7, 0, -7)$$

2.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.5.6 *(3 puntos)* Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Solución:

a) Calculo r, recta perpendicular a π que pasa por $P(0, 0, 0)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, 3) \\ P(0, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{array}\right.$$

Esta recta cortará con el plano π en el punto P'':

$$t + 2(2t) + 3(3t) = 6 \Longrightarrow t = \frac{3}{7} \Longrightarrow P''\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

El punto simétrico P' de P tendrá por punto medio a P'', es decir:

$$P'' = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

El punto simétrico de $P(0, 0, 0)$ respecto al plano π es $P'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

b)

$$\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{u} = (0, 0, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow 2x - y = 0$$

c) Los puntos de corte de π con los ejes será:

Corte con el eje OX: $y=0,\ z=0 \Longrightarrow x=6 \Longrightarrow A(6,0,0)$
Corte con el eje OY: $x=0,\ z=0 \Longrightarrow y=3 \Longrightarrow B(0,3,0)$
Corte con el eje OZ: $x=0,\ y=0 \Longrightarrow z=2 \Longrightarrow C(0,0,2)$

Tendremos: $\overrightarrow{OA}=(6,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,3,0)$, $\overrightarrow{OC}=(0,0,2)$:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6\,u^3$$

Opción B

Problema 2.5.7 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z=0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x-y+2z=4$.

b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Solución:

a) Un punto del plano $z=0$ será $P(x,y,0)$

$$d(P,\pi)=\frac{|2x-y-4|}{\sqrt{4+1+4}}=3 \Longrightarrow |2x-y-4|=9 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x-y- & 13=0\\ 2x-y+ & 5=0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen esta condición serán las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} 2x-y-13=0\\ z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{13}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=0 \end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} 2x-y+5=0\\ z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=0 \end{array}\right.$$

b) El conjunto será:

$$\left\{(x,y,z)\in R^3:(x,y,z)\in ro(x,y,z)\in s\right\}$$

Problema 2.5.8 *(2 puntos)* El plano $\pi: 2x-2y+z=-2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Solución:

a)

$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$$

b)

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,-2,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

c) Corte con el eje OX: $y=0,\ z=0 \Longrightarrow x=-1 \Longrightarrow A(-1,0,0)$
Corte con el eje OY: $x=0,\ z=0 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow B(0,1,0)$
Corte con el eje OZ: $x=0,\ y=0 \Longrightarrow z=-2 \Longrightarrow C(0,0,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(0,0,-2)-(-1,0,0)=(1,0,-2)$
$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(-1,0,0)=(1,1,0)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(2,-2,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{4+4+1}}{2}=\frac{3}{2}\ u^2$$

2.6. Año 2005

2.6.1. Modelo

Opción A

Problema 2.6.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1,1,1)$, $B(1,-3,-1)$ y $C(1,0,3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r: x-1=\frac{y-1}{-1}=z-1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

$$D(1+\lambda,1-\lambda,1+\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB}=(2,-4,-2),\quad \overrightarrow{AC}=(2,-1,2),\quad \overrightarrow{AD}=(2+\lambda,-\lambda,\lambda)$$

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2+\lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}|=\frac{2}{3}|\lambda-5|=2$$

$$|\lambda-5|=3$$

$$\lambda-5=3 \Longrightarrow \lambda=8 \Longrightarrow D\,(9,-7,9)$$

$$\lambda-5=-3 \Longrightarrow \lambda=2 \Longrightarrow D\,(3,-1,3)$$

Opción B

Problema 2.6.2 *(3 puntos)* Se considera la recta: $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s : \begin{cases} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

b) (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,2) \\ P_r(0,4,5) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,3,1) \\ P_s(5-5m, 7-3m, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (5-5m, 3-3m, -5)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5-5m & 3-3m & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Cuando $m = 2$ el Rango$(A) = 2$, y además el Rango$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

b) Si $m = 0$ las dos rectas se cruzan, ya que $|A| \neq 0$ y tenemos que

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,3,1) \\ P_s(5,7,0) \end{cases}$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-30|}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{2}$$

2.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.6.3 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\begin{cases} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a P es igual 3.

Solución:

a) Se trata de la ecuación de una esfera

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2=0$$

b) Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

$$(3\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1-4\lambda)^2-2(3\lambda)-6(1+\lambda)+2(1-4\lambda)+2=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 26\lambda(\lambda-1)=0 \Longrightarrow \lambda=1,\ \ \lambda=0$$

Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

Para $\lambda=0 \Longrightarrow (0,1,1)$ y para $\lambda=1 \Longrightarrow (3,2,-3)$.

Opción B

Problema 2.6.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4} \quad s: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

Solución:

a)

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{array}\right. \quad s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right|=(10,0,-5)$$

Para la construcción de la recta podemos poner $\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)$, ya que el módulo de este vector no influye.

Construimos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{array}\right. \quad \pi_1: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{array}\right.$$

$$\pi_1: \left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 0 & y-1 \\ 4 & -1 & z-1 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow 3x-10y+6z+1=0$$

$$\pi_2: \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & x+1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 2 & -1 & z \end{array}\right|=0 \Longrightarrow x+5y+2z-9=0$$

$$t: \left\{\begin{array}{rrl} 3x- & 10y+ & 6z+1=0 \\ x+ & 5y+ & 2z-9=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right| = |\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}| = |-15|$$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2+5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,2,0) - (1,1,1) = (-2,1,-1)$$

2.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.6.5 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{array}{l} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda-2)y + (\lambda+2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda+1)x - (\lambda+6)z = -\lambda \end{array}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & \lambda \\ 4x+ & (\lambda-2)y+ & (\lambda+2)z = & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1)x- & & (\lambda+6)z = & -\lambda \end{array}\right.$$

La matriz asociada a este sistema será

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) & -\lambda \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3\lambda+8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \ \ \lambda = -\frac{8}{3}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -\frac{8}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ el sistema es compatible determinado, el sistema tiene, por tanto, solución única y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -56$$

El sistema es incompatible, y si comparamos plano a plano tenemos

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{4} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ paralelos} \\ \frac{1}{6} \neq \frac{1}{-8} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \\ \frac{4}{6} \neq \frac{4}{-8} \Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}$$

Si $\lambda = -\frac{8}{3}$ el sistema es incompatible, ya que Rango$(\overline{A}) = 3$, ahora vamos a comparar plano a plano en el sistema de la matriz asociada

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4} \neq \frac{0}{-14/3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan
$\frac{1}{-10/3} = \frac{1}{-10/3} \neq \frac{-8/3}{8/3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_3 son paralelos
$\frac{4}{-10/3} \neq \frac{-14/3}{0} \Longrightarrow \pi_2$ y π_3 se cortan

Problema 2.6.6 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 3 \\ x+ & y & -z & = 0 \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & & z & = 4 \\ 2x- & y & & = 7 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -3, -3) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -2, -1) \\ P_s(0, -7, -4) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (1, 1, 2), \quad \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = (-1, -2, -1)$$

a)

$$\overrightarrow{u_t} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{array} \right| = (3, -1, -1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -1, -1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) Sustituimos t en s y tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + \lambda = 4 \\ 6\lambda + \lambda = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda = 1$$

El punto de corte será $(3, -1, -1)$.

Opción B

Problema 2.6.7 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m - 2)y + 3(m + 1)z + (m + 1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

a) (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.

c) (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z+ & 1=0\\ - & y+ & z+ & 1=0\end{array}\right.$$

Solución:

a) Basta dar dos valores a m que sean distintos:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} m=0\Longrightarrow & - & 2y & +3z+1= & 0\\ m=-1\Longrightarrow & -x- & 3y & = & 0\end{array}\right.$$

La intersección de estos dos planos sería la recta pedida, que en forma paramétrica

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{array}\right|=(9,-3,-2),\ \ P_r(-6,2,1)\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-6+9\lambda\\ y=2-3\lambda\\ z=1-2\lambda\end{array}\right.$$

b) Sustituyendo este punto en la familia tenemos

$$m+(m-2)+m+1=0\Longrightarrow m=\frac{1}{3}$$

El plano buscado será

$$\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}-2\right)y+3\left(\frac{1}{3}+1\right)z+\left(\frac{1}{3}+1\right)=0\Longrightarrow x-5y+12z+4=0$$

c)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{array}\right|=(-2,-1,-1)\\ \\ P_r(1,2,1)\end{array}\right.$$

Los vectores $(m,m-2,3m+3)$ y $(-2,-1,-1)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que ser cero

$$-2m-m+2-3m-3=0\Longrightarrow m=-\frac{1}{6}$$

Sustituyendo

$$-\frac{1}{6}x+\left(-\frac{1}{6}-2\right)y+3\left(-\frac{1}{6}+1\right)z+\left(-\frac{1}{6}+1\right)=0\Longrightarrow x+13y-15z-5=0$$

2.7. Año 2006

2.7.1. Modelo

Opción A

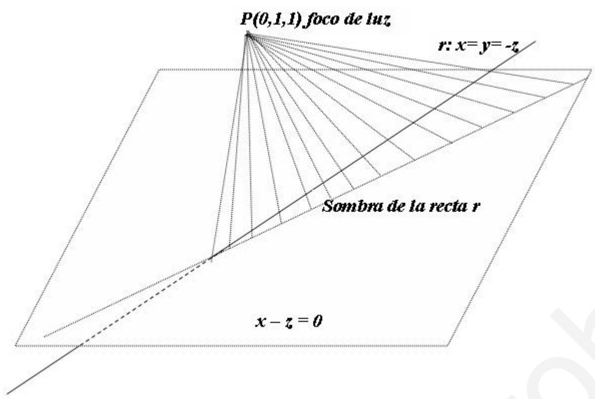
Problema 2.7.1 *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x=y=-z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Solución:



$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{array} \right.$$

El plano que contiene a P y a r será:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x - y + z = 0$$

La proyección de r será la intersección de los planos π_1 y π:

$$s : \left\{ \begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

El corte con el plano $z = 1$ será $z = \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; y = 3 \Longrightarrow (1, 3, 1)$

Problema 2.7.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y - 6}{1} = \frac{z - 5}{2} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 6, 5) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 0) \\ P_s(3, -4, 0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 2, 2) = 2(-3, 1, 1)$$

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-3, 1, 1) \\ P_t(2, -1, 1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Opción B

Problema 2.7.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \qquad s : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 1) \\ P_r(-1, -2, -3) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -2) \\ P_s(0, -1, 2) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 3 & -1 & x+1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z+3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 5y - 4z - 19 = 0$$

b)

$$d(P_s, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{11\sqrt{2}}{5}$$

2.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.7.4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2, 2, -4) \\ P_r(-1, 2, 0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1) \\ P_s(2, -1, -2) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{OP_r} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OP_s} = (2, -1, -2)$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right. \qquad t : \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} -1 & -2 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ 0 & -4 & z \end{array} \right| = 0, \quad \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & x-2 \\ -1 & 1 & y+1 \\ -2 & 1 & z+2 \end{array} \right| = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{array} \right.$$

b)

$$\overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right| = 2(3, -5, -4)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{array} \right. \qquad t : \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right.$$

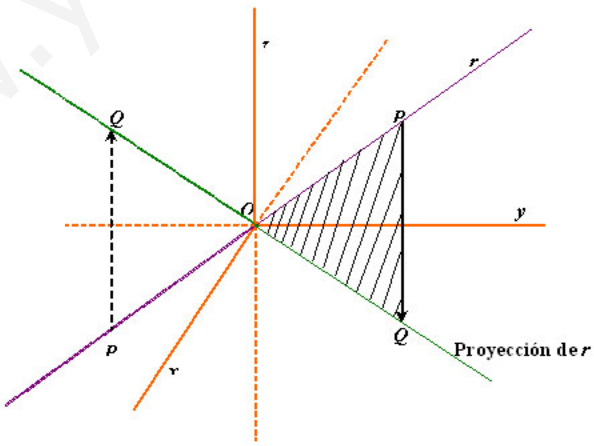
$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 3 & -2 & x+1 \\ -5 & 2 & y-2 \\ -4 & -4 & z \end{array} \right| = 0, \quad \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 3 & 3 & x-2 \\ -5 & 1 & y+1 \\ -4 & 1 & z+2 \end{array} \right| = 0$$

$$h : \left\{ \begin{array}{l} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.7.5 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Solución:



$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (4,3,1) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Un punto de esta recta será: $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$, y su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $P(4\lambda, 3\lambda, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ forman el triángulo OPQ, para calcular el área calculamos el producto vectorial de estos dos vectores

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{vmatrix} = (-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = \frac{5\lambda^2}{2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Si $\lambda = \sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(4\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Si $\lambda = -\sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Problema 2.7.6 *(2 puntos)* Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3,4,1) \\ P_r(-4,7,0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3,-4,-1) \\ P_s(1,2,0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (5,-5,0)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Luego las rectas son paralelas.

2.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.7.7 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

Solución:

a) $d(A, X) = d(B, X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

$$2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Se trata de un plano que se llama mediador.

b) $d(A, B) = d(A, X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2 = 0$$

Se trata de una esfera

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ como C es un punto del plano $x + y + z = 3$ tendrá de coordenadas $C(3 - \mu - \lambda, \mu, \lambda)$. Luego:

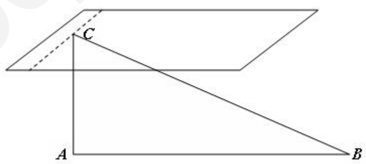
$$\overrightarrow{AC} = (3 - \mu - \lambda, \mu, \lambda) - (0, 1, 0) = (3 - \mu - \lambda, \mu - 1, \lambda)$$

$$(3 - \mu - \lambda, \mu - 1, \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 3 - \mu - \lambda - \mu + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \mu = 2$$

Luego los puntos de ese plano con la condición de perpendicularidad con el vector $\overrightarrow{AB}$ serán:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Se trata de una recta.



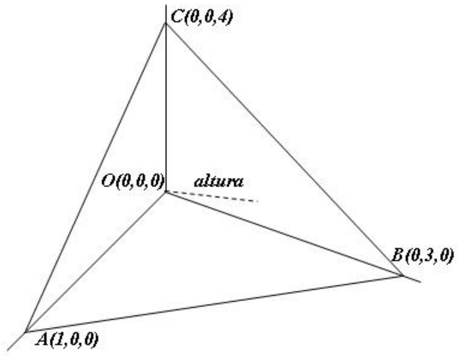
Opción B

Problema 2.7.8 *(3 puntos)* Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, \lambda, 0)$ y $C(0, 0, 4)$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.

b) (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado 1.), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.

Solución:



a)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(1,0,0)\\ \overrightarrow{OB}=(0,\lambda,0)\\ \overrightarrow{OC}=(0,0,4)\end{array}\right. \Longrightarrow V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}0&0&4\\0&\lambda&0\\1&0&0\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-4\lambda|=2\Longrightarrow$$

$$\frac{4\lambda}{6}=2\Longrightarrow\lambda=3$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-1,0,4)\\ \overrightarrow{AB}=(-1,3,0)\\ A(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}-1&-1&x-1\\0&3&y\\4&0&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi:12x+4y+3z-12=0$$

$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-12|}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}}=\frac{12}{13}\ u$$

Otra forma de resolver el problema sería:

$$S_{\text{base}}=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\-1&0&4\\-1&3&0\end{array}\right||=\frac{|(-12,-4,-3)|}{2}=\frac{13}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{base}}\cdot h\Longrightarrow 2=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{2}\cdot h\Longrightarrow h=\frac{12}{13}\ u$$

2.8. Año 2007

2.8.1. Modelo

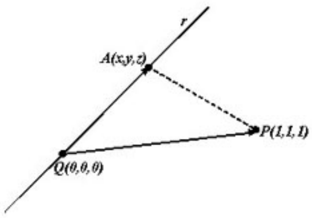
Opción A

Problema 2.8.1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{c}x-y=0\\x+2y+3z=0\end{array}\right.$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Solución:

Un punto $A(x,y,z)$ de la recta sería

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow A(\lambda,\lambda,-\lambda)$$



$$\overrightarrow{QA}=(\lambda,\lambda,-\lambda), \quad \overrightarrow{QP}=(1,1,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right||=\frac{1}{2}|(2\lambda,-2\lambda,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=1$$

Luego: $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Problema 2.8.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x+y-z=2$.

b) (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \quad \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1) \\ \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{array}\right|=0 \Longrightarrow x-y+z-2=0$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z-2=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{2}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 2.8.3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1,0,1)$ y la recta:

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

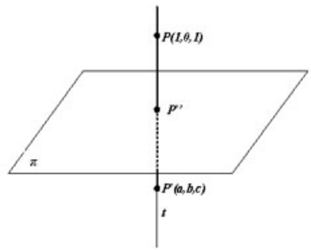
y el plano $\pi: x+y+z=0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

Solución:

a) Sería el siguiente dibujo



Calculamos primero el punto P'' corte de la recta t y el plano π, donde t es una recta perpendicular a π y que pasa por P.

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,1,1) \\ P_t(1,0,1) \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

P'' es el punto medio entre P y P'

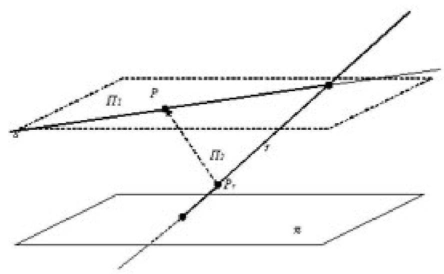
$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

b) Encontramos la recta como intersección de dos planos:

El plano π_1 es paralelo a π y contiene a P

El plano π_2 contiene a P y a r

Sería el siguiente dibujo



$\pi_1: x+y+z+\lambda=0$ y como contiene a $P \Longrightarrow 1+0+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow \pi_1:$ $x+y+z-2=0$

$$\pi_2: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-1)\\ \overrightarrow{PP_r}=(0,0,-2)\\ P(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1\\ 2 & 0 & y\\ -1 & -2 & z-1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow 2x-y-2=0$$

$$t: \left\{\begin{array}{l} x+y+z-2=0\\ 2x-y-2=0\end{array}\right. \Longrightarrow t: \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\lambda\\ y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

2.8.2. Ordinaria

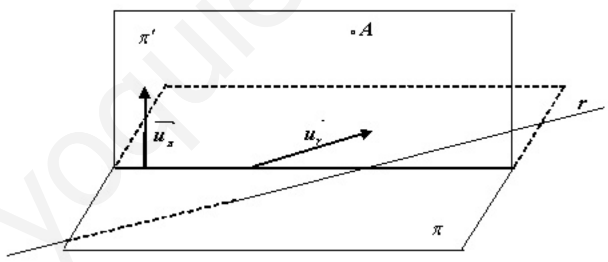
Opción A

Problema 2.8.4 *(3 puntos)* Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x+y+1=0\\ z=0\end{array}\right.$ y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:

a) (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

Solución:

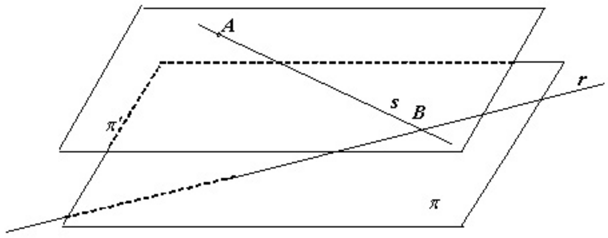


a)

$$r: \left\{\begin{array}{l} x+y+1=0\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)\\ P_r(-1,0,0)\end{array}\right.$$

$$\pi: x-2y-3z+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,-3)$$

$$\pi': \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & x-1\\ 1 & -2 & y+2\\ 0 & -3 & z+3\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': 3x+3y-z=0$$



b)

Construyo un plano π' paralelo a π que contenga a A:

$$x - 2y - 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + 4 + 9 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -14$$

$$\pi' : x - 2y - 3z - 14 = 0$$

Corto con este plano a la recta r y obtengo el punto B:

$$-1 - \lambda - 2\lambda - 14 = 0 \Longrightarrow \lambda = -5 \Longrightarrow B\,(4, -5, 0)$$

La recta que buscamos pasa por A y B:

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, 3) = 3(1, -1, 1)$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, -2, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.8.5 *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

a) (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

Solución:

a)

$$\left| \begin{array}{ccc} \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda + 2 \end{array} \right| = -2(\lambda^2 + 2\lambda + 4) \neq 0 \text{ Siempre} \Longrightarrow \text{No están alineados}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (\lambda - 2, \lambda, \lambda + 2) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \\ |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3\lambda^2 + 8} \end{array} \right.$$

El triángulo que forman los puntos tiene dos lados iguales y otro desigual, se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

c)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,2) \\ A(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1,-1,0) \\ \overrightarrow{v} = (0,-1,1) \\ P(0,2,0) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x \\ -1 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + z - 2 = 0$$

$$d(O,\pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u^2$$

2.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.8.6 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right. \quad \text{un punto de } r \text{ es } P(3+\lambda, 5+\lambda, z = -1+\lambda)$$

$$d(P,\pi) = \frac{|2(3+\lambda) - (5+\lambda) + 2(-1+\lambda) + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = |\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Los puntos buscados son:

$$P_1(4,6,0), \quad P_2(2,4,-2)$$

Problema 2.8.7 *(2 puntos)* Sea consideran las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{c} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = (1,1,2), \quad \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = -(1,2,1)$$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right| = (-3,1,1) \quad t : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{y-2}{1}$$

Opción B

Problema 2.8.8 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2},\quad s:\left\{\begin{array}{l} x-3y-5=0\\ x-3z-8=0\end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,0)\\ P_r(0,1,2)\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -3 & -5\\ 1 & -3 & -8\end{array}\right|=3(3,1,1)$$

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & x\\ -1 & 1 & y-1\\ 2 & 1 & z-2\end{array}\right|=-3x+5y+4z-13=0$$

$$\pi:3x-5y-4z+13=0$$

b) Elegimos un punto de la recta s por ejemplo $P_s(2,-1,-2)$

$$d(P_s,\pi)=\frac{|6+5+8+13|}{\sqrt{9+25+16}}=\frac{32}{\sqrt{50}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}\ u$$

2.9. Año 2008

2.9.1. Modelo

Opción A

Problema 2.9.1 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

a) (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

b) (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r:\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(1,1,-4)-(1,0,2)=(0,1,-6)$.

$$P=(1,0,2)+\frac{1}{3}(0,1,-6)=\left(1,\frac{1}{3},0\right)$$

$$Q=(1,0,2)+\frac{2}{3}(0,1,-6)=\left(1,\frac{2}{3},-2\right)$$

b)

$$\pi : y - 6z + \lambda = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

El plano buscado será: $\pi : 3y - 18z - 1 = 0$

c)

$$r : \begin{cases} x = & 3 - 2\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow 3\lambda - 18(-1+\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{17}{15}$$

Luego el plano y la recta se cortan en el punto:

$$\left(3 - 2\frac{17}{15}, \frac{17}{15}, -1 + \frac{17}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

Opción B

Problema 2.9.2 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2), \ \ P_r(0, -3, 0) \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$P(\lambda, -3 - \lambda, -2\lambda), \quad \pi : 3x + 4y = 4$$

$$d(P, \pi) = \frac{|3\lambda + 4(-3 - \lambda) - 4|}{5} = \frac{1}{3} \Longrightarrow |-\lambda - 16| = \frac{5}{3} \Longrightarrow |\lambda + 16| = \frac{5}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\lambda + 16 = \frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{43}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{43}{3}, -\frac{52}{3}, \frac{86}{3}\right)$$

$$\lambda + 16 = -\frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{53}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{53}{3}, -\frac{62}{3}, \frac{106}{3}\right)$$

Problema 2.9.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k+1, k)$ y $C(k+1, 4, 3)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

b) (1 punto) Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2k+1, k) - (1, 3, -2) = (1, 2k - 2, k + 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (k + 1, 4, 3) - (1, 3, -2) = (k, 1, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow k + 2k - 2 + 5k + 10 = 0 \Longrightarrow k = -1$$

b) Si $k = 0$:

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 5)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}| = |(-12, -5, 1)| = \frac{\sqrt{170}}{2}\, u^2$$

2.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.9.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-a, -1, a) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Se cruzan.

Si $a = 0$:

$$(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ se cortan.

b) Si $a = 1$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -1, 1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases} \quad , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |(0, 2, 2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Opción B

Problema 2.9.5 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π.

Solución:

a) Construimos los vectores:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3)\\ \overrightarrow{AD}=(1,2,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{array}\right| = 7 \neq 0 \Longrightarrow$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3)\\ A(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ -2 & -3 & z-1\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 2x+3y+z-1=0$$

c)

$$d(D,\pi)=\frac{|2+6-1|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Problema 2.9.6 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi: 3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.

c) (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2,-1)\\ P_r(1,2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1+3\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=3-\lambda\end{array}\right.$$

b)

$$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)-(3-\lambda)+10=0 \Longrightarrow \lambda=-1$$

Luego el punto buscado es el $Q(-2,0,4)$ (Sustituyendo el valor de λ en la recta r.

c) Cuando el plano π corta al eje OY tendremos que $x = 0$ y $z = 0$, luego $2y + 10 = 0 \Longrightarrow y = -5$. El punto buscado es $R(0, -5, 0)$.

d) Construyo los vectores $\overrightarrow{RQ} = (-2, 5, 4)$ y $\overrightarrow{RP} = (1, 7, 3)$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-13, 10, -19)| = \frac{3\sqrt{70}}{2}$$

2.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.9.7 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P, S) = 2\text{dist}(Q, S)$, donde "dist" significa distancia.

Solución:

a) Sea $R(x, y, z)$:

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Longrightarrow |(x-1, y-1, z-3)| = |(x, y-1, z)| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} \Longrightarrow x + 3z - 5 = 0$$

Se trata, por tanto, de un plano.

b) La recta

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{QP} = (1, 0, 3) \\ Q(0, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow S(\lambda, 1, 3\lambda)$$

$$|\overrightarrow{PS}| = 2|\overrightarrow{QS}| \Longrightarrow |(\lambda - 1, 0, 3\lambda - 3)| = 2|(\lambda, 0, 3\lambda)|$$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (3\lambda)^2} \Longrightarrow (\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2 = 4(\lambda^2 + (3\lambda)^2)$$

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Los puntos buscados serán:

$$S_1(-1, 1, -3) \text{ y } S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$$

Problema 2.9.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,3)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,3,4)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right.$$

$$u_t=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=(-1,2,-1)$$

Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(-1,2,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,2,3)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right. \quad \text{y} \quad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(-1,2,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,3,4)\\ P_s(0,1,0)\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\begin{vmatrix}-1 & 1 & x+1\\ 2 & 2 & y-2\\ -1 & 3 & z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 4x+y-2z+2=0$$

$$\pi_2:\begin{vmatrix}-1 & 2 & x\\ 2 & 3 & y-1\\ -1 & 4 & z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 11x+2y-7z-2=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}4x+y-2z+2=0\\ 11x+2y-7z-2=0\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 2.9.9 *(3 puntos)* Dados el plano:

$$\pi_1: x+y+z=1$$

y la recta:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-4}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

b) (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Solución:

a) Ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=-4\lambda\end{array}\right.$$

Sustituimos en el plano: $1+2\lambda-1+3\lambda-4\lambda=1\Longrightarrow\lambda=1$, luego el punto buscado es: $P(3,2,-4)$.

b) Calculamos un punto $Q(1+2\lambda, -1+3\lambda, -4\lambda)$ de la recta r que dista $\sqrt{29}$ unidades del punto P calculado anteriormente:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(-2+2\lambda, -3+3\lambda, 4-4\lambda)| = \sqrt{4(\lambda-1)^2 + 9(\lambda-1)^2 + 16(1-\lambda)^2} =$$

$$\sqrt{29}(\lambda - 1) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 2$$

Luego $Q(5, 5, -8)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 5 + 5 - 8 = 2 \Longrightarrow \pi_2 : x + y + z = 2$$

La otra solución sería:

$$\sqrt{29}(1 - \lambda) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 0$$

Luego $Q(1, -1, -4)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 1 - 1 - 4 = -4 \Longrightarrow \pi_2 : x + y + z = -4$$

2.10. Año 2009

2.10.1. Modelo

Opción A

Problema 2.10.1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

c) (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Solución:

a) De dos formas diferentes:

☛ La ecuación de la recta en paramétricas es $r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$, y si sustituimos en el plano π tenemos:

$$(3 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) - (5 + 4\lambda) = 2 \Longrightarrow 2 = 2$$

expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de λ y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π.

☛ Ponemos la recta r como intersección de dos planos:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{z-5}{4}\Longrightarrow 2x-z=1$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}\Longrightarrow x-2y=-1$$

Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano π

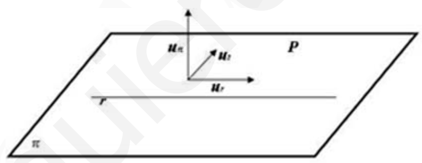
$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & 2y- & z= & 2 \\ x- & 2y & = & -1 \\ 2x & - & z= & 1 \end{array}\right.\Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{c} |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{array}\right|=-4\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2 \\ \\ F_3=F_1+F_2\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2 \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

Rango(A) =Rango$(\overline{A})=2<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

El plano π y la recta r tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

b) Para que el enunciado tenga sentido es necesario que el punto P esté en el plano π, basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.



El vector $\overrightarrow{u_t}$ de la recta t que buscamos tiene que ser perpendicular al vector característico del plano $\overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-1)$ y al vector director $\overrightarrow{u_r}=(2,1,4)$ de la recta r. Luego:

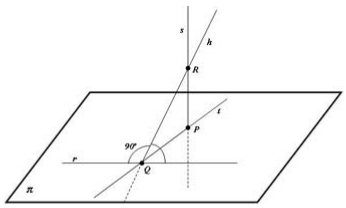
$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right|=3(3,-2,-1)$$

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(3,-2,-1) \\ P(-2,3,2) \end{array}\right.\Longrightarrow t:\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$$

Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano π.

c) La situación geométrica es la siguiente:
Tenemos que encontrar una recta s perpendicular al plano π y que pase por el punto P

$$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-1) \\ P(-2,3,2) \end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right.$$



Un punto cualquiera R de la recta s es $R(-2+\lambda, 3+2\lambda, 2-\lambda)$.

Ahora buscamos el punto de corte Q entre las rectas t y r

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 3+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 5+4\lambda \end{array} \right. , \quad t: \left\{ \begin{array}{l} x = -2+3\mu \\ y = 3-2\mu \\ z = 2-\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3+2\lambda = -2+3\mu \\ 2+\lambda = 3-2\mu \\ 5+4\lambda = 2-\mu \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow Q(1,1,1)$$

Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\overrightarrow{QR} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda)$ y $\overrightarrow{u_r} = (2,1,4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro λ

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{u_r} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda) \cdot (2,1,4) = -6+2\lambda+2+2\lambda+4-4\lambda = 0$$

Luego la recta h que pasa por los puntos Q y R es siempre perpendicular a la recta r sea cual sea el punto R que tomemos de la recta s.

Opción B

Problema 2.10.2 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano $\pi : 2x - y + z = 11$, se pide:

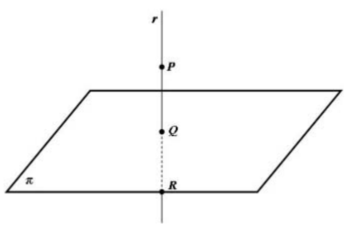
a) (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

b) (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Solución:

a) Tenemos

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_r = P(1,-1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{array} \right.$$



Sustituyendo en el plano tenemos

$$2(1+2\lambda) - (-1-\lambda) + (2+\lambda) - 11 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en r tenemos $Q(3,-2,3)$.

El punto Q es el punto medio entre P y el punto R que buscamos

$$Q = \frac{P+R}{2} \Longrightarrow R = 2Q - P = 2(3,-2,3) - (1,-1,2) = (5,-3,4)$$

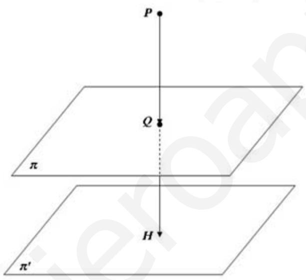
Luego $R(5,-3,4)$ es el punto simétrico de P respecto del plano π.

b) El vector $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,1) = \overrightarrow{u_\pi}$ y es perpendicular al plano π. Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{PH} = -\lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda |\overrightarrow{u_\pi}| = \lambda\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \Longrightarrow \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1,-1,2) + 5(2,-1,1) = (11,-6,7)$. El plano π' que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que π



$$\pi' : 2x - y + z = \lambda \Longrightarrow 22 + 6 + 7 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 35 \Longrightarrow 2x - y + z = 35$$

Nota: Podemos comprobar si $d(P,\pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P,\pi') = \frac{|2+1+2-35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \text{ y } |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64+16+16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

2.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.10.3 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.

b) (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.

c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución:

a) Tres pasos:

- ☛ Calculo $r \perp \pi$ que pasa por $O(0,0,0)$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,3,1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- ☛ Calculo el punto de corte Q de π con r:

$$\lambda + 3(3\lambda) + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{11} \Longrightarrow Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

- ☛ P es el punto simétrico de O respecto de Q:

$$\frac{P+O}{2} = Q \Longrightarrow P = 2Q - O = \left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

c) Si $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow A(4,0,0)$
Si $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow B(0,4/3,0)$
Si $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow C(0,0,4)$

$$\overrightarrow{OA} = (4,0,0),\ \overrightarrow{OB} = (0,4/3,0),\ \overrightarrow{OC} = (0,0,4)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{32}{9}\ u^2$$

Opción B

Problema 2.10.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1},\quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

c) (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(-2,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right.$$

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc}2 & 2 & x-1\\ 3 & 1 & y-2\\ 1 & 1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow x-2z-1=0$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s}=(-3,-2,2)$:

$$\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|=|\left|\begin{array}{rrr}2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -3 & -2 & 2\end{array}\right||=|-14|=14$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{array}\right||=|(2,0,-4)|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{14}{2\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}\ u$$

c)

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(2,3,1)\\ P_t(0,0,0)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(-2,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_s}=(-2,0,2)$$

$$\left|\begin{array}{rrr}2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{array}\right|=-12\Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

2.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.10.5 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{a},\quad s:\frac{x-3}{b}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,a)\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(b,1,-1)\\ P_s(3,0,3)\end{array}\right. \quad , \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(3,0,3)$$

Si r y s son perpendiculares:

$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \Longrightarrow -a + b = -2$
Si r y s se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a + 2b = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a + b = -2 \\ a + 2b = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ ab + 2b = -1 \end{array} \right.$$

Problema 2.10.6 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

Solución:

La ecuación de un plano paralelo a π es $\pi' : 2x - y + 2z + \lambda = 0$ y un plano del plano π puede ser $P(0, 1, 0)$ y tendremos que $d(P, \pi') = 3$:

$$d(P, \pi') = \frac{|0 - 1 + 0 + \lambda|}{3} = \frac{|\lambda - 1|}{3} = 3 \Longrightarrow |\lambda - 1| = 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda + 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ \lambda - 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = 10 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z + 10 = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.10.7 *(3 puntos)* Dada la recta:

$$r : \frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Solución:

Calculamos el punto de corte de la recta r y el plano π, para ello calculamos la ecuación paramétrica de la recta y sustituimos en el plano:

$$r; \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (1 + \lambda) - \lambda - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow P(2, -1, 1)$$

Ahora calculamos el punto simétrico de $P_r(1, 0, 0)$ respecto al plano π:

- ☛ Calculamos una recta t perpendicular π que pase por P_r:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1, 1, -2) \\ P_t(1, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

☛ Encontramos el punto de corte de t y π:

$$(1+\lambda)+\lambda-2(-2\lambda)+1=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

☛ Calculamos el punto simétrico P' de P_r respecto de P'':

$$\frac{P_r+P'}{2}=P'' \Longrightarrow P'=2P''-P_r=$$

$$2\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)-(1,0,0)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

La recta s simétrica de r respecto de π pasa por los puntos P y P':

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P'P}=(2,-1,1)-\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}(5,-1,-1)\\ \\ P(2,-1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}x=2+5\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

2.10.4. Reserva

Opción A

Problema 2.10.8 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{1},\quad s:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-\lambda}{2}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r, s se cortan en un punto.

b) (1 punto) Para $\lambda=23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r, s.

c) (1 punto) Para $\lambda=23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr}1+ & 2\alpha= & -2+ & \mu\\ -2+ & 3\alpha= & 1+ & 2\mu\\ 2+ & \alpha= & \lambda+ & 2\mu\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=-9\\ \mu=-15\\ \lambda=23\end{array}\right. \Longrightarrow \lambda=23$$

b) Sustituyendo los valores de λ, α y $\mu \Longrightarrow P(-17,-29,-7)$

c)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,2)\\ P_r(1,-2,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc}2 & 1 & x-1\\ 3 & 2 & y+2\\ 1 & 2 & z-2\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi:4x-3y+z-12=0$$

Opción B

Problema 2.10.9 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Demostrar que si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2,$$

donde $|w|$ denota módulo del vector $\overrightarrow{w}$

b) (1 punto) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ hallar un vector $\overrightarrow{v_3}$ tal que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2.$$

c) (1 punto) Dado el vector $\overrightarrow{v}(1, 2, 3)$, hallar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

a) $\overrightarrow{v_1}$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

b) $\overrightarrow{v_1}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_2}$;

c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

Solución:

a)

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = (\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3})(\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}) =$$

$$\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_3} = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2$$

b) $\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$ y llamamos $\overrightarrow{v_3} = (a, b, c)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1} = a + b - c = 0 \\ \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2} = a + c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2a \\ c = -a \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{v_3} = a(1, -2, -1)$ donde a es cualquier valor real.

c) Sea $\overrightarrow{v_1} = (a, a, a)$ y $\overrightarrow{v_2} = (b, c, d)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = a(b + c + d) = 0 \Longrightarrow b + c + d = 0 \\ \overrightarrow{v} = (1, 2, 3) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1} = (a + b, a + c, a + d) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} b + c + d = 0 \\ a + b = 1 \\ a + c = 2 \\ a + d = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

Luego:

$$\overrightarrow{v_1} = (2, 2, 2) \ \text{ y } \ \overrightarrow{v_2} = (-1, 0, 1)$$

2.11. Año 2010

2.11.1. Modelo

Opción A

Problema 2.11.1 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 2) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (6, 2, 2) = 2(3, 1, 1) \\ P_s(5, 0, -1) \end{array} \right.$$

a)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{OP_r} = (0, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{rrr} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 4x + 2y - z = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1) \\ \overrightarrow{OP_s} = (5, 0, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{lrr} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow -x + 8y - 5z = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{array} \right.$$

b) $\overrightarrow{P_r P_s} = (5, -1, -3)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_r P_s}]| = |\left| \begin{array}{rrr} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{array} \right|| = 64 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{array} \right|| = |(6, -10, -8)| = 2|(3, -5, -4)| = 10\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_r P_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{64}{10\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{5} \; u$$

Opción B

Problema 2.11.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2,2,3)$ y $B(0,-2,1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (3\lambda, -2-\lambda, 1+2\lambda), \quad \overrightarrow{BP} = (2-3\lambda, 2-\lambda, 3+2\lambda)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2} = \sqrt{(2-3\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3+2\lambda)^2} \Longrightarrow$$

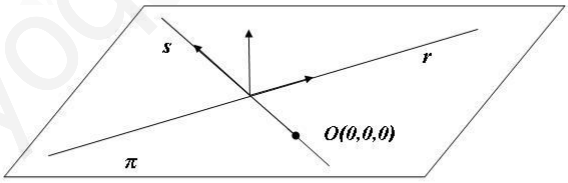
$$\lambda = 1 \Longrightarrow (5,-1,6)$$

Problema 2.11.3 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenada $O(0,0,0)$.

Solución:



$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ O(0,0,0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(1,1,-1)$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

2.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 2.11.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

a) (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

b) (1 puntos) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-1) \\ P_r(0,1,-4) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,1,4) \\ P_s(0,0,0) \end{cases}$$

Calculamos el vector perpendicular a estas dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (13,-9,-1)$$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-1) \\ \overrightarrow{u_t} = (13,-9,-1) \\ P_r(0,1,-4) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 13 & x \\ 3 & -9 & y-1 \\ -1 & -1 & z+4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 12x + 11y + 57z + 217 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,1,4) \\ \overrightarrow{u_t} = (13,-9,-1) \\ P_s(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 13 & x \\ 1 & -9 & y \\ 4 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 35x + 53y - 22z = 0$$

$$t : \begin{cases} 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \\ 35x + 53y - 22z = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_sP_r} = (0,1,-4)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = |\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}| = -5 \Longrightarrow \text{ se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |(13,-9,-1)| = \sqrt{251}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{251}} = \frac{5\sqrt{251}}{251} \ u$$

Opción B

Problema 2.11.5 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.

b) (1 punto) Hallar la distancia desde el punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -2, 1) \\ P_s(3, 4, 0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = (-1, -2, 1)$$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (3, 3, 1) \Longrightarrow$ las dos rectas son paralelas, el plano que determinan es:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (3, 3, 1) \\ P_r(0, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 1 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 5x - 4y - 3z + 1 = 0$$

b)

$$\overrightarrow{P_sA} = (-3, -3, -1)$$

$$|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sA}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{array} \right|| = |(5, -4, -3)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = |(-1, -2, 1)| = \sqrt{6}$$

$$d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sA}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ u$$

Problema 2.11.6 *(2 puntos)* Sea el plano π que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$ y $R(0, 0, 3)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

b) (1 punto) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OQ} = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{OR} = (0, 0, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow V = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right| = 1\ u^3$$

b) Calculamos el plano π:

$$\pi: \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{PR} = (-1,0,3) \\ P(1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 6x+3y+2z-6=0$$

Para encontrar el punto simétrico del origen respecto a este plano seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta r que pasa por $O(0,0,0)$ y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (6,3,2) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte O' de r con π:

$$6(6\lambda)+3(3\lambda)+2(2\lambda)-6=0 \Longrightarrow \lambda = \frac{6}{49}$$

Luego el punto de corte es:

$$O'\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$$

- El punto O' es el punto medio entre los puntos O y el que buscamos O'':

$$\frac{O+O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$$

2.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 2.11.7 *(3 puntos)* Dadas la recta:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

y el punto $P(2,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) (2 puntos) Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r.

Solución:

a)

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2,1,3) \\ P_r(-1,2,-1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP} = (3,-2,0) \quad r: \begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -1+3\lambda \end{cases}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} | = |(6,9,1)| = \sqrt{118}$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}}\ u$$

b) Para calcular el punto simétrico seguimos los siguientes pasos:

☛ Calculo un plano π perpendicular a r que contenga a P:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (-2, 1, 3) \\ P(2, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow -2x + y + 3z + \lambda = 0$$

$$\Longrightarrow -4 - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 7 \Longrightarrow 2x - y - 3z - 7 = 0$$

☛ Calculo el punto de corte P'' de este plano π con r:

$$2(-1 - 2\lambda) - (2 + \lambda) - 3(-1 + 3\lambda) - 7 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{4}{7}$$

$$P''\left(\frac{1}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{19}{7}\right)$$

☛ El punto P'' es el punto medio entre P y P':

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{2}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{38}{7}\right) - (2, 0, -1)$$

$$P''\left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$$

Opción B

Problema 2.11.8 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta:

$$r \equiv x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{5}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a para los que la recta r está contenida en el plano π.

b) (1 punto) Para el valor de $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π.

c) (1 punto) Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 5) \\ P_r(-1, 1, -3) \end{cases} \quad \overrightarrow{u_\pi} = (2, a, 4)$$

a) Si r está contenida en el plano $\pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0$:

$$2 + 2a + 20 = 0 \Longrightarrow a = 11$$

b) Si $a = -2 \Longrightarrow \pi : 2x - 2y + 4z + 25 = 0$ y sea s la recta perpendicular a π que pasa por $P(-3/2, 0, -11/2)$:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = 2(1, -1, 2) \\ P_s(-3/2, 0, -11/2) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -3/2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -11/2 + 2\lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de esta recta sería $P(-3/2+\lambda, -\lambda, -11/2+2\lambda)$

$$d(P,\pi) = \frac{|-3+2\lambda+2\lambda-22+8\lambda+25|}{\sqrt{4+4+16}} = \sqrt{6} \Longrightarrow |\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = 1, \quad \lambda = -1$$

Si $\lambda = 1 \Longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{7}{2}\right)$

Si $\lambda = -1 \Longrightarrow \left(-\frac{5}{2}, 1, -\frac{15}{2}\right)$

c) El ángulo α que forma r y π es $90^\circ - \widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}} \Longrightarrow \sin\alpha = \cos(\widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}})$

$$\sin\alpha = \cos(\widehat{\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_\pi}}) = \frac{1-2+10}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

2.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 2.11.9 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ z = 3 \end{array}\right. \qquad r_2 \equiv \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

b) (1 puntos). Hallar la mínima distancia entre las rectas r_1 y r_2.

Solución:

$$r_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,0,0) \\ P_{r_1}(0,1,3) \end{array}\right.$$

$$r_2 \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (0,1,1) \\ P_{r_2}(0,0,0) \end{array}\right.$$

a)

$$\overrightarrow{u_t} = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| = (0,-1,1)$$

Se obtiene la recta t perpendicular a ambas, y que las corta, como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,0,0) \\ P_{r_1}(0,1,3) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 0 & z-3 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow y + z - 4 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (0,1,1) \\ P_{r_2}(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$t \equiv \left\{\begin{array}{c} y + z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

b)

$$d(\overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}) = \frac{\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right]}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0,1,3), \quad |\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_1}}| = |(0,-1,1)| = \sqrt{2}$$

$$\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Opción B

Problema 2.11.10 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores $v_1 = (0,2,6)$ y $v_2 = (1,0,b)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (1 punto). Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.

c) (1 punto). Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

Solución:

$$\pi_1 : 2x - 3y + z = a; \quad \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & y-2 \\ 6 & b & z-4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : bx + 3y - z - 2 = 0$$

a) π_1 y π_2 son paralelos si:

$$\frac{2}{b} = \frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} \neq \frac{a}{-2} \Longrightarrow b = -2 \text{ y } a \neq 2$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{array} \right.$$

c) $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ donde $P(x,y,z)$:

$$\frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{|-2x + 3y - z - 2|}{\sqrt{14}} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 \Longrightarrow \pi' : 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = -(-2x + 3y - z - 2) \Longrightarrow \text{ no tiene solución} \end{array} \right.$$

2.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 2.11.11 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=2\\ z=3-\lambda\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=-1\\ x+y=-2\end{array}\right.$$

Determinar la ecuación de la recta t que pasa por el punto $P(0,1,-2)$ y corta a las rectas r y s.

Solución:

$$\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right|=(1,-1,-1),\quad P_s(0,-2,-3)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,0,-1)\\ P_r(1,2,3)\end{array}\right.$$

Vamos a encontrar la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r}=(1,1,5)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,0,-1)\\ P(0,1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & x\\ 1 & 0 & y-1\\ 5 & -1 & z+2\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi_1: x-6y+z+8=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s}=(0,-3,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,-1)\\ P(0,1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & x\\ -3 & -1 & y-1\\ -1 & -1 & z+2\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi_2: 2x-y+3z+7=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l} x-6y+z+8=0\\ 2x-y+3z+7=0\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 2.11.12 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=-2\\ x-2y=-1\end{array}\right. \qquad s:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{2}$$

Se pide:

a) (1 punto). Dados los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(a,3,-3)$, determinar el valor de a para que la recta t que pasa por los puntos A y B, sea paralela a s.

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,5)\\ P_r(1,1,5)\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-3,2)\\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right.$$

a)

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(a-1,3,-2)\\ P_t(1,0,-1)\end{array}\right. \quad \text{y } t\|s\Longrightarrow \lambda\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_s}$$

$$\lambda(a-1,3,-2)=(1,-3,2)\Longrightarrow a=0,\ \lambda=-1$$

b)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,5) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-3,2) \\ P_r(1,1,5) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{rrc} 2 & 1 & x-1 \\ 1 & -3 & y-1 \\ 5 & 2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 17x + y - 7z + 17 = 0$$

Problema 2.11.13 *(2 puntos)* Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos:

$$\pi_1 : 5x - y - 7z = 1, \quad \pi_2 : 2x + 3y + z = 5$$

Solución:

$$\overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi_1}}, \ \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right| = (20, -19, 17)$$

El plano buscado tiene de ecuación $\pi : 20x - 19y + 17z + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $(0,0,0) \Longrightarrow \lambda = 0$. Luego el plano buscado es:

$$\pi : 20x - 19y + 17z = 0$$

2.12. Año 2011

2.12.1. Modelo

Opción A

Problema 2.12.1 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la rectas r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(5,4,0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (6,4,1)$$

a) $\left| \begin{array}{ccc} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0$ y Rango$\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow$ las rectas r y s son paralelas.

b)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{P_rP_s} = (6,4,1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} 2 & 6 & x+1 \\ 1 & 4 & y \\ 1 & 1 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

Problema 2.12.2 *(2 puntos)* Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α con β.

b) (1 punto). Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & 0+ & 2\lambda \\ y = & -\dfrac{3}{5}- & 2\lambda \\ z = & -\dfrac{1}{5}- & \lambda \end{cases}$$

Un punto de r puede ser: $\left(0, -\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ y

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 5(2, -2, -1)$$

b) $\gamma : 2x + y + 2z + \lambda = 0$ y contiene al punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$, luego:

$$2\sqrt{2} + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -(1 + 2\sqrt{2}) \Longrightarrow$$

$$\gamma : 2x + y + 2z - (1 + 2\sqrt{2}) = 0$$

Opción B

Problema 2.12.3 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1, -3, 0)$, $B(3, 1, -2)$,$C(7, 2, 3)$, $D(5, -2, 5)$ y $E(1, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto). Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) (1 punto). Demostrar que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo y calcular su área.

c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A, B, C y D

Solución:

a)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2),\ \overrightarrow{AC} = (6, 5, 3),\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

Los tres vectores construidos son linealmente dependientes y, por tanto, están en el mismo plano.

b)

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) = \sqrt{24}$$
$$\overrightarrow{BC} = (4, 1, 5) = \sqrt{42}$$
$$\overrightarrow{CD} = (-2, -4, 2) = \sqrt{24}$$
$$\overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) = \sqrt{42}$$

Los lados son iguales dos a dos, luego se trata de un paralelogramo.

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}| = |2(11, -9, -7)| = 2\sqrt{251}\, u^2$$

c)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 4, -2) \\ \overrightarrow{AD} = (4, 1, 5) \\ A(1, -3, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & x-1 \\ 4 & 1 & y+3 \\ -2 & 5 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11x - 9y - 7z - 38 = 0$$

$$d(E, \pi) = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{251}} = \frac{41\sqrt{251}}{\sqrt{251}}\, u$$

2.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv\ x = y = z,\ \ r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.,\ \ r_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2},\ \ r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

a) Llamamos A al punto intersección de π con r_1:

$$2x + 3x + 7x = 24 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow A(2, 2, 2)$$

Llamamos B al punto intersección de π con r_2:

$$2x = 24 \Longrightarrow x = 12 \Longrightarrow B(12, 0, 0)$$

Llamamos C al punto intersección de π con r_3:

$$3y = 24 \Longrightarrow y = 8 \Longrightarrow B(0, 8, 0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (2,2,2) \;\; \overrightarrow{OB} = (12,0,0) \;\; \overrightarrow{OC} = (0,8,0)$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}| = 32\, u^3$$

b) Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{r_4}} \times \overrightarrow{u_{r_5}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4,-3,-1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_4}} = (1,2,-2) \\ P_{r_4}(-1,5,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 8x + 7y + 11z - 16 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_5}} = (2,3,-1) \\ P_{r_4}(0,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 3x + y + 9z - 8 = 0$$

La recta buscada será:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.12.5 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Solución:

a)

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \Longrightarrow \text{se cortan}$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -1/3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

La recta intersección viene determinada por el punto $P_t\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ y el vector director $\overrightarrow{u_t} = (0,2,1)$.

Otra manera de calcular estos datos sería $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$, y el punto P_t, dando un valor cualquiera (mismamente $z = 0$) y resolviendo el sistema que queda.

Problema 2.12.6 *(2 puntos)* Se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.

b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1,2,3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v} = (-2,1,1)$.

c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

Solución:

a)
$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,0,1) \\ \text{A(1,0,0)} \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + y + 2z - 2 = 0$$

b) $-2x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow -2 + 2 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$:
$$\pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0$$

c) $\overrightarrow{AP} = (0,2,3)$:
$$V = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}|-8| = \frac{4}{3}\,u^3$$

2.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.12.7 *(3 puntos).* Dados los planos
$$\pi_1 : 2x + 3y + z - 1 = 0; \quad \pi_2 : 2x + y - 3z - 1 = 0,$$
y la recta
$$r : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{2};$$
se pide:

a) (1 punto). El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto). El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ e YZ.

c) (1 punto). La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

Solución:
$$r : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z+2}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

a) $d(P_r,\pi_1)=d(P_r,\pi_2)$:

$$\frac{|2(1+2\lambda)+3(-1+\lambda)+(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{|2(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-3(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$|-4+9\lambda|=|6-\lambda|\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4+9\lambda=6-\lambda\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow P_r'(3,0,0)\\ -4+9\lambda=-6+\lambda\Longrightarrow\lambda=-1/4\Longrightarrow P_r'(1/2,-5/4,-5/2)\end{array}\right.$$

b) Corte de π_1 con el eje OX: hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow A(1/2,0,0)$.

Corte de π_1 con el eje OY: hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow B(0,1/3,0)$.

Corte de π_1 con el eje OZ: hacemos $x=0$ e $y=0\Longrightarrow C(0,0,1)$.

Los vectores que forman estos puntos con el origen son los siguientes:

$$\overrightarrow{OA}=(1/2,0,0);\quad \overrightarrow{OB}=(0,1/3,0);\quad \overrightarrow{OC}=(0,0,1)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1\end{array}\right|=\frac{1}{36}\,u^2$$

c) Obtenemos esta recta como intersección de dos planos, uno de ellos será π_2 y el otro será un plano π perpendicular a π_2 y que contiene a r:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-3)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,1,2)\\ P_r(1,-1,-2)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}2&2&x-1\\1&1&y+1\\-3&2&z+2\end{array}\right|=0\Longrightarrow\pi:x-2y-3=0$$

$$\text{Proyección}:\left\{\begin{array}{l}x-2y-3=0\\2x+y-3z-1=0\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 2.12.8 *(3 puntos)*. Dado el punto $P(0,1,1)$ y las rectas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1},\quad s:\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

b) (1,5 puntos). Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

Solución:

a) Lo calculamos siguiendo los tres pasos siguientes:

- ☛ Calculamos un plano π perpendicular a r que contenga a P:

$$2x+y-z+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow\pi:2x+y-z=0$$

☛ Calculamos el punto de corte P' de π con r:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$2(1+2\lambda) + (-1+\lambda) - (-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

☛ El punto que buscamos P'' tiene que cumplir:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

b) Calculo un plano $\pi \perp r$, que contenga a P, calculado en el apartado anterior $\pi: 2x+y-z=0$, y el punto de corte P_1 de este plano con la recta s

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 2 \cdot 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1 = O(0,0,0)$$

La recta t que buscamos pasa por los puntos O y P:

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (0,1,1) \\ O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow t: \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

2.13. Año 2012

2.13.1. Modelo

Opción A

Problema 2.13.1 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(0,1,3)$, se pide:

a) (2 puntos). Hallar todos los puntos que equidistan de A, B y C. ¿Cuáles de ellos pertenecen al plano $\pi: 2x + 2y + 2z + 1 = 0$?

b) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que pasa por A, B y C.

Solución:

a) El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B y C será la recta en la que se cortan los planos mediadores definidos entre A y B, entre A y C y entre B y C. Calculando dos de ellos será suficiente.

Plano mediador entre A y B:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} \Longrightarrow 2x + 2y - 6z + 1 = 0$$

Plano mediador entre A y C:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \Longrightarrow x - 2y - z + 2 = 0$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-6z+1=0\\ x-2y-z+2=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(7,2,3)\\ P_r\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-1+7\lambda\\ \\ y=\dfrac{1}{2}+2\lambda\\ \\ z=3\lambda\end{array}\right.$$

Sustituimos en el plano π:

$$2(-1+7\lambda)+2\left(\frac{1}{2}+2\lambda\right)+2(3\lambda)+1=0\Longrightarrow \lambda=0$$

El único punto es el $\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$.

b) La ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C vendrá determinada por:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,1,-3)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,2,1)\\ A(1,-1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{rrc} 1 & -1 & x-1\\ 1 & 2 & y+1\\ -3 & 1 & z-2\end{array}\right|=0\Longrightarrow 7x+2y+3z-11=0$$

Opción B

Problema 2.13.2 *(3 puntos)* Dados los planos de ecuaciones:

$$\pi: x-2y+2z+4=0,\quad \pi'=2x+2y-z-2=0$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener la ecuación en forma continua de la recta que determinan.

b) (1 punto). Hallar todos los puntos que equidistan de π y π'.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y+2z+4=0\\ 2x+2y-z-2=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda\\ y=5\lambda\\ z=-2+6\lambda\end{array}\right.$$

En su forma continua:

$$r:\frac{x}{-2}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{6}$$

$$u_r=u_\pi\times u_{\pi'}=\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{array}\right|=(-2,5,6);\quad P_r(0,0,-2)$$

b) Sea $P(x,y,z)$ un punto tal que $d(P,\pi)=d(P,\pi')$:

$$\frac{|x-2y+2z+4|}{\sqrt{9}}=\frac{|2x+2y-z-2|}{\sqrt{9}}\Longrightarrow |x-2y+2z+4|=|2x+2y-z-2|$$

Luego tenemos las soluciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+2z+4=2x+2y-z-2\Longrightarrow x+4y-3z-6=0\\ x-2y+2z+4=-(2x+2y-z-2)\Longrightarrow 3x+z+2=0\end{array}\right.$$

Problema 2.13.3 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r: \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}, \quad s: \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{x-8}{-2}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar la posición relativa de las rectas r y s.

b) (1 punto). Hallar la distancia mínima entre r y s.

Solución:

a)

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-6,4,4) \\ P_r(-3,9,8) \end{array} \right. ; \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3,-2,-2) \\ P_s(3,9,8) \end{array} \right. ; \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (6,0,0)$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{array} \right| = 0; \quad \overrightarrow{u_r} = -2\overrightarrow{u_s} \text{ y } \left| \begin{array}{rr} 6 & 0 \\ -6 & 4 \end{array} \right| = 24 \neq 0$$

Las dos rectas son paralelas.

b) Como las dos rectas son paralelas se coge un punto al azar de una de las rectas y se calcula la distancia desde este punto a la otra recta:

$$d(r,s) = d(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = 12\sqrt{\frac{2}{17}}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_r}| = |\left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{array} \right|| = |24(0,-1,1)| = 24\sqrt{2}; \quad |\overrightarrow{u_r}| = 2\sqrt{17}$$

2.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.13.4 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (a-1,-1,1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,5)$, $\overrightarrow{P_1P_4} = (1,-3,3)$:

$$\left| \begin{array}{ccc} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{array} \right| = 7(3a-4) = 0 \Longrightarrow a = \frac{4}{3}$$

b)

$$7=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}| \Longrightarrow |3a-4|=6\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=10/3\\ a=-2/3\end{array}\right.$$

c)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2}\Longrightarrow$$
$$4y+10z-31=0$$

Opción B

Problema 2.13.5 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r_1\equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z}{2},\quad r_2\equiv\left\{\begin{array}{l} x=-1-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=5\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

Solución:

$$r_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(3,-5,2)\\ P_{r_1}(2,1,0)\end{array}\right.\qquad r_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(-1,1,0)\\ P_{r_2}(-1,3,5)\end{array}\right.\qquad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(-3,2,5)$$

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-8\neq 0\Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{|-8|}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -5 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}|=|(-2,-2,-2)|=2\sqrt{3}$$

2.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.13.6 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(1,0,2)$ y la recta

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=2+2\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=3\end{array}\right.$$

determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.

Solución:

a)

$$(2+2\lambda-2)^2+(1-\lambda-1)^2+(3-(-1))^2=(2+2\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(3-2)^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda=\frac{13}{2}\Longrightarrow\left(15,-\frac{11}{2},3\right)$$

b)

$$2x-y+\lambda=0,\ \ 2\cdot 1-1\cdot 0+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-2$$

$$\pi: 2x-y-2=0$$

Problema 2.13.7 *(2 puntos)* Una de las caras del paralelepípedo H tiene vértices en los puntos $A(4,2,8)$, $B(6,4,12)$, $C(6,0,10)$ y $D(8,2,14)$.

a) (1 punto). Si el punto $E(6,8,28)$ es otro de los vértices, hallar el volumen de H.

b) (1 punto). Hallar el punto E' simétrico de E respecto del plano que contiene a la cara $ABCD$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=(2,2,4);\ \ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=(2,-2,2)$$

a)

$$\overrightarrow{AE}=(2,6,20)\Longrightarrow V=\left|\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & 6 & 20 \end{array}\right|=112\ u^3$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- Cálculo del plano que contiene la cara $ABCD$:

$$\pi\equiv\left|\begin{array}{rrc} 2 & 2 & x-4\\ -2 & 2 & y-2\\ 2 & 4 & z-8 \end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi\equiv 3x+y-2z+2=0$$

- Calculamos las ecuación de la recta $r\perp\pi$ que pasa por E:

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=6+3\lambda\\ y=8+\lambda\\ z=28-2\lambda \end{array}\right.$$

- Calculamos el punto de corte E'' de r con π:

$$3(6+3\lambda)+(8+\lambda)-2(28-2\lambda)+2=0\Longrightarrow \lambda=2\Longrightarrow E''(12,10,24)$$

- $$\frac{E+E'}{2}=E''\Longrightarrow E'=2E''-E=(24,20,48)-(6,8,28)=(18,12,20)$$

Opción B

Problema 2.13.8 *(3 puntos)* Dadas la recta r y la familia de rectas s, mediante

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = -3 \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y + z = a \\ x + z = 0 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de a para que ambas rectas se corten. Calcular el punto de corte.

b) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas cuando estas se cortan.

Solución:

a)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = \dfrac{a-\mu}{2} \\ z = -\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3 - 2\lambda = \mu \\ \lambda = \dfrac{a-\mu}{2} \\ 1 = -\mu \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = -1 \\ a = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow a = -3, \text{ y el punto de corte es } P(-1, -1, 1)$$

b)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, 0) \\ P_r(-3, 0, 1) \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1/2, -1) = 1/2(2, -1, -2) \\ P_s(0, -3/2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, -1, -2) \\ P_r(-3, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi \equiv \left| \begin{array}{ccc} -2 & 2 & x+3 \\ 1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi \equiv x + 2y + 3 = 0$$

2.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.13.9 *(2 puntos)* Se dan la recta r y el plano π, mediante

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$$

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

Solución:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 3) \\ P_r(4, 1, 2) \end{array} \right.$$

$$1 = d(P, \pi) = \frac{|2(4 + 2\lambda) + (1 - \lambda) - 2(2 + 3\lambda) - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$|3\lambda + 2| = 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + 2 = 3 \Longrightarrow \lambda = 1/3 \Longrightarrow P_1(14/3, 2/3, 3) \\ -3\lambda - 2 = 3 \Longrightarrow \lambda = -5/3 \Longrightarrow P_1(2/3, 8/3, -3) \end{array} \right.$$

Problema 2.13.10 *(2 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-2)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,2,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,-2) \\ A(2,3,4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -2 & -2 & z-4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - y + 2z - 11 = 0$$

b)

$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3,-1,2) \\ P_t(4,-1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

Opción B

Problema 2.13.11 *(3 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.

b) (1,25 puntos). Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.

c) (1,25 puntos). Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z = 3$.

Solución:

a)

$$\frac{P' + P}{2} = Q \Longrightarrow P' = 2Q - P = (4,-1,5)$$

b) Calculamos un plano $\pi \perp r$ que contenga a P

$$x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 + 1 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Calculamos el punto de corte P_1 de π con r:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$(1+\lambda) + (1+\lambda) + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(1,1,0)$$

Por último:

$$\frac{P'' + P}{2} = P_1 \Longrightarrow P'' = 2P_1 - P = (0,1,1)$$

c) Calculamos una recta $r \perp \pi$ que contenga a P:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P(2,1,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right.$$

Calculamos el punto de corte P_2 de π con r:

$$(2+\lambda) + (1+\lambda) + (-1+\lambda) - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Por último:
$$\frac{P''' + P}{2} = P_2 \Longrightarrow P''' = 2P_2 - P = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

2.14. Año 2013

2.14.1. Modelo

Opción A

Problema 2.14.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1;2;0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos π_3; π_4; π_5 siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z + 3; \quad r_2 \equiv x + 2 = y = \frac{z+7}{2}$$

Solución:

a)
$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,3,-1) \\ P_r(1,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

$$6x - y + 3z = -2 \Longrightarrow 6(1+2\lambda) - (2+3\lambda) + 3(-\lambda) = -2 \Longrightarrow$$
$$\lambda = -1 \Longrightarrow P'(-1,-1,1)$$

b)
$$\pi_5 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x+2 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & z+7 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_5 : 5x - 3y - z = -3$$

$$P : \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y + 7z = 4 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ 5x - 3y - z = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow P(1,3,-1)$$

Problema 2.14.2 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r.

b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1;1;1)$.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-6,1,2) \\ P_r(0,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -6\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

$$x - y + 2z = 1 \Longrightarrow (-6\lambda) - (-1 + \lambda) + 2(2\lambda) = 1 \Longrightarrow$$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow \text{ se cortan } P'(0,-1,0)$$

b)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-6,1,2) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,2,1) \\ P(111) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} -6 & 1 & x \\ 1 & 2 & y+1 \\ 2 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 3x - 8y + 13z = 8$$

Opción B

Problema 2.14.3 *(3 puntos)*

a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array} \right. ; \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{array}{cc} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1;5;-3)$.

Solución:

a)

$$r_1:\left\{\begin{array}{l} x-y=2\\ x+y+z=3\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=2+\mu\\ y=\mu\\ z=1-2\mu\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2+\mu=-1+2\lambda\\ \mu=2+\lambda\\ 1-2\mu=-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=5\\ \mu=7\\ 1-2\mu=-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow 1-2(7)\neq -5 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

Otra forma:

$$r_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,1,-2)\\ P_{r_1}(2,0,1)\end{array}\right. \quad , \quad r_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}}=(2,1,-1)\\ P_{r_2}(-1,2,0)\end{array}\right. \quad ; \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(-3,2,-1)$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 2 & -1\end{array}\right| = -8\neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & z= & 3\\ 2x+ & 3y- & z= & 5\\ 2x+ & 2y+ & 4z= & 3\\ x+ & 3y & = & a\end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 0 & a\end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{array}\right| = -8\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$$

$$\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 0 & a\end{array}\right| = 36-8a=0 \Longrightarrow a=\frac{9}{2}$$

Si $a=9/2 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema tiene solución única. Se trata de un sistema compatible determinado. Por tanto, en $a=9/2$ los cuatro planos se cortan en un punto.

c)

$$\overrightarrow{u_t}=\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 5 & -1\\ 6 & -1 & 1\end{array}\right| = 4(1,-2,-8) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=5-\lambda\\ z=-3-8\lambda\end{array}\right.$$

2.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.14.4 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-z=1\\ y-z=-1\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=3\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.

c) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases} , \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,1,0) \\ P_s(1,0,3) \end{cases} , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0,1,3)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) La recta h la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (2,-1,-2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P(-1,0,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & y \\ -2 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - 4y + 3z = 5$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (2,0,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,0) \\ P(-1,0,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x - y - 2z = -5$$

$$h : \begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ x - y - 2z = -5 \end{cases}$$

c)

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,0)$$

La recta t la encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x + y - 2z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,0) \\ P_s(1,0,3) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : z = 3$$

$$t : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Opción B

Problema 2.14.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2, 1, 1)$ y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$ con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z-3}{2}$$

Solución:

a)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 1) \\ P_s(4, 6, 2)) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 26 \Longrightarrow (4 + 2\lambda - 1)^2 + (6 + \lambda - 2)^2 + (2 + \lambda + 1)^2 = 26 \Longrightarrow$$

$$\lambda = -\frac{1}{3}, \ \lambda = -4 \Longrightarrow P'\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right), \quad P''(-4, 2, -2)$$

b)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 2) \\ P_r(1, -2, 3)) \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{P_rQ} = (-3, 3, -3)$$

$$|\overrightarrow{P_rQ}| = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right| = |9(1, 0, -1)| = 9\sqrt{2}$$

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}\ u$$

Problema 2.14.6 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1, 0, -1)$, plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación del plano que pasa por P es paralelo a r y perpendicular al plano π.

b) (0,5 puntos). Hallar el ángulo entre r y π.

Solución:

a)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 3) \\ P_r(0, 1, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 1) \\ P(1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : x + y - z = 2$$

b)

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{3}{\sqrt{84}} \Longrightarrow \alpha = 19^\circ 6' 24''$$

2.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.14.7 *(3 puntos)* Dada la familia de rectas $r_a : \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{array} \right.$, (variando a en $\mathbb{R}$ se obtiene toda la familia), se pide:

a) (0,75 puntos). Probar que todas las rectas de la familia se cortan en un mismo punto y calcular dicho punto.

b) (1,5 puntos). Dado el punto $P(0,0,1)$, calcular la ecuación del plano π_a que pasa por P y contiene a la recta r_a. Probar que la recta que pasa por P y por el punto $Q(3,0,0)$ está contenida en el plano π_a para todos los valores de a.

c) (0,75 puntos). Determinar para qué valores de a la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano de ecuación $x - ay + 3z = 3$ es $1/2$.

Solución:

$$r_a : \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x - ay - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r_a : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

a) $r_a : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_a}} = (a,1,0) \\ P_{r_a}(3,0,0) \end{array} \right.$ todas las rectas de la familia se cortan en el punto $P_{r_a}(3,0,0)$.

b) π_a tal que $r_a \subset \pi_a$ y $P(0,0,1) \in \pi_a$:

$$\pi_a : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_a}} = (a,1,0) \\ \overrightarrow{PP_{r_a}} = (3,0,-1) P(0,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_a : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z-1 \\ a & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi_a : x - ay + 3z - 3 = 0$$

El punto P y el punto Q pertenecen al plano y, por tanto, la recta que los une para cualquier valor de a.

c) $d(O,\pi_a) = \dfrac{|-3|}{\sqrt{10+a^2}} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow a = \pm\sqrt{26}$

Opción B

Problema 2.14.8 *(3 puntos)* Dadas las rectas: $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 4x + y + 5z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} y - z - 3 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas.

b) (1 punto). Hallar la mínima distancia entre r y s.

c) (1 punto). Hallar el punto simétrico del origen respecto de la recta s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-7,3,5)\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(2,3,0)\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s}=(2,3,0)$$

a) $[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0\\ -7 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=47$ luego las rectas r y s se cruzan.

b) $|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -7 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}|=|(-2,-17,-13)|=\sqrt{462}$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{47}{\sqrt{462}}=\frac{47\sqrt{462}}{462}\ u$$

c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos un plano $\pi\perp s$ tal que $O\in\pi$:

$$\pi: 2x+y+z+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=0\Longrightarrow \pi: 2x+y+z=0$$

- ☛ Calculamos O' punto de corte del plano π con la recta s:

$$s:\left\{\begin{array}{l}x=2+2\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow 2(2+2\lambda)+(3+\lambda)+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-\frac{7}{6}\Longrightarrow$$

$$O'\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{6},-\frac{7}{6}\right)$$

- ☛ $\dfrac{O+O''}{2}=O'\Longrightarrow O''=2O'-O=\left(-\frac{2}{3},\frac{11}{3},-\frac{7}{3}\right)$

2.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.14.9 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2;-2;1)$, $B(0;1;-2)$, $C(-2;0;-4)$, $D(2;-6;2)$, se pide:
se pide:

a) (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(-2,3,-3)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,-1,-2)$ y $\overrightarrow{CD}=(4,-6,6)=-2(-2,3,-3)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos, luego se trata de un trapecio.

b) La distancia será la de A sobre el vector $\overrightarrow{CD}$. Construimos el vector $\overrightarrow{CA}=(4,-2,5)$:

$$S=|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CA}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}|=|(-18,4,16)|=2\sqrt{149}\ u^2$$

$$|\overrightarrow{CD}|=2\sqrt{22}$$

$$S=|\overrightarrow{CD}|\cdot h\Longrightarrow h=\frac{2\sqrt{149}}{2\sqrt{22}}=\sqrt{\frac{149}{22}}$$

c) $\overrightarrow{AB}=(-2,3,-3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,2,-5)$:

$$S_T=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(-9,2,8)|=\frac{\sqrt{149}}{2}\ u^2$$

Problema 2.14.10 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1;2;-1)$ y el plano $\pi\equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto de tangencia P'.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de S.

Solución:

a) Calculamos una recta $r\perp\pi$ tal que $P\in r$:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-2) \\ P_r=P(1,2,-1) \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{array}\right.$$

El punto P' es el punto de corte de r con π:

$$1+\lambda+2(2+2\lambda)-2(-1-2\lambda)+2=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow P'(0,0,1)$$

b) La esfera S tiene de centro el punto medio entre P y P', será $C(1/2,1,0)$ y su radio será la semidistancia de P a π:

$$r=\frac{d(P,\pi)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|1+4+2+2|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{9}{4}$$

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-1=0$$

Opción B

Problema 2.14.11 *(3 puntos)* Sean r_A la recta con vector dirección $(1;\lambda;2)$ que pasa por el punto $A(1;2;1)$, r_B la recta con vector dirección $(1;1;1)$ que pasa por $B(1;-2;3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1;1;-2)$ que pasa por $C(4;1;-3)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) (1,5 puntos). Hallar λ para que las rectas r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.

c) (0,5 puntos). Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

Solución:

$$r_A : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_A}} = (1,\lambda,2) \\ P_{r_A} = A(1,2,1) \end{array} \right. \quad , \quad r_B : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_B}} = (1,1,1) \\ P_{r_B} = B(1,-2,3) \end{array} \right. \quad r_C : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_C}} = (1,1,-2) \\ P_{r_C} = C(4,1,-3) \end{array} \right.$$

a) Utilizamos el vector auxiliar $\overrightarrow{AB} = (0,-4,2)$:

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & -4 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -2-2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Para que las rectas r_A y r_B se corte es necesario que $\text{Rango}(A) = 2 \Longrightarrow \lambda = -1$. En este caso puede ser también que las rectas sean paralelas, para eliminar esta posibilidad se estudia:

$$\text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_{r_A}} \\ \overrightarrow{u_{r_B}} \end{array} \right) = 2, \ \text{ya que} \ \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow r_A \ \text{y} \ r_B \ \text{se cortan}$$

b) Plano definido por r_B y r_C:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_B}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{u_{r_C}} = (1,1,-2) \\ B(1,-2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & -2 & z-3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x-y-3=0$$

$$\overrightarrow{\pi} = (1,-1,0) \perp \overrightarrow{u_{r_A}} \Longrightarrow \overrightarrow{\pi} \cdot \overrightarrow{u_{r_A}} = 0$$

$$(1,-1,0)\cdot(1,\lambda,2) = 1-\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

c)

$$\cos\alpha \frac{u_{r_B} \cdot u_{r_C}}{|u_{r_B}||u_{r_C}|} = \frac{1+1-2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

2.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.14.12 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x-2y+z = 6$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{m} = z$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π según los valores de m.

b) (1 punto). Para $m = -2$, determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Para $m=-2$, determinar el punto de corte de r y π.

Solución:

$$r_m:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda\\ y=-2+m\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right. \qquad \pi: x-2y+z=6$$

a) $(1+2\lambda)-2(-2+m\lambda)+\lambda=6 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{1}{3-2m}$:
Si $m=\dfrac{3}{2} \Longrightarrow r$ y π son paralelos, en caso contrario se cortan en un punto.

b) Para $m=-2$:

$$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,-2,1)\\ P_r(1,-2,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc} x-1 & y+2 & z\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': y+2z+2=0$$

c) Para $m=-2 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{1}{3-2m}=\dfrac{1}{7}$:

$$\left(\frac{9}{7},-\frac{16}{7},\frac{1}{7}\right)$$

Opción B

Problema 2.14.13 *(3 puntos)* Dado el haz de planos de $\mathbb{R}^3$ definido por: $\pi_a \equiv x+2y+az-1=0$ (al variar a en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los planos del haz) y la recta $r\equiv \dfrac{x-1}{2}=y+3=\dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar para qué valores de a la recta r es paralela al plano π_a .

b) (1 punto). Razonar si hay algún valor de a tal que la recta r es perpendicular al plano π_a, y en caso afirmativo calcular dichos valores de a.

c) (1 punto). Si $a=1$, obtener los puntos de la recta r cuya distancia al plano π_1 es $\sqrt{6}$

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda\\ y=-3+\lambda\\ z=2\lambda \end{array}\right. \qquad \pi_a: x+2y+az-1=0$$

a) $\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_{\pi_a}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_{\pi_a}}=0$:

$$(2,1,2)\cdot(1,2,a)=2+2+2a=0 \Longrightarrow a=-2$$

b) $\overrightarrow{u_r}\parallel\overrightarrow{u_{\pi_a}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}=\lambda\overrightarrow{u_{\pi_a}}$:
$(2,1,2)=\lambda(1,2,a) \Longrightarrow 2=\lambda$, $1=2\lambda$ y $2=\lambda a$, lo que es imposible.

c) $P_r(1+2\lambda,-3+\lambda,2\lambda)$:

$$d(P_r,\pi)=\frac{|1+2\lambda+2(-3+\lambda)+2\lambda-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\sqrt{6} \Longrightarrow |\lambda-1|=1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda-1=1 \Longrightarrow \lambda=2 \Longrightarrow P_1(5,-1,4)\\ \lambda-1=-1 \Longrightarrow \lambda=0 \Longrightarrow P_2(1,-3,0) \end{array}\right.$$

2.15. Año 2014

2.15.1. Modelo

Opción A

Problema 2.15.1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1;1;1)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0; \quad \pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - z = 0;$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de a para los que los planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $a = 2$, hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto). Hallar el punto P' proyección de P sobre el plano π_3.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + ay + z = 0 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow |A| = a^2 + 3a - 10 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ a = -5$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial ($x = y = z = 0$).

Si $a = 2$ o $a = -5$ el sistema es compatible indeterminado (el sistema que forman los tres planos es homogéneo)

Cuando $a = 2$ o $a = -5$ se cortan los tres planos en una recta, que calculo a continuación: Cuando $a = 2$: $F_1 = F_2 + F_3$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Cuando $a = -5$:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 5y + z = 0 \\ -5x + y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - 5y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/2\lambda \\ y = 1/2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

b)

$$r : \left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, -4 - 1) \\ P_r = O(0,0,0) \end{array}\right.$$

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (3, -4 - 1) \\ P(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$3x - 4y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 3 - 4 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

$$3x - 4y - z + 2 = 0$$

c) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, 1, -1)$ Calculamos $t \perp \pi_3$ que pasa por P:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, 1, -1) \\ P_t(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

Obtenemos P' como punto de corte de t con π_3:

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Opción B

Problema 2.15.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Determinar si se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre la rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{array} \right.$$

b) (2 puntos) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular común a las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(-2, -6, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, -2) \\ P_s(3, 1, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_r P_s} = (5, 7, -1)$$

a)

$$\left| \begin{array}{rrr} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right| = 9 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

No se puede construir el triángulo.

b) Se va a calcular como intersección de dos planos:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right| = -3(1, -1, 1)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(-2, -6, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 1 & x + 2 \\ -1 & 2 & y + 6 \\ 1 & 1 & z - 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - z + 3 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, -2) \\ P_s(3, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 1 & x - 3 \\ -1 & -1 & y - 1 \\ 1 & -2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y - 4 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x - z + 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{array} \right.$$

2.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.15.3 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.

b) (1 punto). Hallar la distancia de P a r.

c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $t\perp \pi/P\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,5,-6)\\ P_t=P(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=5\lambda\\ z=1-6\lambda\end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto de corte P'' de t con π:

$$(1+\lambda)+5(5\lambda)-6(1-6\lambda)=1\Longrightarrow \lambda=\frac{3}{31}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+3/31=34/31\\ y=15/31\\ z=1-18/31=13/5\end{array}\right. \Longrightarrow P''\left(\frac{34}{31},\frac{15}{31},\frac{13}{31}\right)$$

- ☛ El punto P'' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P':

$$\frac{P'+P}{2}=P''\Longrightarrow P'=2P''-P=$$

$$\left(\frac{68}{31},\frac{30}{31},\frac{26}{31}\right)-(1,0,1)=\left(\frac{37}{31},\frac{30}{31},-\frac{5}{31}\right)$$

b)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,0,1)\\ P_r(0,0,0)\end{array}\right. ,\quad \overrightarrow{P_rP}=(1,0,1)$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|=|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right||=|(0,-1,0)|=1$$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{1}{1}=1$$

c) Calculamos los puntos de corte de $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ con los ejes coordenados:
Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0$: $A(1, 0, 0)$
Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0$: $B(0, 1/5, 0)$
Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0$: $C(0, 0, -1/6)$
Luego:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0); \quad \overrightarrow{OB} = (0, 1/5, 0); \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, -1/6)$$

$$V = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{vmatrix} | = \frac{1}{180} \ u^3$$

Opción B

Problema 2.15.4 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto). Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r, y es paralela a π.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0, 2, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$2 \cdot 1 - (2 + 2\lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = -1$$

π y r se cortan en el punto $(1, 0, -1)$

b) $\pi' \perp \pi, \ \ r \in \pi'$:

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (0, 2, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x - 1 \\ -1 & 2 & y - 2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 2y - 4z - 5 = 0$$

c) Segimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos el plano $\pi'' \parallel \pi / A \in \pi''$:

$$\pi'' : 2x - y + \lambda = 0 \Longrightarrow -4 - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow \pi'' : 2x - y + 5 = 0$$

- ☛ Calculamos P punto de corte de r con π'':

$$2 - (2 + 2\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{5}{2}$$

$$P\left(1, 7, \frac{5}{2}\right)$$

- ☛ La recta buscada s pasa por los puntos A y P:

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{AP} = (3, 6, 5/2) \\ P_s(-2, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \\ z = \frac{5}{2}\lambda \end{cases}$$

2.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.15.5 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

a) (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0,0,0)$ que es tangente a π.

Solución:

a) Sean las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (a,b,c) \\ P_r(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a\lambda \\ y = b\lambda \\ z = c\lambda \end{array} \right.$ que se cortan en el punto $O(0,0,0)$.

Estas rectas tiene que formar un ángulo de 45° con el plano $z = 0$, es decir:

$$\sin\alpha = \frac{(a,b,c)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{0+0+1^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}c = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Por otro lado $\pi \parallel r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_r}$:

$$\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r} = (a,b,c)\cdot(2,-1,1) = 2a - b + c = 0 \Longrightarrow c = b - 2a$$

$$c^2 = b^2 + 4a^2 - 4ab \Longrightarrow b^2 + 4a^2 - 4ab = a^2 + b^2 \Longrightarrow a(3a - 4b) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0 \Longrightarrow c = b \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = (0,b,b) = b(0,1,1) \\ \\ a = \dfrac{4b}{3} \Longrightarrow c = -\dfrac{b}{3} \Longrightarrow \text{No válida } \left(-\dfrac{b}{3}\right)^2 \neq \left(\dfrac{4b}{3}\right)^2 + b^2 \end{array} \right.$$

$$r_b : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = b\lambda \\ z = b\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

b) El radio de la esfera es $r = d(O,\pi) = \dfrac{|0-0+0-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ y su centro en $O(0,0,0)$:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \Longrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 1$$

Problema 2.15.6 *(2 puntos)* Sean los puntos $A(2,1,0)$ y $B(0,1,-4)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.

b) (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2,-1,1)$.

Solución:

a) $d(A,\pi) = d(B,\pi) \Longrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2} \Longrightarrow \pi : x + 2z + 3 = 0$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = 2(1,0,2) \\ P_r = A(2,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow Q(2+\lambda, 1, 2\lambda)$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(\lambda, 2, 2\lambda - 1)| = \sqrt{\lambda^2 + 4 + (2\lambda-1)^2} = \sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$5\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \Longrightarrow Q_1(3,1,2) \\ \lambda = -\dfrac{1}{5} \Longrightarrow Q_2\left(\dfrac{9}{5}, 1, -\dfrac{2}{5}\right) \end{cases}$$

Opción B

Problema 2.15.7 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+6}{1} = \dfrac{z-8}{-3}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5,-2,1)$ sobre el plano π.

c) (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1,7,3)$ sobre la recta r.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,1,-3) \\ P_r(2,-6,8) \end{cases} \quad \overrightarrow{u_\pi} = (5,-3,4)$$

a) Cuando se habla de distancia de una recta a un plano entendemos que la recta es paralela al plano, si lo cortase la distancia sería cero y si está contenida en el plano también sería cero. Comprobamos el paralelismo:
$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} = (3,1,-3)\cdot(5,-3,4) = 0 \Longrightarrow$ lo que nos indica que o es paralela o está contenida en el plano.

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|10+18+32-10|}{\sqrt{25+9+16}} = 5\sqrt{2}\ u$$

b) Proyección de P sobre π:

- Calculamos la recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (5,-3,4) \\ P_t(5,-2,1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5+5\lambda \\ y = -2-3\lambda \\ z = 1+4\lambda \end{cases}$$

- P' proyección de P será el punto de corte de t y π:

$$5(5+5\lambda) - 3(-2-3\lambda) + 4(1+4\lambda) - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$P'\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

c) Proyección de Q sobre r:

- ☛ Calculamos un plano $\pi' \perp r/Q \in \pi'$:

$$\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (3, 1, -3) \Longrightarrow \pi' : 3x + y - 3z + \lambda = 0$$

$$3(-1) + 7 - 3(3) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow \pi' : 3x + y - 3z + 5 = 0$$

- ☛ Q' proyección de Q será el punto de corte de r y π':

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, -3) \\ P_r(2, -6, 8) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -6 + \lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{cases}$$

$$3(2 + 3\lambda) + (-6 + \lambda) - 3(8 - 3\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q'(5, -5, 5)$$

2.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.15.8 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$ y $D(0, 1, 4)$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -1)$:

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(0, 4, 16)| = 2\sqrt{17}\ u^2$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2, 1, 6)$

$$V = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{50}{3}\ u^3$$

Problema 2.15.9 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.

b) (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, 3, 2)$ y $\overrightarrow{u_r} = (0, 1, 0)$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_3}} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_{\pi_3}}||\overrightarrow{u_r}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \sin\alpha$$

Opción B

Problema 2.15.10 *(3 puntos)* Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π.

b) (1 punto). Calcular la distancia entre r y π.

c) (1 punto). Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π.

Solución:

a) $2(1 - 2t) - (2 - 2t) + 2(l + t) + 3 = 0 \Longrightarrow$ ¡5=0! Luego la recta r es paralela al plano π. Está claro que $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = -2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi}$

b) $P_r(1, 2, 1)$:

$$d(P_r, \pi) = \frac{2 - 2 + 2 + 3}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3}\ u$$

c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $s \perp \pi$ que pase por P:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 2) \\ P_s = P(3, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

- ☛ Encontramos el punto P'' de corte entre s y π:

$$2(3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P''(1, 3, -1)$$

- ☛ P'' es el punto medio entre P y el punto buscado P':

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P = (2, 6, -2) - (3, 2, 1) = (-1, 4, -3)$$

2.16. Año 2015

2.16.1. Modelo

Opción A

Problema 2.16.1 *(2 puntos)* Dadas las rectas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$; $s : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = z \end{array} \right.$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s, y que pasa por el punto $(0,0,0)$.

Solución:

a) $(1+2\lambda)+\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = 0$ luego las dos rectas se cortan en el punto $(1,0,0)$.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,1) \\ P_s(1,0,0) \end{array} \right.$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|} = \frac{-2+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0,-1,1) \\ P_t(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow t: \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 3(0,-1,1)$$

Problema 2.16.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,-1,2)$, $P_2(2,-3,0)$ y $P_3(3,1,2)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1.

Solución:

a) $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-2,-2)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (2,2,0)$:

$$\pi: \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x-1 \\ -2 & 2 & y+1 \\ -2 & 0 & z-2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi: 2x-2y+3z-10 = 0$$

b)

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,3) \\ P_r(1,-1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 2+3\lambda \end{array} \right.$$

c) Calculo una recta r que pase por P_1 y perpendicular a π, la del apartado anterior. Ahora hay que encontrar los dos puntos de esta recta que estan a una distancia $\sqrt{17}$ de P_1 y estos serán los centros de las esferas:
Un punto C de r será $C(1+2\lambda, -1-2\lambda, 2+3\lambda)$

$$|\overrightarrow{CP_1}| = |(2\lambda, -2\lambda, 3\lambda)| = |\lambda|\sqrt{17} = \sqrt{17} \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \Longrightarrow C_1(3,-3,5) \Longrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2+(z-5)^2 = 17 \\ \lambda = -1 \Longrightarrow C_2(-1,1,-1) \Longrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 17 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.16.3 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,2,-1)$ y las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4\\ x-y-3z=-2 \end{array}\right. \quad ; \quad s:\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=-3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre r y s.

b) (1 punto). Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r.

c) (1 punto). Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,-1)\\ P_r(1,3,0) \end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(0,0,1)\\ P_s(2,-3,0) \end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(1,-6,0)$$

$$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=2(-2,1,-1)$$

$$[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-11\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|-11|}{\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}\ u$$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,2,0)$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos un plano π perpendicular a r que contenga a P: $\pi:-2x+y-z+\lambda=0\Longrightarrow -2+2+1+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-1$ luego el plano buscado es $\pi:-2x+y-z-1=0$
- ☛ Calculamos el punto de corte P'' de r y π:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1-2t\\ y=3+t\\ z=-t \end{array}\right. \Longrightarrow -2(1-2t)+(3+t)-(-t)-1=0\Longrightarrow t=0\Longrightarrow P''(1,3,0)$$

- ☛

$$P''=\frac{P+P'}{2}\Longrightarrow P'=2P''-P=2(1,3,0)-(1,2,-1)=(1,4,1)\Longrightarrow P'(1,4,1)$$

c) El plano XY es el plano $\pi':z=0$ y el plano YZ es el plano $\pi'':x=0$. Sea P''' un punto de la recta r que cumple $d(P''',\pi')=d(P''',\pi'')$ donde $P'''(1-2t,3+t,-t)$:

$$\frac{|-t|}{1}=\frac{|1-2t|}{1}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} -t=1-2t\Longrightarrow t=1\Longrightarrow H(-1,4,-1)\\ -t=-1+2t\Longrightarrow t=1/3\Longrightarrow Q(1/3,10/3,-1/3) \end{array}\right.$$

2.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.16.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados vectores $\overrightarrow{u} = (2,3,4)$, $\overrightarrow{v} = (-1,-1,-1)$ y $\overrightarrow{w} = (-1,\lambda,-5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 6.

b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\overrightarrow{u} = (2,-1,4)$ y que pasa por el punto $(1,1,0)$.

Solución:

a)

$$V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = |\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix}| = |-2\lambda - 6| = 6 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = -6$$

b) $r \in \pi : z = 0$, $r \perp \overrightarrow{u} = (2,-1,4)$ y $P(1,1,0) \in r$:

$$r \in \pi : z = 0 \Longrightarrow r \perp \overrightarrow{u_\pi} = (0,0,1) \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1,2,0)$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,0) \\ P_r(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2.16.5 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

Solución: La esfera tiene de centro el punto $C(1,1,2)$ y radio 3. Construimos una recta r perpendicular a π que pase por C:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,2) \\ P_r = C(1,1,2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Encontramos los puntos de corte de esta recta r con la esfera:

$$(1 + \lambda - 1)^2 + (1 - 2\lambda - 1)^2 + (2 + 2\lambda - 2)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = \pm 1 \Longrightarrow P_1(2,-1,4),\ \ P_2(0,3,0)$$

Calculamos:

$$\pi_1 : \begin{cases} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_1(2,-1,4) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : x - 2y + 2z - 12 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_2(0,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : x - 2y + 2z + 6 = 0$$

Opción B

Problema 2.16.6 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas O, y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=-4+4\lambda \\ y=8+3\lambda \\ z=-2\lambda \end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) (1 punto). Determinar la distancia de P a r.

c) (1 punto). ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

Solución:

a) Un punto de la recta r es $Q(-4+4\lambda, 8+3\lambda, -2\lambda)$ y el punto medio de $\overline{OP}$ será $Q' = \dfrac{O+P}{2} = (-2,3,3)$.
Construimos el vector $\overrightarrow{Q'Q} = (-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda)$ y el vector $\overrightarrow{OP} = (-4,6,6)$. Imponemos $\overrightarrow{Q'Q} \perp \overrightarrow{OP} \Longrightarrow \overrightarrow{Q'Q}\cdot\overrightarrow{OP} = 0$
$8-16\lambda+30+18\lambda-18-12\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow Q(4,14,-4)$

b)

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (4,3,-2) \\ P_r(-4,8,0) \end{array}\right. ,\quad \overrightarrow{P_rP} = (0,-2,6)$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}| = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{array}\right| = |(14,-24,-8)| = 2\sqrt{209},\ \text{ y } |\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{29}$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = 2\sqrt{\frac{209}{29}} \simeq 5,37\ u$$

c) Para que los puntos O, P y R estén alineados las rectas

$$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{OP} = (-4,6,6) = 2(-2,3,3) \\ P_s = O(0,0,0) \end{array}\right.$$

y la recta r tienen que cortarse en el punto R.
Para ver la posición relativa entre ambas construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (-4,8,0)$ y hacemos el producto mixto:

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left|\begin{array}{ccc} -4 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{array}\right| = -124 \neq 0$$

Luego las rectas r y s se cruzan y, por tanto, los puntos en cuestión no están alineados.

2.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.16.7 *(3 puntos)* Dados la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{array} \right.$, con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los valores de a para los que la recta r es paralela al plano π.

b) (1 punto). Para $a = 2$, determinar la distancia de la recta r al plano π.

c) (1 punto). Para $a = 1$, hallar el seno del ángulo que forman r y π.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{array} \right| = (1 - a^2, 1, a)$, $r \parallel \pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0$

$$(1 - a^2, 1, a) \cdot (1, 1, 1) = -a^2 + a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = 2$$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 1, 2) \\ P_r(2, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$

$(2 - 3\lambda) + (2 + \lambda) + 2\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow 2 = 0$ lo que nos indica que la recta es paralela al plano como se sabía por el apartado anterior.

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 + 2 + 0 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ u$$

c) $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y - z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P_r(4, 4, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \ u$$

Opción B

Problema 2.16.8 *(2 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{array} \right.$ y $s \equiv \dfrac{x + 1}{2} = y - 5 = -(z + 2)$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 6, -3)$, está contenida en el plano que determinan r y s y es perpendicular a r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 3) \\ P_r(3, 2, 3) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, -1) \\ P_s(-1, 5, -2) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (4, -3, 5)$$

a) $[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Calculamos el plano $\pi/r,s\subset\pi$:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-2,3)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,1,-1)\\ P_r(3,2,3)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-3\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi: x-7y-5z+26=0$$

Calculamos el plano $\pi'/r\perp\pi'$ y $P\in\pi'$:

$$\pi': x-2y+3z+\lambda=0\Longrightarrow 1-12-9+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=20\Longrightarrow \pi': x-2y+3z+20=0$$

La recta t que buscamos será:

$$t:\left\{\begin{array}{l} x-7y-5z+26=0\\ x-2y+3z+20=0\end{array}\right.$$

Problema 2.16.9 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi\equiv x+y-z+1=0$ y la recta $r\equiv(x,y,z)=(0,0,1)+\lambda(2,1,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,-1)$ y es paralelo a π.

b) (1 punto). Determinar la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

c) (0,5 puntos). Determinar la distancia del origen de coordenadas al plano π.

Solución:

a) $\pi'\parallel\pi\Longrightarrow\pi': x+y-z+\lambda=0\Longrightarrow 1+0+1+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-2\Longrightarrow\pi': x+y-z-2=0.$

b) $|\overrightarrow{OP_r}\times\overrightarrow{u_r}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}|=|(-1,2,0)|=\sqrt{5}$

$d(O,r)=\frac{|\overrightarrow{OP_r}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt5}{\sqrt5}=1\ u^2$

c) $d(O,\pi)=\dfrac{|0+0-0+1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ u$

2.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.16.10 *(3 puntos)* La recta r pasa por $P(2,-1,0)$ y tiene vector director $(1,\lambda,-2)$; la recta s pasa por $Q(1,0,-1)$ y tiene vector director $(2,4,2)$.

a) (2 puntos). Calcular $\lambda>0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.

b) (1 punto). Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,\lambda,-2)\\ P_r=P(2,-1,0)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,4,2)\\ P_s=Q(1,0,-1)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_sP_r}=(1,-1,1)$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{18}{2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}}=\frac{9}{\sqrt{59}}\Longrightarrow$$

$$\lambda=3 \ \text{ y } \ \lambda=-5 \text{ (No válida)}$$

$$|[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\left|\begin{array}{ccc}1&-1&1\\1&\lambda&-2\\2&4&2\end{array}\right||=18$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&\lambda&-2\\2&4&2\end{array}\right||=|2(\lambda+4,-3,2-\lambda)|=2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}$$

b)

$$h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{QP}=(1,-1,1)\\ P_h=Q(1,0,-1)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{u_h}\Longrightarrow\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{u_h}=0$$

$$(1,\lambda,-2)\cdot(1,-1,1)=1-\lambda-2=0\Longrightarrow\lambda=-1$$

Opción B

Problema 2.16.11 *(3 puntos)* Dados los puntos $P(-1,-1,1)$, $Q(1,0,2)$ y los planos

$$\pi_1\equiv x-z=0;\quad \pi_2\equiv my-6z=0;\quad \pi_3\equiv x+y-mz=0$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) (1 punto). Para $m=3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

Solución:

a)

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1&0&-1\\0&m&-6\\1&1&-m\end{array}\right)\quad |A|=-m^2+m+6=0\Longrightarrow m=3,\ \ m=-2$$

Para estos valores de m los tres planos se cortan en una recta.

b) Si $m = 3$:

$$h : \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} = (1, 2, 1) \\ P_h(0, 0, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi : x + 2y + z + \theta = 0 \Longrightarrow -1 - 2 + 1 + \theta = 0 \Longrightarrow \theta = 2 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + 2y + z + 2 = 0$$

c) Calculamos la recta $t \perp \pi_1$ y $P \in t$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (1, 0, -1) \\ P_t(-1, -1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

Calculamos P'' punto de corte de t con π_1:

$$(-1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P''(0, -1, 0)$$

Tenemos:

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \Longrightarrow P' = 2P'' - P = (1, -1, -1)$$

$$d(QP') = |\overrightarrow{QP'}| = |(0, -1, -3)| = \sqrt{10}\ u$$

2.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.16.12 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$ y $P(1, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta que pasa por A y B.

b) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto C que forma con A y B un triángulo rectángulo en C, sabiendo que C está en el eje OX y tiene primera coordenada negativa.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = (2, 1, 4) \\ P_r = B(0, 0, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 4) \\ \overrightarrow{PA} = (1, 0, 0) \\ P_r = P(1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4y - z - 3$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, -4)$ y $\overrightarrow{AP} = (-1, 0, 0)$:

$$S = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|(0, 4, -1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c) $C(a, 0, 0) \Longrightarrow = (2 - a, 1, 1)$ y $\overrightarrow{CB} = (-a, 0, -3)$ Como $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Longrightarrow$

$$(2 - a, 1, 1) \cdot (-a, 0, -3) = 0 \Longrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3,\ \ a = -1$$

La solución pedida es la negativa: $C(-1, 0, 0)$.

Opción B

Problema 2.16.13 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(-1, 4, 1)$ y la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \dfrac{z-1}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el seno del ángulo formado por π y r.

b) (1 punto). Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por A y es perpendicular a π.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(1, -1, 1) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 2)$$

a) $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|} = \dfrac{2}{3}$

b) $s \perp \pi / A \in s \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \\ P_s(-1, 4, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$

Problema 2.16.14 *(2 puntos)* Dado el vector $\overrightarrow{v} = (1, 0, -2)$, se pide:

a) (1 punto). Obtener todos los vectores de módulo $\sqrt{5}$ que son perpendiculares al vector $\overrightarrow{v}$ y tienen alguna coordenada nula.

b) (1 punto). Obtener los vectores $\overrightarrow{w}$ tales que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (2, -3, 1)$ y tienen módulo $\sqrt{6}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \perp \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longrightarrow a - 2c = 0 \Longrightarrow a = 2c$

$$\overrightarrow{w} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5c^2 + b^2}}(2c, b, c)$$

Si $c = 0 \Longrightarrow b \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \dfrac{\sqrt{5}}{b}(0, b, 0) = (0, \sqrt{5}, 0)$. Si $c \neq 0 \Longrightarrow$

$b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \dfrac{\sqrt{5}}{c\sqrt{5}}(2c, 0, c) = (2, 0, 1)$

b) $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{array} \right| = (-2b, -2a - c, b) = (2, -3, 1) \Longrightarrow$$

$b = 1, \;\; 2a + c = 3$

$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{a^2 + 1 + c^2} = \sqrt{6} \Longrightarrow a^2 + c^2 = 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + c = 3 \\ a^2 + c^2 = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2, \;\; c = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = (2, 1, -1) \\ \\ a = 2/5, \;\; c = 11/5 \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \left(\dfrac{2}{5}, 1, \dfrac{11}{5}\right) \end{array} \right.$$

2.17. Año 2016

2.17.1. Modelo

Opción A

Problema 2.17.1 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -1)$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & x-1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 3x + y - 3 = 0$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P_s = Q(2, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$

Problema 2.17.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

Solución:

a) El conjunto de puntos $R(x, y, z)$ que equidistan de P y Q es un plano mediador:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \Longrightarrow$$
$$2x + 4z - 9 = 0$$

b) La recta que pasa por P y Q es:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{QP} = (1, 0, 2) \\ P_r = Q(0, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

$$S(x, y, z) = (\lambda, 1, 1 + 2\lambda)$$

$$d(P, S) = 2d(Q, S) \Longrightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (-2 + 2\lambda)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda)^2} \Longrightarrow$$

$$\lambda = -1, \ \ \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow S_1(-1, 1, -1), \ \ S_2\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$$

Opción B

Problema 2.17.3 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1.

c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) El vector pedido es perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, -8, -10) \quad |\overrightarrow{u}| = 10\sqrt{2}$$

El vector $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{3}{5\sqrt{2}}, \dfrac{4}{5\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)$ es un vector paralelo a ambos planos.

b) $d(P, \pi_1) = \dfrac{|9 - 4 - 10 - 7|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}| \times |\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \dfrac{(3, 4, -5) \cdot (1, -2, 1)}{\sqrt{50} \times \sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.17.4 *(2 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) (1 punto). Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \parallel \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \Longrightarrow a = -1$$

b)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = a + a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1/2$$

c) $\pi \equiv x - y = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 0)$

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a+1, -(a+1), a^2-1) =$$

$$(a+1)(1, -1, a-1) = \lambda(1, -1, 0) \Longrightarrow$$
$$a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Pero en este caso los planos son paralelos y, por tanto, este resultados no es válido y no se puede encontrar la recta r pedida para ningún valor de a.

Problema 2.17.5 *(2 puntos)* Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$; $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

Solución:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -5, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2) \\ A(0, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -5 & -1 & y-2 \\ 1 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - z - 1 = 0$$

Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, -1) \\ P_t = P(2, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$(2 + \lambda) - (-1 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow P'(1, 1, 0)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$

$$(2, 2, 0) - (2, 1, -1) = (0, 1, 1)$$

Opción B

Problema 2.17.6 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

a) (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,-1)\\ \overrightarrow{AD}=(2,-2,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr}0&1&1\\2&-1&-1\\2&-2&-2\end{array}\right|=0\Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}$, luego se trata de un paralelogramo.

b)

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\left|\begin{array}{rrr}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\0&1&1\\2&-2&-2\end{array}\right||=2|(0,1,-1)|=2\sqrt{2}\ u^2$$

c) Se trata de una recta r que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
Calculamos el centro de este paralelogramo:

$$Centro=\frac{A+C}{2}=\left(1,\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal al plano π que contiene al paralelogramo:

$$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=2(0,1,-1)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(0,1,-1)\\ P_r(1,\frac{9}{2},\frac{5}{2})\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=9/2+\lambda\\ z=5/2-\lambda\end{array}\right.$$

2.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.17.7 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1\equiv\left\{\begin{array}{ll}x=&z-1\\ y=&2-3z\end{array}\right.$ y $r_2\equiv\left\{\begin{array}{ll}x=&4+5z\\ y=&4z-3\end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a r_1 y a r_2.

Solución:

a) $r_1\equiv\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(1,-3,1)\\ P_{r_1}(-1,2,0)\end{array}\right.$, $r_2\equiv\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(5,4,1)\\ P_{r_2}(4,-3,0)\end{array}\right.$ y $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(5,-5,0)$ $[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]=$ $\left|\begin{array}{rrr}5&-5&0\\1&-3&1\\5&4&1\end{array}\right|=-55\neq 0\Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{55}{\sqrt{426}}=\frac{55\sqrt{426}}{426}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}| = |(-7,4,19)| = \sqrt{426}$$

b) Obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_{r_1}} = (-1,0,2) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-3,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x+y+z=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_{r_2}} = (4,-3,0) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (5,4,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ -3 & 4 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : 3x+4y-31z=0$$

$$t : \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+4y-31z=0 \end{cases}$$

Opción B

Problema 2.17.8 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x-y+2z+3=0$, el punto $A(1,1,3)$ y la recta $r \equiv x = y-2 = \dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto A a la recta r.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto A sobre el plano π.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(0,2,0) \end{cases}, \quad A(1,1,3), \quad \overrightarrow{P_rA} = (1,-1,3)$$

a)

$$d(A,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}\,u$$

$$|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}| = |(-5,1,2)| = \sqrt{30}$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos la recta $t \perp \pi / A \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,2) \\ P_t = A(1,1,3) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}$$

- ☛ Calculamos A' proyección de A como punto de corte de t y π:

$$(1+\lambda)-(1-\lambda)+2(3+2\lambda)+3=0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

$$A'\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$$

Problema 2.17.9 *(2 puntos)* Dada una recta r cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ con $a, b, c > 0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Si r forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OY, determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ.

b) (0,5 puntos). Si $\overrightarrow{v} = (1, 5, 3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3, 0, 1)$.

Solución:

a) Tenemos que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\gamma = 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\gamma = 1 \Longrightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \Longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}$$

b) $\pi : x + 5 + 3z + \lambda = 0$ sustituyendo el punto $3 + 0 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -6$:

$$\pi : x + 5y + 3z - 6 = 0$$

2.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.17.10 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r : \left\{\begin{array}{l} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{array}\right.$ y $s : \{(2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda); \lambda \in R\}$

a) (1 punto). Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r.

b) (1 punto). Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, 1) \\ P_r(1, 3, 0) \end{array}\right. \qquad s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -3, 1) \\ P_s(2, 1, 0) \end{array}\right.$$

a) Seguimos el siguiente proceso:

- ☛ Calculamos $\pi_1 \perp r / P(1, 0, 5) \in \pi_1$:

$$2x - 3y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 - 0 + 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -7$$

$$\pi_1 : 2x - 3y + z - 7 = 0$$

- ☛ Calculamos el punto de corte P' de π_1 con r:

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$2(1 + 2\lambda) - 3(3 - 3\lambda) + (\lambda) - 7 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(3, 0, 1).$$

☛ La recta t buscada pasa por P y P':

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{PP'}=(3,0,1)-(1,0,5)=(2,0,-4)\\ P_t=P(1,0,5)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=0\\ z=5-4\lambda\end{array}\right.$$

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-3,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,-3,1)\\ P_r(1,3,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}2&1&x-1\\-3&-3&y-3\\1&1&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow y+3z-3=0$$

c) $\overrightarrow{P_rP_s}=(1,-2,0)$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|=|\left|\begin{array}{ccc}1&-2&0\\2&-3&1\\1&-3&1\end{array}\right||=2$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\2&-3&1\\1&-3&1\end{array}\right||=|(0,-1,-3)|=\sqrt{10}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}\ u$$

Opción B

Problema 2.17.11 *(2 puntos)* Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(-1,-2,-1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Solución:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,-2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-4,-2)\\ A(0,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}1&-1&x\\-2&-4&y-2\\0&-2&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 2x+y-3z+1=0$$

Puntos de corte con los ejes:
Con OX: $y=0$ y $z=0\Longrightarrow x=-1/2\Longrightarrow P_1(-1/2,0,0)$
Con OY: $x=0$ y $z=0\Longrightarrow y=-1\Longrightarrow P_2(0,-1,0)$
Con OZ: $x=0$ y $y=0\Longrightarrow z=1/3\Longrightarrow P_3(0,0,1/3)$
Con el origen formamos los vectores:
$\overrightarrow{OP_1}=(-1/2,0,0)$, $\overrightarrow{OP_2}=(0,-1,0)$ y $\overrightarrow{OP_3}=(0,0,1/3)$. El volumen de este tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}-1/2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1/3\end{array}\right||=\frac{1}{6}\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{36}\ u^3$$

Problema 2.17.12 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi: 3x+3y+z-9=0$, se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) (1 punto). Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

Solución:

a) $\pi' \perp \pi / OX \subset \pi'$:

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (3,3,1) \\ \overrightarrow{u_{OX}} = (1,0,0) \\ P = O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & x \\ 3 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : y - 3z = 0$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

☛ Calculamos una recta $r \perp \pi / O \in r$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (3,3,1) \\ P_r = O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

☛ Calculamos el punto de corte de r con π, que será el punto del plano más cercano al origen:

$$3(3\lambda) + 3(3\lambda) + \lambda - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{9}{19} \Longrightarrow P\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$$

2.18. Año 2017

2.18.1. Modelo

Opción A

Problema 2.18.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $y = 0$.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (5,1,2) \\ P_r(2,3,-1) \end{array} \right.$ $\quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,0) \\ P_s(1,3,2) \end{array} \right.$ $\quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,0,3)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{rrr} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = -20 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right|| = |(2,2,-6)| = 2\sqrt{11}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{20}{2\sqrt{11}} = \frac{10\sqrt{11}}{11}\ u$$

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (5, 1, 2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 0) \\ P_r(2, 3, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y-3 & z+1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x + y - 3z - 8 = 0$$

c) $\pi' : y = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = (0, 1, 0)$ y $\overrightarrow{u_r} = (5, 1, 2)$:

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_{\pi'}} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_{\pi'}}||\overrightarrow{u_r}|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Longrightarrow \alpha = 10^\circ 31' 11''$$

Opción B

Problema 2.18.2 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(0, 0, -3)$, y $P(1, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B.

Solución:

a)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (2, 1, 4) \\ \overrightarrow{BP} = (1, 1, 4) \\ B(0, 0, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z+3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4y - z - 3 = 0$$

b)

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP}| = \frac{1}{2}|\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right|| = \frac{1}{2}|(0, -4, 1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = (2, 1, 4) \\ P_r = B(0, 0, -3) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP} = \overrightarrow{BP} = (1, 1, 4)$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{\frac{17}{21}}\ u$$

2.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.18.3 *(3 puntos)* Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

c) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución:

a)

$$\pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-5, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (-4, 3, 1) \\ P(1, -2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + 5y - 7z + 15 = 0$$

b)

$$r : \pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} = (-5, 2, 0) \\ P_r = P(1, -2, 1) \end{array} \right. \quad r : \pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{RS} = (3, -4, -2) \\ P_s = S(0, -3, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (1, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ y Rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan}$$

c)

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} | = \frac{1}{2}|(2, 5, 7)| = \frac{\sqrt{78}}{2}\ u$$

Opción B

Problema 2.18.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \text{ y } r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

Solución:

a) $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 1, 1) \\ P_{r_1}(0, 0, 0) \end{array} \right. \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1, -1, 1) \\ P_{r_2}(-1, 2, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-1, 2, 0)$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |-2| = 2$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} | = |(2, 0, 2)| = 2\sqrt{2}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(0, 2, 1) \end{array} \right.$, un plano $\pi \perp s$ tal que $O \in \pi \Longrightarrow \pi :$ $x - y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x - y + z = 0$

El punto de corte de π con s:

$\lambda - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3} \right)$

2.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.5 *(3 puntos)* Dada la recta $r \equiv x - 1 = y = z$, se pide:

a) (1 punto) Calcular la ecuación de una recta r', con dirección perpendicular a r, que esté contenida en el plano OXY y pase por el punto $(1, 2, 0)$.

b) (1 punto) Hallar un plano perpendicular a OXY, que contenga a la recta r.

c) (1 punto) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ a la recta r.

Solución:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right.$$

a) El plano $\pi(OXY) : z = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (0, 0, 1)$. Si $r' \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r'}} = (a, b, 0)$ y como $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_{r'}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_{r'}} = 0 \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow b = -a \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r'}} = (a, -a, 0) = a(1, -1, 0)$, luego podemos coger $\overrightarrow{u_{r'}} = (1, -1, 0) \Longrightarrow r' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r'}} = (1,-1,0) \\ P_{r'}(1,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r' : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$

b)

$$\pi' : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : x - y - 1 = 0$$

c) $|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|| = |(0, -1, 1)| = \sqrt{2}\ u$

$$d(O, r) = \frac{|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u$$

Opción B

Problema 2.18.6 *(3 puntos)* Dado el punto $P(5, 7, 10)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x+2y+3z = 7$; se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto P', simétrico de P respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la posición relativa del plano π y la recta que pasa por el punto $Q(1, 1, 1)$ y tiene dirección $\overrightarrow{v} = (-10, 2, 2)$.

c) (1 punto) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos P, Q y al origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calcular $r \perp \pi / P \in r \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ P_r = P(5,7,10) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 10 + 3\lambda \end{array} \right.$

☛ Calcular P' punto de corte de r con π:

$$(5+\lambda)+2(7+2\lambda)+3(10+3\lambda)=7 \Longrightarrow \lambda=-3 \Longrightarrow P'(2,1,1)$$

☛ $\dfrac{P+P''}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=2(2,1,1)-(5,7,10)=(-1,-5-8)$

b) $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v}=(-10,2,2)=2(-5,1,1)\\ P_s=Q(1,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1-5\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$. Calculamos el posible punto de corte entre s y π:

$$(1-5\lambda)+2(1+\lambda)+3(1+\lambda)=7 \Longrightarrow !`6=7! \Longrightarrow s \text{ y } \pi \text{ son paralelos.}$$

c) $S_T=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 5 & 7 & 10\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right||=\dfrac{1}{2}|(-3,5,-2)|=\dfrac{\sqrt{38}}{2}\ u^2$

2.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.18.7 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1\equiv\left\{\begin{array}{l}6x-y-z=1\\ 2x-y+z=1\end{array}\right.$ y $r_2\equiv\left\{\begin{array}{l}3x-5y-2z=3\\ 3x+y+4z=3\end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1,2,3)$.

Solución:

a) $r_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(1,4,2)\\ P_{r_1}(0,-1,0)\end{array}\right.$, $r_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(-1,-1,1)\\ P_{r_2}(1,0,0)\end{array}\right.$ $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(1,1,0)$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]=\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{array}\right|=3\neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}},\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{|3|}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{array}\right||=|3(2,-1,1)|=3\sqrt{6}$$

c)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_{r_1}P}=(1,3,3)\\ \overrightarrow{u_{r_1}}=(1,4,2)\\ P_{r_1}(0,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x & y+1 & z\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi: 6x-y-z-1=0$$

Opción B

Problema 2.18.8 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

Solución:

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,1)\\ P_r(3,2,0)\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=3+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rQ}=(0,3,-3)$

$$d(Q,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}|=|(0,-6,-6)|=6\sqrt{2}$$

b) Calculamos $\pi\perp r\Longrightarrow \pi: 2x-y+z+\lambda=0$, imponemos que $Q\in\pi\Longrightarrow 6-5-3+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow\pi: 2x-y+z+2=0$.

Calculamos el punto de corte de r con π: $2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+\lambda+2=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow$ el punto de corte será: $Q'(1,3,-1)$

Problema 2.18.9 *(2 puntos)* Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,3,-1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,5,1)$ y se pide

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

Solución:

$$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1),\quad \overrightarrow{AC}=(1,2,2),\quad \overrightarrow{BC}=(-1,4,1)$$

a) $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{AC}|=3$ y $|\overrightarrow{BC}|=3\sqrt{2}$. Como tiene dos lados iguales es un triángulo isósceles.

b) $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2-4+2}{9}=0\Longrightarrow\alpha=90^\circ$, luego se trata de un triángulo rectángulo e isósceles y los otros dos ángulos tienen que ser iguales $\beta=\gamma\Longrightarrow\beta=\gamma=45^\circ$.

2.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.10 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1\equiv 2x+y-z=1\ \text{ y }\ \pi_2\equiv x+2y+z=3$$

, se pide:

a) (1 punto) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto) Calcular la recta paralela a π_1, paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1,1,1)$.

Solución:

a) $P(x,y,z)$ tales que $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$:

$$\frac{|2x+y-z-1|}{\sqrt{6}}=\frac{|x+2y+z-3|}{\sqrt{6}}\Longrightarrow |2x+y-z-1|=|x+2y+z-3|\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z-1=x+2y+z-3\Longrightarrow \pi_1':x-y-2z+2=0\\ 2x+y-z-1=-x-2y-z+3\Longrightarrow \pi_2':3x+3y-4=0\end{array}\right.$$

b) La recta paralela a π_1 y π_2 tiene que ser paralela a la intersección de ambos planos.

$$\overrightarrow{u_r}=|\overrightarrow{u_{\pi_1}}\times\overrightarrow{u_{\pi_2}}|=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 2&1&-1\\ 1&2&1\end{array}\right|=(3,-3,3)=3(1,-1,1)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1)\\ P_r=A(1,-1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 2.18.11 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,1,3)$, $P_2(0,0,3)$, $P_3(4,-3,1)$ y $O(0,0,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el plano π que contiene los puntos P_1, P_2, P_3.

b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi'\equiv x+y-z+3=0$.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3.

Solución:

a) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_2P_3}=(4,-3,-2)\\ \overrightarrow{P_2P_1}=(1,1,0)\\ P_2(0,0,3)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x&y&z-3\\ 4&-3&-2\\ 1&1&0\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$2x-2y+7z-21=0$$

b) Seguimos el siguiente proceso:

- ☛ Calculamos $r\perp\pi'/O\in r\Longrightarrow \overrightarrow{r}=(1,1,-1)$:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=-\lambda\end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto de corte de r con π':

$$\lambda+\lambda+\lambda+3=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow O'(-1,-1,1)$$

☛ $\dfrac{O+O''}{2}=O'\Longrightarrow O''=2O'-O=(-2,-2,2)$

c) $\overrightarrow{OP_1}=(1,1,3)$, $\overrightarrow{OP_2}=(0,0,3)$ y $\overrightarrow{OP_3}=(4,-3,1)$:

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 1\end{array}\right||=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\ u^3$$

2.19. Año 2018

2.19.1. Modelo

Opción A

Problema 2.19.1 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1\equiv 3x+y+2z-1=0$, $\pi_2\equiv 2x-y+3z-1=0$ y la recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1-2t\\ y=-1+t\\ z=1+t\end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2,3,2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2.

Solución:

a) Sea $P_r(1-2t,-1+t,1+t)$ un punto cualquiera de la recta r:

$$d(P_r,\pi_1)=d(P_r,\pi_2)\Longrightarrow$$

$$\frac{|3(1-2t)+(-1+t)+2(1+t)-1|}{\sqrt{14}}=\frac{|2(1-2t)-(-1+t)+3(1+t)-1|}{\sqrt{14}}\Longrightarrow$$

$$|-3t+3|=|-2t+5|\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} -3t+3=-2t+5\Longrightarrow t=-2\Longrightarrow P_1(5,-3,-1)\\ -3t+3=2t-5\Longrightarrow t=8/5\Longrightarrow P_2(-11/5,3/5,13/5)\end{array}\right.$$

b) Corte de r con π_1:
$-3t+3=0\Longrightarrow t=1\Longrightarrow A(-1,0,2)$
Corte de r con π_2:
$-2t+5=0\Longrightarrow t=5/2\Longrightarrow A(-4,3/2,7/2)$
$\overrightarrow{PA}=(1,-3,0)$ y $\overrightarrow{PB}=(-2,-3/2,3/2)$:

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -3 & 0\\ -2 & -3/2 & 3/2\end{array}\right||=\frac{3\sqrt{35}}{4}\ u^2$$

Opción B

Problema 2.19.2 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1\equiv x+y=0$, $\pi_2\equiv x=0$ y el punto $B(-1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto B', simétrico de B respecto del plano π_2.

b) (1 punto) Obtener una ecuación de la recta r, contenida en el plano π_1, paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calcular la recta $t \perp \pi_2/B \in t$. Tenemos $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1,0,0)$: $t : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
- ☛ Calcular el punto de corte B'' de t con π_2: $1-\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow B''(0,1,1)$
- ☛ $\dfrac{B+B'}{2} = B'' \Longrightarrow B' = 2B'' - B = (0,2,2) - (-1,1,1) = (1,1,1)$

b) $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1) \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1-\lambda \end{cases}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ radianes.

2.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.19.3 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$;, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1,5 punto) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2;1;3)$ y $B(1;2;3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

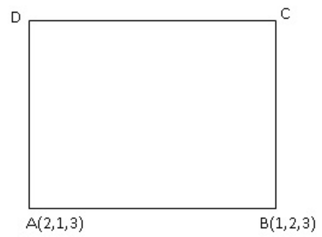
Solución:

a) La única posibilidad de que el cubo tenga una cara en cada plano es que éstos sean paralelos. En el caso de que no lo fueran, es decir, si se cortan cabría la posibilidad de que fuesen perpendiculares, pero en este caso habría infinitas soluciones. Veamos que son paralelos: $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{-12}{6} \neq \dfrac{1}{-5} \Longrightarrow$ paralelos. La longitud del lado del cubo buscado será $l = d(\pi_2, \pi_1)$, para calcular esta distancia tomamos un punto cualquiera A de $\pi_2 : -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \Longrightarrow A(0,0,5/6)$ y tendremos:

$$l = d(\pi_2, \pi_1) = d(A, \pi_1) = \frac{|0 + 0 - 12 \cdot 5/6 + 1|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \frac{|-9|}{\sqrt{196}} = \frac{9}{14}$$

$$V = l^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744} = 0,266\ u^2$$

b) El cuadrado es:



$$C \in r = \pi_2 \cap \pi_3 \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} -2x - 3y + 6z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1+3\lambda}{5} \\ y = \dfrac{-9+8\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Luego $C\left(\dfrac{1+3\lambda}{5}, \dfrac{-9+8\lambda}{5}, \lambda\right)$. Por ser un cuadrado $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

El vector $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ y el $\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{1+3\lambda}{5}, \dfrac{-9+8\lambda}{5}, \lambda\right) - (1, 2, 3) =$
$\left(\dfrac{-4+3\lambda}{5}, \dfrac{-19+8\lambda}{5}, \lambda - 3\right)$. Luego $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{4-3\lambda}{5} + \dfrac{-19+8\lambda}{5} = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow$
$C(2, 3, 3)$.
$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (2, 1, 3) + (1, 1, 0) = (3, 2, 3)$ (El vector $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 0)$)

Opción B

Problema 2.19.4 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{array} \right.$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Solución:

$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, -5) \\ P_r(0, 2, 6) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-3, 3, 1) \\ P_s(2, -1, 1) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{PP_r} = (-1, 1, 5)$ y $|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = |\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -5 \end{array} \right|| = |(5, 0, 1)| = \sqrt{26}$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} \simeq 0,931\ u$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, -3, -5)$ y $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

c) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_s} = (-3, 3, 1) \Longrightarrow \pi : -3x + 3y + z + \lambda = 0$ como $P \in \pi \Longrightarrow -3 + 3 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow$
$\lambda = -1$, luego $\pi : -3x + 3y + z - 1 = 0 \Longrightarrow \pi : 3x - 3y - z + 1 = 0$

2.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.19.5 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$, $R(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(0,1,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Encontrar el punto de intersección de r con el plano que contiene a P, Q y R.

b) (0,75 puntos) Hallar un punto T de r, tal que los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PT}$ sean linealmente dependientes.

c) (0,75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $O(0;0;0)$ y los puntos P, Q, R.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(0,1,1)\\ P_r=B(0,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

a) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{RP}=(1,1,0)\\ R(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}0&1&x\\1&1&y\\0&0&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: z-1=0$$

El punto de corte de r con π: $0+0+\lambda-1=0\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow (0,2,1)$

b) $T(0,1+\lambda,\lambda)$, $\overrightarrow{PQ}=(0,-1,0)$, $\overrightarrow{PR}=(-1,-1,0)$ y $\overrightarrow{PT}=(0,1+\lambda,\lambda)-(1,1,1)=(-1,\lambda,\lambda-1)$:

$$\left|\begin{array}{ccc}0&-1&0\\-1&-1&0\\-1&\lambda&\lambda-1\end{array}\right|=-\lambda+1=0\Longrightarrow\lambda=1$$

Si $\lambda=1$ los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PT}$ son linealmeente dependientes, luego $T(0,2,1)$.

c) $\overrightarrow{OP}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,0,1)$ y $\overrightarrow{OR}=(0,0,1)$:

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-1|=\frac{1}{6}\,u^3$$

Opción B

Problema 2.19.6 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=-2\\ y=-3+2\lambda\\ z=-\lambda\end{array}\right.$, $s\equiv\left\{\begin{array}{l}-x+y+2z+4=0\\ -x+2y+3z+5=0\end{array}\right.$ y el punto $P(-1,2,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,75 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por P y es paralelo a r y a s.

c) (0,75 puntos) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto P y el punto P' proyección de P sobre el plano $z=0$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(0,2,-1)\\ P_r(-2,-3,0)\end{array}\right. \text{ y } s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(3,-1,0)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (5,2,0) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ las rectas r y s se cruzan.

b) $\overrightarrow{u_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-2)$ como $P \in \pi \Longrightarrow x-y-2z+\lambda = 0 \Longrightarrow -1-2+2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \pi : x-y-2z+1 = 0$

c) Calculo de P' proyección de P sobre $\pi' : z = 0$:

- Calculamos una recta $t \perp \pi'/P \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0,0,1) \\ P_t = P(-1,2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1+\lambda \end{array} \right.$$

- calculamos P' punto de corte de t con π': $-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(-1,2,0)$

$\overrightarrow{OP} = (-1,2,-1)$ y $\overrightarrow{OP'} = (-1,2,0)$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(2,1,0)| = \frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$

2.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.19.7 *(2,5 puntos)* Se consideran los vectores $\overrightarrow{u} = (-1,2,3)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,-1)$ y el punto $A(-4,4,7)$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) (0,75 puntos) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

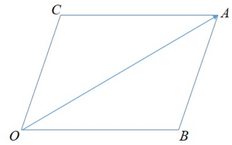
c) (0,75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

Solución:

a) $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-2,5,-4)| = \sqrt{45} \Longrightarrow \overrightarrow{w_1} = \left(\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}} \right)$

b) $\overrightarrow{w_2} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = a(-1,2,3) + b(2,0,-1) = (-a+2b, 2a, 3a-b)$ y $\overrightarrow{w_2} \perp \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{v} = (-a+2b, 2a, 3a-b) \cdot (2,0,-1) = -2a+4b+0-3a+b = 0 \Longrightarrow -5a+5b = 0 \Longrightarrow a = b$ Por ejemplo si $a = b = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{w_2} = (1,2,2)$

c) Tenemos:



$\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = a(-1,2,3) + b(2,0,-1) = (-a+2b, 2a, 3a-b) = (-4,4,7) \Longrightarrow a = 2$ y $b = -1$.
$\overrightarrow{OB} = 2(-1,2,3) \Longrightarrow B(-2,4,6)$ y $\overrightarrow{BA} = -(2,0,-1) = (-2,0,1) = \overrightarrow{OC} \Longrightarrow C(-2,0,1)$
Es decir, $O(0,0,0)$, $B(-2,4,6)$, $A(-4,4,7)$ y $C(-2,0,1)$.

Opción B

Problema 2.19.8 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (0,1,2)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.

b) (0,5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.

c) (1,5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (0,1,2) \\ P_r = Q(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right. \text{ y } P(0,-1,1)$$

a)

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0,1,2) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0,-1,1) - (1,0,1) = (-1,-1,0) \\ P_r(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\pi: \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right| = 2x - 2y + z - 3 = 0$$

b) $S \in r \Longrightarrow S(1, \lambda, 1+2\lambda)$ luego $\overrightarrow{SP} = (0,-1,1) - (1,\lambda,1+2\lambda) = (-1,-1-\lambda,-2\lambda)$ y como $\overrightarrow{SP} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow (-1,-1-\lambda,-2\lambda)\cdot(0,1,2) = -1-\lambda-4\lambda = 0 \Longrightarrow -1-5\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{5} \Longrightarrow S\left(1, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

c) Sea $T \in r$: $T(1,\lambda,1+2\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{PT} = (1,\lambda,1+2\lambda) - (0,-1,1) = (1,\lambda+1,2\lambda)$ y $|\overrightarrow{PT}| = \sqrt{1+(\lambda+1)^2+4\lambda^2} = \sqrt{5} \Longrightarrow \lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow$

$$T_1(1,-1,-1) \;\; T_2\left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PT_1} = (1,-1,-1) - (0,-1,1) = (1,0,-2) \quad \overrightarrow{PT_2} = \left(1, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right) - (0,-1,1) = \left(1, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&0&-2\\1&8/5&6/5\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{16}{5},\frac{-16}{5},\frac{8}{5}\right)\right|=$$

$$\frac{1}{2}\cdot 8\left|\left(\frac{2}{5},\frac{-2}{5},\frac{1}{5}\right)\right|=\frac{12}{5}=2,4\ u^2$$

2.20. Año 2019

2.20.1. Modelo

Opción A

Problema 2.20.1 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,2,-3)$; $B(1,5,0)$; $C(5,6,-1)$ y $D(4,-1,3)$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el plano π que contiene a los puntos A, B, C y la distancia del punto D a dicho plano.

b) (0,5 puntos) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

c) (0,5 punto) Calcular el área del triángulo definido por A, B y C.

Solución:

a) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,3,3)\\\overrightarrow{AC}=(4,4,2)\\A(1,2,-3)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-1&y-2&z+3\\0&3&3\\4&4&2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$

$$\pi: x-2y+2z+9=0$$

$$d(D,\pi)=\frac{|4+2+6+9|}{\sqrt{1+4+4}}=7\ u$$

b) $\overrightarrow{AD}=(3,-3,6)$

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}0&3&3\\4&4&2\\3&-3&6\end{vmatrix}|=\frac{|-126|}{6}=21\ u^3$$

c)

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\0&3&3\\4&4&2\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(-6,12,-12)|=9\ u^2$$

Opción B

Problema 2.20.2 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r:\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\y=3+\lambda\\z=1-\lambda\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\y+z=1\end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

c) (0,5 puntos) Dado el punto $A(3,1,0)$, de la recta s, obtener un punto B, de la recta r, de modo que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a la recta r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(2,3,1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,-1,1) \\ P_s(3,1,0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (-1,2,1)$$

a) $[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 0$ y Rango$(\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}) = 2$ y Rango$(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}) = 1$, luego las dos rectas son paralelas.

b) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_sP_r} = (-1,2,1) \\ P_s(3,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-3 & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + z - 3 = 0$$

c) $B \in r \Longrightarrow B(2+\lambda, 3+\lambda, 1-\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (2+\lambda, 3+\lambda, 1-\lambda) - (3,1,0) = (-1+\lambda, 2+\lambda, 1-\lambda)$
$\overrightarrow{AB} \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow -1 + \lambda + 2 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow B(2,3,1)$

2.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.20.3 *(2,5 puntos)* Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0,5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ P_r(1,3,0) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,0,-1) \\ P_s(2,-5,1) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,-5,1) - (1,3,0) = (1,-8,1)$.

$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right| = -8 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

b) $\pi \parallel r$ y $s \subset \pi$:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,0,-1) \\ P_s(2,-5,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + y - 2z + 3 = 0$$

c) $\pi' \perp r$ y $O \in \pi'$:
$\pi' : 2x - 2y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$, luego: $\pi' : 2x - 2y + z = 0$

Opción B

Problema 2.20.4 *(2,5 puntos)* Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución:

a) $d(A,\pi)=\dfrac{|4+3+0-36|}{\sqrt{4+9+16}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\ u$

b) Calculamos la recta $t\perp\pi$ tal que $A\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(2,3,4)\\ P_t=A(2,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=4\lambda\end{array}\right.$$

Calculamos el punto de corte A' de t con π: $2(2+2\lambda)+3(1+3\lambda)+4(4\lambda)=36\Longrightarrow 29\lambda=29\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow A'(4,4,4)$

c) $\dfrac{A+A''}{2}=A'\Longrightarrow A''=2A'-A=(8,8,8)-(2,1,0)=(6,7,8)$

2.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.20.5 *(2,5 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{w}=(1,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular un vector que sea ortogonal (perpendicular) a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$, que tenga módulo $\sqrt{3}/2$, y cuya tercera coordenada sea negativa.

b) (0,5 puntos) Calcular un vector $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y tal que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente independientes.

c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5,1,-1)$ sobre el plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,-1,1)=-1(-1,1,-1)$

$$\overrightarrow{t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

b) Sea $\overrightarrow{u}=(a,b,c)\perp\overrightarrow{v}\Longrightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$, es decir: $(a,b,c)\cdot(1,0,-1)=a-c=0\Longrightarrow a=c$, por ejemplo $a=c=1$ y b puede ser cualquier número real, elijo $b=0\Longrightarrow \overrightarrow{u}=(1,0,1)$.

Comprobamos la independencia: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0\Longrightarrow \overrightarrow{u}=(1,0,1)$ es ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$, y los tres vectores son linealmente independientes.

c) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{v}=(1,0,-1)\\ \overrightarrow{w}=(1,1,0)\\ O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x & y & z\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right|=0\Longrightarrow$

$$\pi: x-y+z=0$$

☛ Calculamos $t\perp\pi$ por $P(5,1,-1)$: $t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,-1,1)\\ P_t(5,1,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=5+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-1+\lambda\end{array}\right.$

☛ Calculo P' punto de corte de t con π:

$$(5+\lambda)-(1-\lambda)+(-1+\lambda)=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow P'(4,2,-2)$$

Opción B

Problema 2.20.6 *(2,5 puntos)* Dadas la rectas $r\equiv\left\{\begin{array}{l}x-y=5\\ y+z=1\end{array}\right.$ y $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x+z=3\\ y+z=4\end{array}\right.$, se pide:

a) (1,25 puntos) Escribir unas ecuaciones paramétricas de cada una de las dos rectas y determinar la posición relativa de ambas.

b) (1,25 puntos) Dado el punto $P(5,0,1)$, de la recta r, obtener un punto Q, de la recta s, de modo que el triángulo OPQ sea rectángulo, con ángulo recto en $O(0,0,0)$, y calcular las longitudes de los tres lados de dicho triángulo.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}x=5+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ P_r(5,0,1)\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l}x=3-\lambda\\ y=4-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,-1,1)\\ P_s(3,4,0)\end{array}\right.$

$\overrightarrow{P_sP_r}=(5,0,1)-(3,4,0)=(2,-4,1)$

$$[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\left|\begin{array}{rrr} 2 & -4 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{array}\right|=0$$

Rango$\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{P_sP_r}\\ \overrightarrow{u_r}\end{array}\right)=2$ y Rango$\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{array}\right)=1\Longrightarrow$ las rectas r y s son paralelas.

b) $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}\Longrightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$

$P(5,0,1)\Longrightarrow\overrightarrow{OP}=(5,0,1)$

$Q\in s\Longrightarrow Q(3-\lambda,4-\lambda,\lambda)\Longrightarrow\overrightarrow{OQ}=(3-\lambda,4-\lambda,\lambda)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=15-5\lambda+0+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=\dfrac{15}{4}$

$\overrightarrow{OQ}=\left(3-\dfrac{15}{4},4-\dfrac{15}{4},\dfrac{15}{4}\right)=\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{15}{4}\right)$

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{26}\ u$, $|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{4}\sqrt{235}\ u$ y $|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{4}\sqrt{651}\ u$.

2.20.4. Ordinaria-Valencia

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

Opción A

Problema 2.20.7 Consideramos en el espacio las rectas $r:\left\{\begin{array}{l} x-y+3=0\\ 2x-z+3=0\end{array}\right.$ y $s: x=y+1=\dfrac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (3 puntos) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

b) (4 puntos) La recta que pasa por $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

c) (3 puntos) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y+3=0\\ 2x-z+3=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=3+2\lambda\end{array}\right.$$

Tenemos: $r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(0,3,3)\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,1,2)\\ P_s(0,-1,2)\end{array}\right.$

a) $\overrightarrow{P_sP_r}=(0,3,3)-(0,-1,2)=(0,4,1)$.
$[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}]=\left|\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{array}\right|=0 \Longrightarrow r$ y s no se cruzan. Tenemos Rango$\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{P_sP_r}\\ \overrightarrow{u_r}\end{array}\right)=2$ y Rango$\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{array}\right)=1$ por lo que r y s son paralelas.
El plano π que contiene a ambas rectas vendrá determinado por:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP_r}=(0,4,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(0,3,3)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x & y-3 & z-3\\ 0 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{array}\right|=0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 7x+y-4z+9=0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos un plano $\pi'\perp r$ tal que $P(0,-1,2)\in\pi'$:

$$\pi': x+y+2z+\lambda=0 \Longrightarrow 0-1+4+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-3 \Longrightarrow$$
$$\pi': x+y+2z-3=0$$

- ☛ Calculamos el punto de corte P' de π' y r:

$$(\lambda)+(3+\lambda)+2(3+2\lambda)-3=0 \Longrightarrow 6\lambda+6=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow$$
$$P'(-1,2,1)$$

- ☛ La recta t buscada vendrá definida por:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PP'} = (-1,2,1) - (0,-1,2) = (-1,3,-1) \\ P_t = P(0,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$t: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

c) $s \subset \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2)\cdot(1,-2,a) = 1 - 2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

$P_s \in \pi \Longrightarrow 0 + 2 + 2\cdot\dfrac{1}{2} = b \Longrightarrow b = 3$

Opción B

Problema 2.20.8 Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.

b) (4 puntos) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

c) (2 puntos) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

Solución:

a) Sea un plano $\pi_1 : 9x+12y+20z+a = 0$ paralelo a π, elegimos un punto cualquiera del plano π, por ejemplo $P(0,0,9)$, y calculamos $d(P,\pi_1) = \dfrac{|0+0+180+a|}{\sqrt{81+144+400}} = \dfrac{|180+a|}{\sqrt{625}} = 4 \Longrightarrow$ $|180 + a| = 100$, tendremos dos soluciones:

- ☛ $180 + a = 100 \Longrightarrow a = -80 \Longrightarrow \pi_1' : 9x + 12y + 20z - 80 = 0$
- ☛ $180 + a = -100 \Longrightarrow a = -280 \Longrightarrow \pi_1'' : 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b) Puntos de corte con los ejes del plano $\pi : 9x + 12y + 20z = 180$:

- ☛ Con OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 9x = 180 \Longrightarrow x = 20 \Longrightarrow A(20,0,0)$
- ☛ Con OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 12y = 180 \Longrightarrow y = 15 \Longrightarrow B(0,15,0)$
- ☛ Con OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow 20z = 180 \Longrightarrow z = 9 \Longrightarrow C(0,0,9)$

$\overrightarrow{AB} = (0,15,0) - (20,0,0) = (-20,15,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,0,9) - (20,0,0) = (-20,0,9)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{400}{\sqrt{625}\sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}} \Longrightarrow \alpha = 43^\circ 9' 8''$$

c) $\overrightarrow{OA} = (20,0,0)$, $\overrightarrow{OB} = (0,15,0)$ y $\overrightarrow{OC} = (0,0,9)$:

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|2700| = 450\ u^3$$

2.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.20.9 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0,5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución:

a) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,2,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4,-2,0) \\ A(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - 2y - z + 2 = 0$$

b) Cualquier punto del plano π nos valdría, por ejemplo: $D(-2,0,0)$.

c) Un punto cualquiera del eje OX puede ser $P(a,0,0)$:
$\overrightarrow{AB} = (0,2,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4,-2,0)$ y $\overrightarrow{AP} = (a-1,-1,-1)$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ a-1 & -1 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|-8(a+2)| = 1 \Longrightarrow$$

$$|-8a-16| = 6 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8a - 16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{11}{4} \Longrightarrow P_1\left(-\dfrac{11}{4}, 0, 0\right) \\ \\ 8a + 16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{5}{4} \Longrightarrow P_2\left(-\dfrac{5}{4}, 0, 0\right) \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.20.10 *(2,5 puntos)* Dados el plano, $\pi : 2x+3y-z = 4$, y las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{array} \right.$ y $s : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \overline{R}$, se pide

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos la recta $t \perp \pi$ que contiene a $P(1,2,3)$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,3,-1) \\ P_t = P(1,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right.$$

☛ Calculo P' punto de corte de t con π:

$$2(1+2\lambda) + 3(2+3\lambda) - (3-\lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{14} \Longrightarrow P'\left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right)$$

☛ Calculo P'':

$$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = 2\left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right) - (1,2,3)$$

$$\Longrightarrow P''\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$ sustituimos en r y nos queda:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 1 + \lambda + 2 - (3 + \lambda) = 0 \Longrightarrow 0 = 0 \\ 1 + \lambda + 2 + 3 + \lambda = 2 \Longrightarrow \lambda = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow Q(-1,2,1) \text{ punto de corte}$$

$$l : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_l} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,3,-1) \\ P_l = Q(-1,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow l : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

c) $\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 2(1,-1,0)$ y $\overrightarrow{u_s} = (1,0,1)$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^\circ$$

2.21. Año 2020

2.21.1. Modelo

Opción A

Problema 2.21.1 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{array} \right.$ y $r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, -3, 1) \\ P_{r_1}(-1, 2, 0) \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (5, 4, 1) \\ P_{r_2}(4, -3, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (4, -3, 0) - (-1, 2, 0) = (5, -5, 0)$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}| = |(-7, 4, 19)| = \sqrt{426}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{55}{\sqrt{426}} = \frac{55\sqrt{426}}{426} \; u$$

b) $$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, -3, 1) \\ \overrightarrow{OP_{r_1}} = (-1, 2, 0) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + y + z = 0$$

El punto de corte de r_2 con π será:

$$2(4 + 5\lambda) + (-3 + 4\lambda) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P\left(\frac{7}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Opción B

Problema 2.21.2 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1, 1, -2)$, $B(3, -1, 4)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0, 0, 0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi : z = 7$.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 5, 0) \\ P_r(1, -2, 3) \end{cases}$$

a) $P=\dfrac{A+B}{2}=(2,0,1)$, la recta que pasa por AB es

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AB}=2(1,-1,3)\\ P_s=A(1,1,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{array}\right.$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano $\pi: z=7$: $-2+3\lambda=7\Longrightarrow \lambda=3$, el punto Q es $Q(4,-2,7)$.

$$\overrightarrow{OP}=(2,0,1),\ \ \overrightarrow{OQ}=(4,-2,7)$$

$$S_T=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|=|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 7\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(2,-10,-4)|=\sqrt{30}\ \ u^2$$

b) $\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(3,5,0)\Longrightarrow \pi': 3x+5y+\lambda=0$ sustituyendo A tenemos $3+5+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-8\Longrightarrow \pi': 3x+5y-8=0$

c)

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|-2|}{\sqrt{34}\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{374}}{187}=0,1034175379$$

2.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.21.3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l}x-y=2\\ 3x-z=-1\end{array}\right. \ \text{y}\ s:\left\{\begin{array}{l}x=-1+2\lambda\\ y=-4-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.,$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1+3\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,3)\\ P_r(0,-2,1)\end{array}\right.,\ s:\left\{\begin{array}{l}x=-1+2\lambda\\ y=-4-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-1,-4,0)\end{array}\right.$

y $\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,-2,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-11\neq 0\Longrightarrow r\ \text{y}\ s\ \text{se cruzan}$$

b) $\pi\perp r\Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,3)\Longrightarrow x+y+3z+\lambda=0$ como $P(2,-1,5)\in\pi\Longrightarrow 2-1+15+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-16\Longrightarrow \pi: x+y+3z-16=0$.

c) $\pi'\parallel r$ y $s\subset\pi'\Longrightarrow \pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,3)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-1,-4,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\begin{vmatrix}x+1 & y+4 & z\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi':$

$4x+5y-3z+24=0$

Opción B

Problema 2.21.4 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,2,-3)\\ P_t=Q(-1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=-1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1-3\lambda\end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos el punto Q' proyección de Q sobre π en el punto de corte de t con π:

$$(-1+\lambda)+2(2\lambda)-3(1-3\lambda)=4 \Longrightarrow \lambda=\frac{4}{7} \Longrightarrow Q'\left(-\frac{3}{7},\frac{8}{7},-\frac{5}{7}\right)$$

b) Si $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \pi': x+2y-3z+\lambda=0$ como $P(-3,1,2)\in\pi' \Longrightarrow -3+2-6+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=7 \Longrightarrow \pi': x+2y-3z+7=0$

c) $\pi'' \perp \pi \Longrightarrow \pi'':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-3)\\ \overrightarrow{PQ}=(2,-1,-1)\\ P(-3,1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\pi'':\left|\begin{array}{ccc}x+3 & y-1 & z-2\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & -1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': x+y+z=0$$

2.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.21.5 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,-4,2)$, $B(3,-2,3)$ y $C(-1,-3,3)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.

b) (0,75 puntos) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.

Solución:

a) Sean $\overrightarrow{AB}=(3,2,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,1,1)$. Tenemos que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ luego los tres puntos determinan un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto se encuentra en el vértice A. Los catetos serán los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la hipotenusa el segmento $\overline{BC}$.

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,2,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,1) \\ A(0,-4,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+4 & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - 4y + 5z - 26 = 0$$

c) Sea $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BC} = (-4,-1,0) = -(4,1,0) \\ P_r = B(3,-2,3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$

Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Calculamos un plano $\pi' \perp r / A \in \pi' \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r}$:

$$\pi' : 4x + y + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 4 \Longrightarrow \pi' : 4x + y + 4 = 0$$

- ☛ Calculamos el punto A' de corte de r y π':

$$4(3+4\lambda) + (-2+\lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{14}{17} \Longrightarrow A'\left(-\frac{5}{17}, -\frac{48}{17}, 3\right)$$

- ☛ $\dfrac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = 2\left(-\dfrac{5}{17}, -\dfrac{48}{17}, 3\right) - (0,-4,2) \Longrightarrow A''\left(-\dfrac{10}{17}, -\dfrac{28}{17}, 4\right)$

Opción B

Problema 2.21.6 *(2,5 puntos)* Dadas la recta $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1,1,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s.

c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a r y a s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ P_s = A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \frac{1}{4} - \lambda \\ y = \frac{1}{4} + \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Hacemos $\overrightarrow{P_rP_s} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - (0,2,0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) Sea $\overrightarrow{u_t} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi := \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -x + 2y + z - 4 = 0 \Longrightarrow \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

c) La recta perpendicular a r y s la calculamos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 = \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ \\ P_s = A\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x - 1/4 & y - 1/4 & z - 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \pi_2 : 2x + 2y + 4z - 3 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x + 2y + 4z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} - \lambda \\ \\ y = \dfrac{11}{6} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

2.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.21.7 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) (0,75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

Solución:

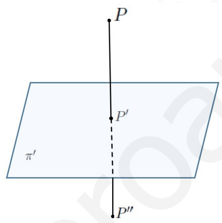
Tenemos $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ P_r(2,0,-1) \end{array} \right.$

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,3,1) \\ P(3,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

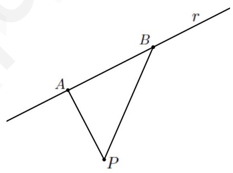
$$\pi : x + y - 4z - 6 = 0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi' \perp r / P \in \pi'$:
  $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \Longrightarrow \pi' : -x + y + \lambda = 0$
  $P \in \pi' \Longrightarrow -3 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : -x + y = 0$
- Calculamos el punto P' de corte de π' con r. Para ello pasamos la ecuación de la recta r a paramétricas y sustituimos en el plano.
  $r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow -(2-\lambda) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$. Y sustituyendo en r tenemos $P'(1,1,-1)$
- Ahora tenemos que P' es el punto medio entre P y su simétrico P'': $\dfrac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow$
  $P'' = 2P' - P = (2,2,-2) - (3,3,0) \Longrightarrow P''(-1,-1,-2)$



c) Como A y B están en la recta r podemos poner de forma general $A(2-\lambda,\lambda,-1)$ y $B(2-\mu,\mu,-1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (\lambda - \mu)(1,-1,0)$.



Tenemos que el vector $\overrightarrow{AP} = (3,3,0) - (2-\lambda,\lambda,-1) = (1+\lambda, 3-\lambda, 1)$
Como el ángulo recto se encuentra en el vértice A tenemos que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \Longrightarrow (1,-1,0)\cdot(1+\lambda, 3-\lambda, 1) = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A(1,1,-1)$, el vector $\overrightarrow{AP} = (2,2,1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (1-\mu)(1,-1,0)$.
El área sería:

$S_t = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = \dfrac{1}{2}|(1-\mu)\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{2}|(1-\mu)(1,1,-4)| = \dfrac{1}{2}|1-\mu|\sqrt{18} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}|1-\mu| = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |1-\mu| = 1.$

- ☛ $1-\mu=1 \Longrightarrow \mu=0 \Longrightarrow B(2,0,-1)$ y $A(1,1,-1)$.
- ☛ $1-\mu=-1 \Longrightarrow \mu=2 \Longrightarrow B(0,2,-1)$ y $A(1,1,-1)$.

Opción B

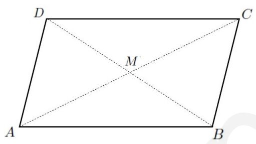
Problema 2.21.8 *(2,5 puntos)* Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:



a) $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$. $\overrightarrow{AC}=(3,3,-1)$ y $\overrightarrow{BC}=(2,2,-2)$.
Tenemos: $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-4(1,-1,0)$

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0) \\ P_r=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{2}+\lambda \\ \\ y=\frac{3}{2}-\lambda \\ \\ z=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

b) $D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}=(1,0,-1)+(2,2,-2)=(3,2,-3)$
Tenemos $\overrightarrow{AD}=(2,2,-2)$ y $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}|=|-4(1,-1,0)|=4\sqrt{2}\ u^2$$

c)

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{3+3-1}{\sqrt{19}\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{57}}{57}\Longrightarrow \alpha=48^\circ 31' 38''$$

2.22. Año 2021

2.22.1. Modelo

Opción A

Problema 2.22.1 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $A(3,1,2)$, $B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) (0,75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3,2,2)$ y $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} = (3,-2,-2)$. Tenemos $\overrightarrow{PQ} = Q - P \Longrightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ} = (-1,1,0) + (3,-2,-2) \Longrightarrow Q(2,-1,-2)$.

b) Tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AP} = (-4,0,-2) = -2(2,0,1) \\ P_r = A(3,1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BC} = (2,-4,-6) = 2(1,-2,-3) \\ P_s = B(0,3,4) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 4 - 3\mu \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda = \mu \\ y = 1 = 3 - 2\mu \\ z = 2 + \lambda = 4 - 3\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow H(1,1,1)$$

c) $\overrightarrow{PA} = (4,0,2) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{PA}\right| = 2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{PB} = (1,2,4) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{21}$ y $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4 + 0 + 8 = 12$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\right| \left|\overrightarrow{PB}\right|} = \frac{12}{2\sqrt{5}\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{105}} = \frac{6\sqrt{105}}{105}$$

$$\alpha = 54^\circ 9' 32''$$

Opción B

Problema 2.22.2 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.

b) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s.

c) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s.

d) (0,75 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x+2z=1\\ y+z=2\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1-2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,-1,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}x=-3+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-3,2,1)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{OP_s}=(-3,2,1)$ y

$$\left|\overrightarrow{u_s}\times\overrightarrow{OP_s}\right|=\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\right|=|(-3,-5,1)|=\sqrt{35}$$

$$d(O,s)=\frac{\left|\overrightarrow{u_s}\times\overrightarrow{OP_s}\right|}{|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s}=(-4,0,1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=4\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan } r\nparallel s.$$

c) $$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,4,4)=4(0,1,1)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-2,-1,1)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$\pi_1: x-y+z+1=0$

d) Como intersección de dos planos. Uno de ellos sería el calculado en el apartado anterior y el otro sería:

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-3,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix}x+3 & y-2 & z-1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$\pi_2: x+y-z+2=0$

$$t:\left\{\begin{array}{l}x-y+z+1=0\\ x+y-z+2=0\end{array}\right.$$

2.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.22.3 *(2,5 puntos)* Sean la recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l}-x-y+z=0\\ 2x+3y-z+1=0\end{array}\right.$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0,75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, -1)$ y un punto de la recta puede ser $P_r(-1, 0, -1)$. El vector ortogonal al plano π es $\overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|-4+1+1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha = 19^\circ 28' 16,39''$$

b) Calculamos el punto de intersección de r con π, tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo en $\pi \Longrightarrow 2(-1 - 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y sustituyendo en $r \Longrightarrow A(-3, 1, -2)$

Para calcular el simétro de A respecto del plano $\pi' : -y + z = 0$ seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi' / A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi'}}(0, -1, 1) \\ P_t = A(-3, 1, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte A' de t con π':

$$-(1 - \lambda) + (-2 + \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

Sustituyendo en $t \Longrightarrow A'\left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

- Calculamos el punto de corte A'' sabiendo que A' es el punto medio entre A'' y A:

$$A' = \frac{A + A''}{2} \Longrightarrow A'' = 2A' - A = (-6, -1, -1) - (-3, 1, -2) = (-3, -2, 1)$$

c) Calculamos la recta proyección como intersección de dos planos, uno de ellos es $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$ y el otro π'' será un plano perpendicular a π que contenga a r:

$$\pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi'' : y + z + 1 = 0$$

$$h : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z == \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.22.4 *(2,5 puntos)* Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1,5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0,5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0,5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

Solución:

a) Los planos paralelos a π_1 tienen de ecuación $\pi' : x + y + \lambda = 0$

$$d(O, \pi') = \frac{|0 + 0 + \lambda|}{\sqrt{2}} = 2 \Longrightarrow |\lambda| = 2\sqrt{2} \Longrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2}$$

Los planos serían: $\pi'_1 : x + y + 2\sqrt{2} = 0$ y $\pi'_2 : x + y - 2\sqrt{2} = 0$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, 0, 1) \\ P_r(0, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array} \right.$

c) $\pi_1 : x + y = 1$ con eje OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow A(1, 0, 0)$
$\pi_1 : x + y = 1$ con eje OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow B(0, 1, 0)$

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(-1, 1, 0)| = \sqrt{2}\ u$$

2.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.22.5 *(2,5 puntos)* Desde el punto $P_1 = (1, 1, -1)$ se ha trazado una recta, r, perpendicular a un plano, π. El punto de intersección del plano con la recta es $P_2 = (0, 0, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación de la recta r.

b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano π.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia de P_1 al plano π.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{P_2P_1} = (1, 1, -1) \\ P_r = P_2 = (0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$

b) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \Longrightarrow \pi : x + y - z + \lambda = 0$ como $P_2(0, 0, 0) \in \pi \Longrightarrow 0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x + y - z = 0$

c) $d(P_1, \pi) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$

Opción B

Problema 2.22.6 *(2,5 puntos)* En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2,3,-5)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v}=(-1,-2,2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi\equiv 3x-2y-2z=1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45°, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar el rayo desde P en dirección perpendicular a π, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π, desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que P. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{v}=(-1,-2,2)\\ P_r=P(2,3,-5)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=2-\lambda\\ y=3-2\lambda\\ z=-5+2\lambda\end{array}\right.$$

Sustituyendo en el plano:

$$3(2-\lambda)-2(3-2\lambda)-2(-5+2\lambda)=1\Longrightarrow\lambda=3\Longrightarrow P_1(-1,-3,1)$$

b) $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{|(-1,-2,2)\cdot(3,-2,-2)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{17}}=$
$\frac{|-3+4-4|}{3\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}\Longrightarrow\alpha=14^\circ 2'11''\Longrightarrow$ no se realiza la perforación.

c) Hay que calcular el punto simétrico de P respecto de π:

- Calculamos una recta $t\perp\pi$ tal que $P\in t$

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(3,-2,-2)\\ P_r=P(2,3,-5)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=2+3\lambda\\ y=3-2\lambda\\ z=-5-2\lambda\end{array}\right.$$

- Calculamos el punto P' de corte de t con π

$$3(2+3\lambda)-2(3-2\lambda)-2(-5-2\lambda)=1\Longrightarrow\lambda=-\frac{9}{17}\Longrightarrow$$

$$P'\left(\frac{7}{17},\frac{69}{17},-\frac{67}{17}\right)$$

- El punto P' calculado en apartado anterior será el punto medio entre el buscado P'' y el dado P:
$P'=\frac{P+P''}{2}\Longrightarrow P''=2P'-P=\left(\frac{14}{17},\frac{138}{17},-\frac{134}{17}\right)-(2,3,-5)=\left(-\frac{20}{17},\frac{87}{17},-\frac{49}{17}\right)$

2.22.4. Extrordinaria

Opción A

Problema 2.22.7 *(2,5 puntos)* Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0,75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(1,-1,2) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,-1)$$

a) El plano $\pi' \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \Longrightarrow \pi' : x+y+2z+\lambda = 0$ imponiendo $A \in \pi' \Longrightarrow$ $1+0-2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \pi' : x+y+2z+1=0$
$\cos\alpha = \frac{|u_\pi \cdot u_{\pi'}|}{|u_\pi|\cdot|u_{\pi'}|} = \frac{|(1,1,-1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^\circ$

b) Para que este apartado tenga sentido r y π tienen que ser paralelos. En efecto, $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2)\cdot(1,1,-1) = 1+1-2 = 0$.
Por el apartado anterior ya sabíamos que $r \parallel \pi$.

Elegimos un punto $B(1,-1,2) \in r$ y calculamos la distancia de B a π

$$d(B,\pi) = \frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ u$$

c) La recta s que buscamos es perpendicular a r y paralela a π por lo que $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_\pi} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| =$
$(-3,3,0) = 3(-1,1,0)$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ P_s = A(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 2.22.8 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-3)\\ P_r(2,-1,-4)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}x=2-\lambda\\ y=1+2(2-\lambda)+2\lambda=5\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)\\ P_s(2,5,0)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,2,1)$ Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-3)\\ P_r(2,-1,-4)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:=\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z+4\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$\pi_1: 7x-4y+z-14=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)\\ P_s(2,5,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:=\begin{vmatrix}x-2 & y-5 & z\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$\pi_2: x-y+z+3=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}7x-4y+z-14=0\\ x-y+z+3=0\end{array}\right.$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,5,0)-(2,-1,-4)=(0,6,4)$

$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|=|\begin{vmatrix}0 & 6 & 4\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}|=|16|=16$

$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\overrightarrow{u_t}|=|(1,2,1)|=\sqrt{6}$

$d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{16}{\sqrt{6}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}\ u$

2.23. Año 2022

2.23.1. Modelo

Opción A

Problema 2.23.1 *(2,5 puntos)* Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi\equiv 2x-y+2z+5=0$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

Solución:

a) Tenemos:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, -2) \\ P_r = P(1, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

El punto de impacto es el punto de corte de r con π:
$2(1 + 2\lambda) - \lambda + 2(2 - 2\lambda) + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 11$
Sustituyendo en r tenemos el punto $H(23, 11, -20)$
Si α es el ángulo que forma $\overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 2)$ con $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -2)$
$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_\pi}||\overrightarrow{u_r}|} = \frac{|4-1-4|}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \frac{1}{9}$

b) Un punto genérico de la trayectoria sería $A(1 + 2\lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$ y sería $d(A, \pi) = 1$:
$d(A, \pi) = \frac{|2(1+2\lambda)-\lambda+2(2-2\lambda)+5|}{\sqrt{9}} = \frac{|11-\lambda|}{3} = 1 \Longrightarrow |11 - \lambda| = 3$
$\begin{cases} 11 - \lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = 8 \Longrightarrow A_1(17, 8, -14) \\ 11 - \lambda = -3 \Longrightarrow \lambda = 14 \Longrightarrow A_2(29, 14, -26) \end{cases}$ Lo lógico es que los puntos calculados estén separados por el plano π y pertenecen a la recta. Observamos la segunda coordenada en la que $y = \lambda$ y tenemos $P(1, 0, 2)$, continúa con $Q(3, 1, 0)$, continúa con $A_1(17, 8, -14)$ e impacta en $H(23, 11, -20)$. Luego el punto $A_2(29, 14, -26)$ vendría después del impacto y no sería válido.

Opción B

Problema 2.23.2 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$ y $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1, 7, 1)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

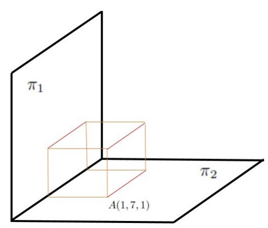
Solución:

a) Los vectores normales a los planos tienen que ser perpendiculares $\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, -2, 3)(3, 0, -1) = 3 + 0 - 3 = 0$

b) Analizamos:
Observamos que el punto $A \in \pi_2$ luego el lado del cubo es la distancia de A a π_1:

$$d(A, \pi_1) = \frac{|1 - 14 + 3 - 6|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

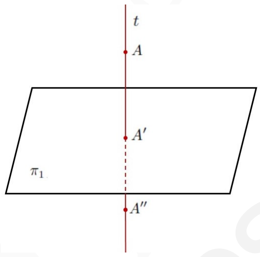
El volumen del cubo es $\left(\frac{16}{\sqrt{14}}\right)^3 = \frac{1024\sqrt{14}}{49} \simeq 78,193\ u^3$



c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi_1$ tal que $A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (1, -2, 3) \\ P_t = A(1, 7, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array} \right.$$



- Calculamos el punto de corte A' de t con π_1:

$$(1 + \lambda) - 2(7 - 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 6 \Longrightarrow \lambda = \frac{8}{7}$$

Sustituyendo en t: $A'\left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right)$

- A' es el punto medio entre A y el punto que buscamos A'':

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{30}{7}, \frac{66}{7}, \frac{62}{7}\right) - (1, 7, 1) = \left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7}\right)$$

Capítulo 3

Análisis

3.1. Año 2000

3.1.1. Modelo

Opción A

Problema 3.1.1 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Solución:

a)
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin x}{x} + 2\right) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x + 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x + 2}{1} = 3$$

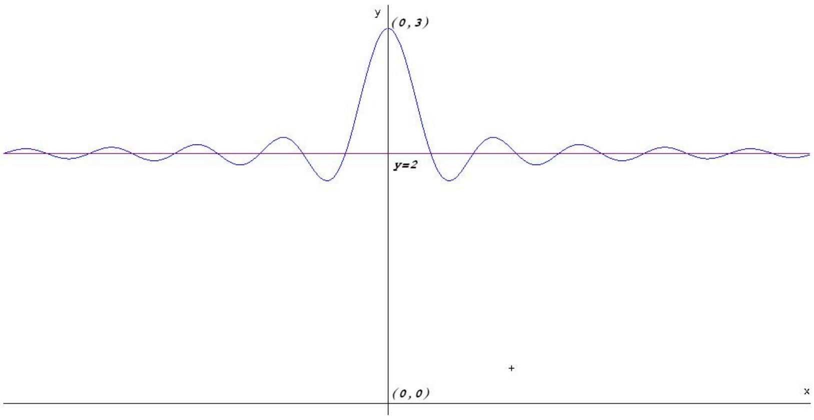
Para que f sea continua en $x = 0 \Longrightarrow k = 3$

b) Para que f sea derivable en $x = 0$ primero debe de ser continua, luego $k = 3$. Ahora se estudia si es derivable con este valor:

$$f'(0) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\frac{\sin h}{h} + 2 - 3}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin h - h}{h^2} =$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\cos h - 1}{2h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{-\sin h}{2} = 0$$

En conclusión, para que una función sea derivable antes tiene que ser continua y por tanto $k = 3$. Y en este caso también se cumple $f'(0^-) = f'(0^+)$ y es derivable.



c) Asíntotas:

- ☛ Verticales no hay, la única posible sería en $x = 0$ y en ese punto hay una discontinuidad evitable si $k \neq 3$ y continua si $k = 3$.
- ☛ Horizontales
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\sin x}{x}+2\right)=2\Longrightarrow y=2$$
- ☛ Oblicuas no hay por haber horizontales

Opción B

Problema 3.1.2 *(2 puntos)* De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1,-4)$ y que su derivada es

$$f'(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\le 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Hallar la expresión de $f(x)$.

b) Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Solución:

a)

$$f(x)=\begin{cases} 2x-\dfrac{x^2}{2}+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ \\ \ln|x|+b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Como $f(-1) = -4 \Longrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$. Si f es derivable en $x = 1 \Longrightarrow$ f es continua en $x = 1 \Longrightarrow$ $b = 0$. Luego:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \\ \ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

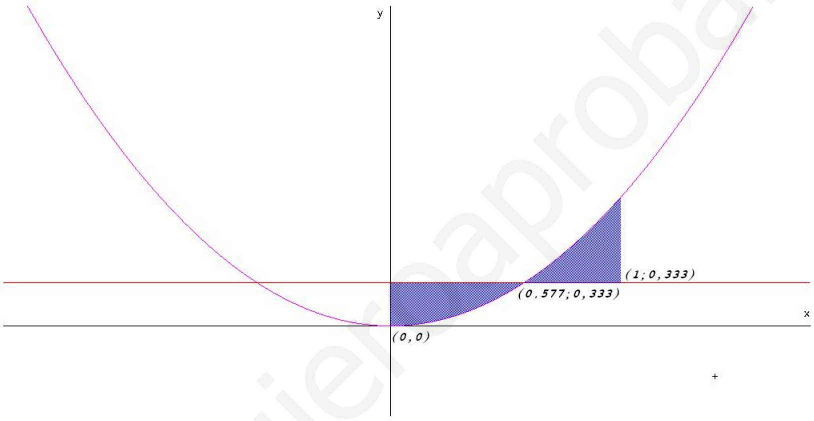
b) Si $x = 2 \Longrightarrow f(2) = \ln 2 \Longrightarrow (2, \ln 2)$.

Tenemos $m = f'(2) = \dfrac{1}{2}$ y, por tanto, la recta tangente es:

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

Problema 3.1.3 *(2 puntos)* Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abcisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Solución:



Calculamos la abscisa del punto de corte de ambas gráficas en función del parámetro a:

$$x^2 = a \Longrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Elegimos la solución positiva porque así nos lo indica el enunciado del problema. Tenemos, por tanto, que cuando $x = \sqrt{a}$ ambas curvas se cortan $(x_0, y_0) = (\sqrt{a}, a)$ y la posición de las curvas cambia, de manera que, la que estaba por encima pasará a estar debajo. Es decir,

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a)\, dx \Longrightarrow$$

$$ax - \frac{x^3}{3}\bigg]_0^{\sqrt{a}} = \frac{x^3}{3} - ax\bigg]_0^{\sqrt{a}} \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

3.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) (2 puntos) Determinar a, b, c y d.

b) (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Solución:

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Longrightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 4b + c = 0 \\ f'(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \\ d = -5/6 \end{cases}$$

La función será:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$$

b) Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2x - 3 \Longrightarrow \begin{cases} f''(1) = -3 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ f''(2) = 1 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

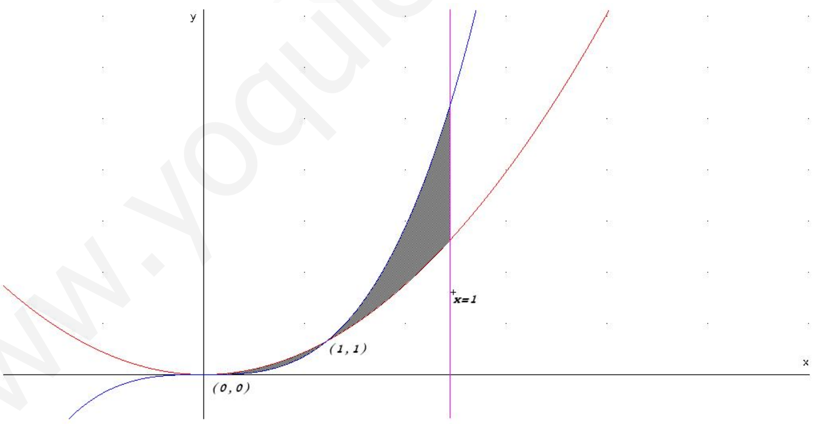
Opción B

Problema 3.1.5 *(2 puntos)* Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 \;\text{ y }\; g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Solución:



Buscamos los puntos de corte de ambas funciones

$$x^2 = x^3 \Longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 1$$

Los intervalos de integración serán $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - x^3)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx = F(1) - F(0) = \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{17}{12}$$

$$S = \left|\frac{1}{12}\right| + \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}\ u^2$$

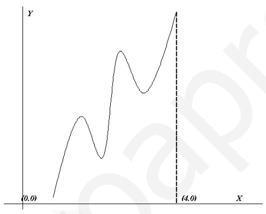
Problema 3.1.6 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

b) (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

Solución:

a) El dibujo sería el siguiente:



b) La función tiene al menos cuatro extremos, luego el grado del polinomio tiene que ser cinco como mínimo. Si fuese cuatro, la primera derivada tendría como mucho tres soluciones al igualar a cero.

3.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.1.7 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

a) (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales y Horizontales no hay claramente.
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x + \sin 2x}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (2x + \sin 2x - 2x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} (\sin 2x)\ \text{No existe}$$

Luego tampoco hay asíntotas oblicuas.

b) $f'(x) = 2 + 2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ Para cualquier x que escojamos $f'(x) > 0$, excepto en los puntos que la anulan, luego la función es siempre creciente y no hay ni máximos ni mínimos. Veamos los puntos de inflexión:

$$f''(x) = -4\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$f'''(x) = -8\cos 2x \Longrightarrow f'''(\pi/2) = 8 \neq 0$$

Luego los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ son puntos de inflexión.

Problema 3.1.8 *(2 puntos)* Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Solución:

$$D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) = -2(r_1 + r_2 + r_3 - 3x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

x es la media aritmética de los tres números.

$$D''(x) = 6 \Longrightarrow D''\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right) = 6 > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Opción B

Problema 3.1.9 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

a) (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

c) (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

a) Los puntos de corte son:

Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(3, 0)$.

Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

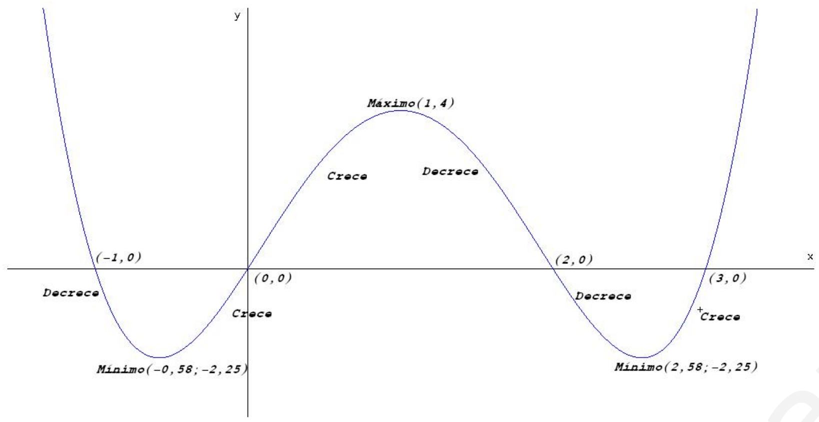
Estudiamos su monotonía:

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2},\ \ x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2},\ \ x = 1$$

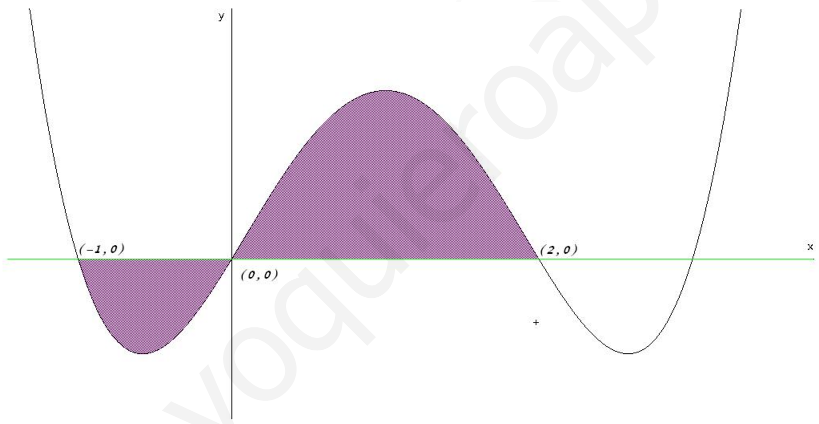
	$\left(\infty, 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, 1\right)$	$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(-0,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo, en el punto $(1, 4)$ la función tiene un máximo y en el punto $(2,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo.

b) Representación gráfica:



c) Hay un punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $(-1, 2)$ ese punto es el $(0, 0)$. Luego tendremos que hacer dos integrales, una entre -1 y 0, y otra entre 0 y 2.



$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{22}{15}$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{0}^{2} = \frac{76}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} = \frac{98}{15}\ u^2$$

3.2. Año 2001

3.2.1. Modelo

Opción A

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.

b) (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

a) $Dom(f) = R - \{-2, 2\}$. Sus asíntotas:

- Verticales:

  En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

  En $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales:

  En $y = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3}$$

La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no hay puntos de inflexión, y además $2(3x^2 + 4) > 0$ siempre. Por otro lado, por el denominador:

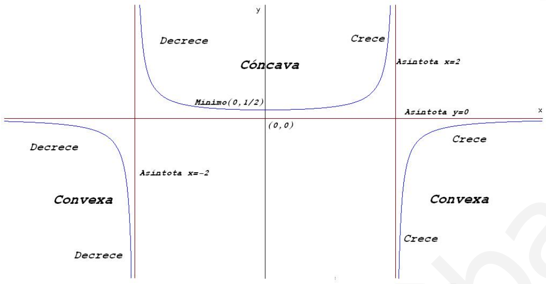
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa

c)

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

Luego en el punto $(0, 1/4)$ la función presenta un mínimo.



Opción B

Problema 3.2.2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

b) (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

a)

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^x}} = -\int_{-10}^{-1} -(1-e^x)^{-1/2}e^x\,dx =$$

$$= -2\sqrt{1-e^x}\Big]_{-10}^{-1} = 0,4098344043$$

b) $t = 1 - e^x \Longrightarrow dt = -e^x dx = (t-1)dx \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{t-1}$

$$\int \frac{1}{1-e^x}dx = \int \frac{1}{t(t-1)}dt = -\ln|t| + \ln|t-1| = \ln\frac{e^x}{1-e^x} + C$$

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Longrightarrow B = 1 \\ t = 0 \Longrightarrow A = -1 \end{cases}$$

3.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \sin x$

a) (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\dfrac{1}{2}$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{4}$

c) (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Solución:

a)

$$\int_0^a \sin x\,dx = -\cos x\Big]_0^a = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

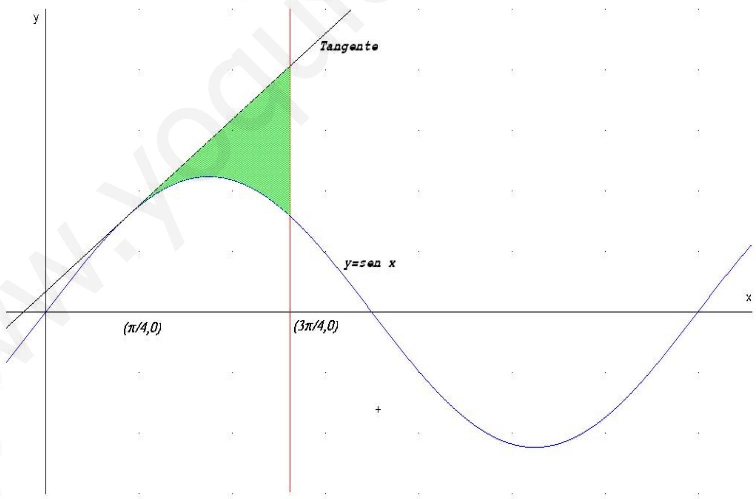
b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \Longrightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La recta tangente es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



c) Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:

$$F(x) = \int \left[\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4} + 1\right)\right] dx = -\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{4} + x\right)$$

$$S = \left| F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{16} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \sqrt{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{16}(\pi^2 + 4\pi - 16)$$

Opción B

Problema 3.2.4 *(2 puntos)* Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.

b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

c) (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas, el único punto en el que puede haber discontinuidad es en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2-x)^3 = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} x^2 = 1$$

Como además $f(1) = 1$, podemos concluir que f es continua en R.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases}$$

Como $f'(1^-) \ne f'(1^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 1$.

c)

$$S_1 = \int_0^1 (8 - (2-x)^3)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2\right]_0^1 = \frac{17}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (8 - x^2)\, dx = \left. 8x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{17}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{17}{4} + \frac{17}{3} = \frac{119}{12}\, u^2$$

Problema 3.2.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

Solución:

a)

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

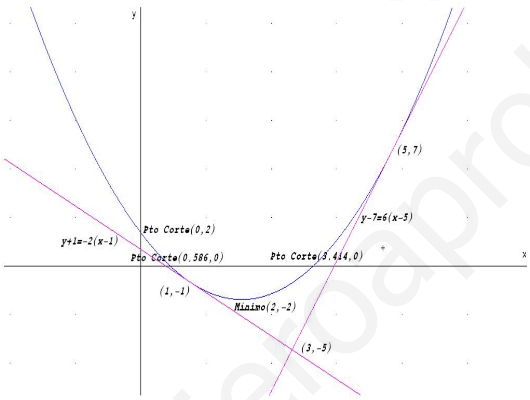
Luego tiene un mínimo en el punto $(2, -2)$

Se trata de una parábola vertical con vértice en el punto $(2, -2)$. Para dibujarla tan sólo será necesario encontrar los puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x + 2 \Longrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

Corte con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 2$

Los puntos serán: $(0, 2)$, $(2 - \sqrt{2}, 0)$ y $(2 + \sqrt{2}, 0)$.



b) La ecuación de una recta que pase por $(3, -5)$ es

$$y + 5 = m(x - 3), \ \text{ y } \ f'(x) = 2x - 4$$

Si el punto de tangencia con la gráfica es (a, b) tenemos

$$b + 5 = m(a - 3), \ \ m = f'(a) = 2a - 4 \ \text{ y } \ b = a^2 - 4a + 2$$

$$b + 5 = (2a - 4)(a - 3) \ \text{ y } \ b = a^2 - 4a + 2 \Longrightarrow a = 1, \ a = 5$$

Los puntos de tangencia son: $(1, -1)$ y $(5, 7)$. Ahora calculamos las rectas tangentes en estos puntos

- En $(1, -1)$ la pendiente vale $m = -2$: $y + 1 = -2(x - 1)$
- En $(5, 7)$ la pendiente vale $m = 6$: $y - 7 = 6(x - 5)$

3.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.2.6 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.

b) (1 punto) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.

c) (1 punto) Para los mismos valores de a y b, hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

Solución:

a) Se tiene que cumplir que $f(2) = g(2)$ y que $f'(2) = g'(2)$:

$$f(2) = 3 = 4a + b$$

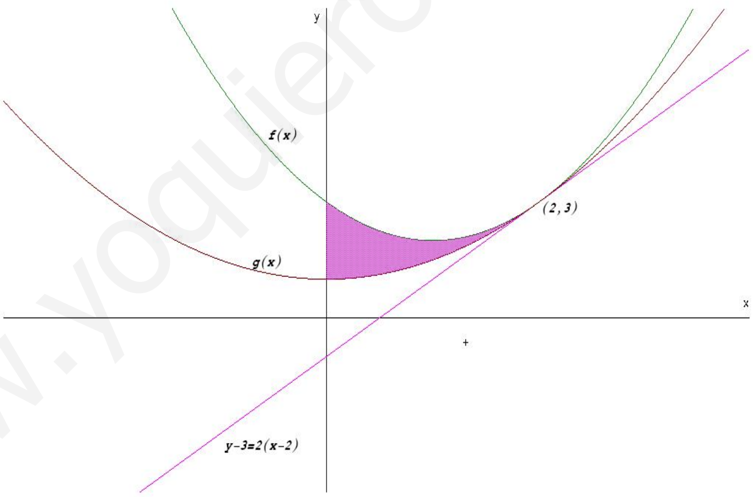
$$f'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow f'(2) = 2, \quad g'(x) = 2ax \Longrightarrow g'(2) = 4a$$

luego $4a = 2 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$ y $b = 1$. Con lo que

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

b) En ambas funciones la pendiente en $x = 2$ vale $m = f'(2) = 2$ y el punto de tangencia común a ambas funciones es $(2, 3)$. La recta tangente es

$$y - 3 = 2(x - 2)$$



c) El área buscada sería:

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{x^2}{2} - 1 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{4}{3}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.2.7 *(2 puntos)* Sean la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

a) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(t)dt$

b) (1 punto) Se definen $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Solución:

a) Hacemos el cambio de variable $1 + e^t = x \Longrightarrow e^t = x - 1$ y $dt = \dfrac{1}{x-1}dx$

$$\int \frac{1}{1+e^t}\, dt = \int \frac{1}{x(x-1)}\, dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C = t - \ln|1+e^t| + C$$

La descomposición polinómica sería:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Longrightarrow 1 = A(x-1) + Bx$$

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow & A = -1 \\ x = 1 \Longrightarrow & B = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para la resolución del límite. Para derivar $g(x)$ aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo y nos queda:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x - \ln(1+e^x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}$$

Problema 3.2.8 *(2 puntos)* Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- ☛ $P(x)$ es una función par.
- ☛ Dos de sus raíces son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- ☛ $P(0) = 5$.

Se pide:

a) (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.

b) (1 punto) Dibujar su gráfica.

Solución:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- ☛ $P(x)$ es una función par $P(-x) = P(x)$:

$$a(-x)^4 + b(-x)^3 + c(-x)^2 + d(-x) + e = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Longrightarrow bx^3 + dx = 0$$

Luego $P(x) = ax^4 + cx^2 + e$

- ☛ Dos de sus raices son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \Longrightarrow P(1) = 0 \Longrightarrow a + c + 5 = 0 \\ x = \sqrt{5} \Longrightarrow P(\sqrt{5}) = 0 \Longrightarrow 5a + c + 1 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ c = -6 \end{array}\right.$$

- ☛ $P(0) = 5 \Longrightarrow e = 5$

El polinomio es $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

a) Tenemos: $P'(x) = 4x^3 - 12x$, $P''(x) = 12x^2 - 12$ y $P'''(x) = 24x$. Para obtener los puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a cero:

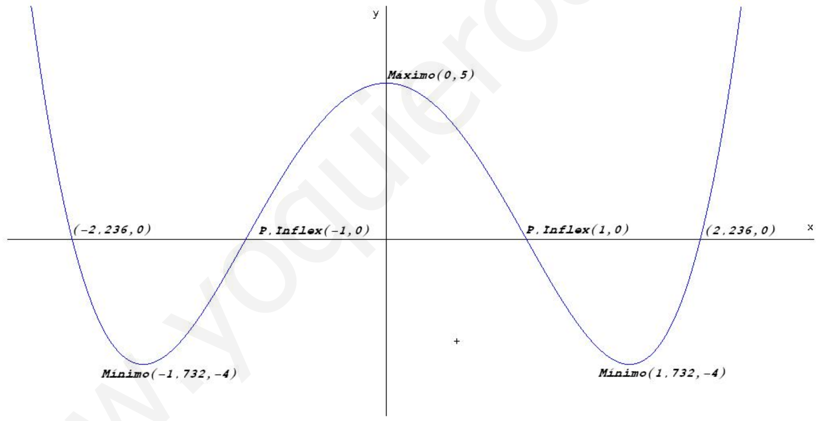
$$P''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Sustituimos en la tercera derivada:

$$\left\{\begin{array}{l} P'''(1) = 24 \neq 0 \\ P'''(-1) = -24 \neq 0 \end{array}\right.$$

Luego esta función tiene dos puntos de inflexión en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) La gráfica será la siguiente:



Calculamos sus máximos y mínimos:

$$P'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}, \;\; x = 0$$

Por la segunda derivada

$$\left\{\begin{array}{l} P''(0) = -12 < 0 \\ P''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \\ P''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \end{array}\right.$$

La función tiene un Máximo en el punto $(0, 5)$ y dos Mínimos en los puntos $(-\sqrt{3}, -4)$ y $(\sqrt{3}, -4)$.

Ahora calculamos puntos de corte:

Con el eje OY : Hacemos $x = 0$ y tenemos $(0, 5)$.

Con el eje OX : Hacemos $P(x) = 0$ y tenemos $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$.

3.3. Año 2002

3.3.1. Modelo

Opción A

Problema 3.3.1 *(3 puntos)* Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.

a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente en $x = r$ es $m = -2r$, y la ecuación de esta recta será:

$$y - (4 - r^2) = -2r(x - r) \Longrightarrow 2rx + y - (4 + r^2) = 0$$

La base del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de abscisas, haciendo $y = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 + r^2}{2r}$

La altura del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de ordenadas, haciendo $x = 0 \Longrightarrow y = 4 + r^2$.

La función a minimizar será:

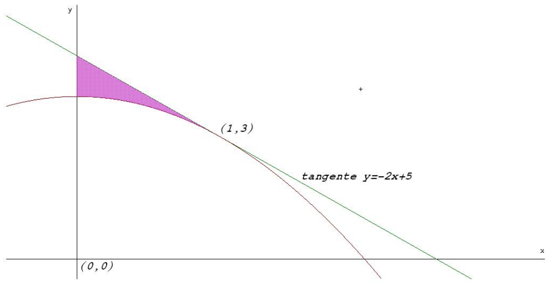
$$S(r) = \frac{\dfrac{4 + r^2}{2r}(4 + r^2)}{2} = \frac{(4 + r^2)^2}{4r}$$

$$S'(r) = \frac{(4 + r^2)(3r^2 - 4)}{4r^2} = 0 \Longrightarrow r = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

	$(-\infty, -2/\sqrt{3})$	$(-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$	$(2/\sqrt{3}, \infty)$
$S'(r)$	$+$	$-$	$+$
$S(r)$	Creciente	Decreciente	Creciente

Luego la función es mínima cuando $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) El recinto es el siguiente:



La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $2x + y - 5 = 0 \Longrightarrow y = -2x + 5$. El área es el comprendido entre esta recta y la parábola en el intervalo de integración $[0, 1]$:

$$S = \left|\int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2))dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1\right| = \left|\frac{1}{3} - 1 + 1\right| = \frac{1}{3}\,u^2$$

Opción B

Problema 3.3.2 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $1/9$, calcular el valor de p.

Solución:

a) Estudio:

- Dominio: $\text{Dom}(f) = R$
- Signo:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

- Simetría: No hay $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$
- Puntos de corte:
  - Si $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  - Si $f(x) = 0 \Longrightarrow x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Asíntotas:
  - Verticales no hay
  - Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} xe^{3x} = \infty$$

$y = -x \Longrightarrow$ si $x \longrightarrow -\infty$ entonces $y \longrightarrow \infty$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} xe^{3x} = \lim_{y\longrightarrow\infty} ye^{-3y} = \lim_{y\longrightarrow\infty} \frac{-y}{e^{3y}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{y\longrightarrow\infty} \frac{-1}{3e^{3y}} = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Monotonía: $f'(x) = e^{3x}(3x+1) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

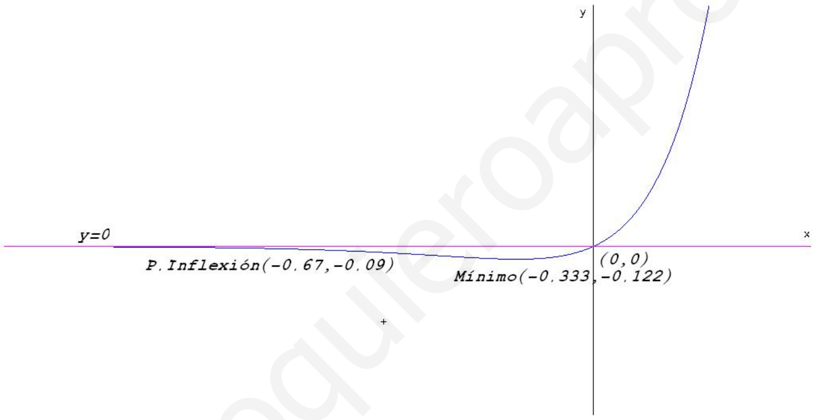
La función presenta un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3e}\right)$

☛ Curvatura: $f''(x) = 3e^{3x}(3x+2) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

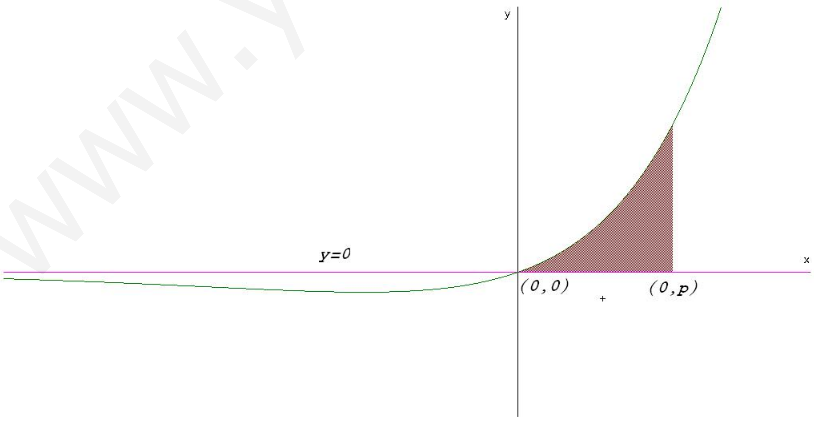
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

La función presenta un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3e^2}\right)$

☛ Representación gráfica:



b) Veamos la figura:



La integral se calcula por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{3x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{3}e^{3x}$:

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\int_0^p xe^{3x}\,dx = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)\Big]_0^p = e^{3p}\left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$e^{3p}\left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{p}{3} - \frac{1}{9} = 0 \Longrightarrow p = \frac{1}{3}$$

3.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:

a) Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$$

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Si sustituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pendiente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x - 1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

b) El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \left[\frac{3 - x}{8} - \frac{1}{x^2 + 3}\right] dx$$

Calculamos la integral

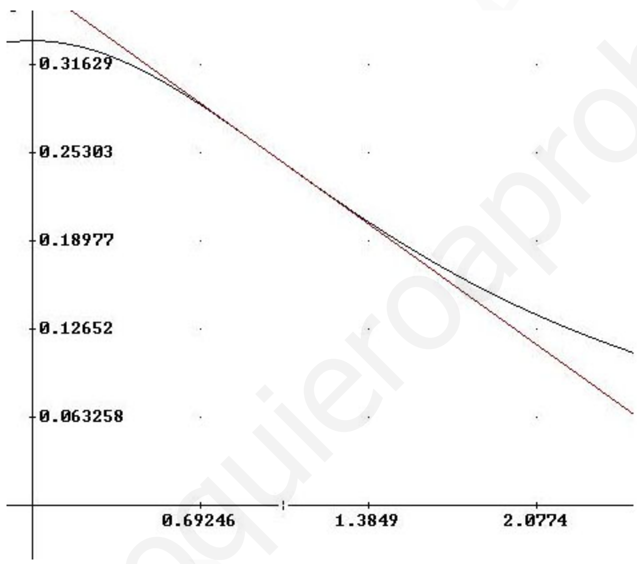
$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx = \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$



Opción B

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

a) (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

a) Calculamos el dominio:

- ☛ Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
- ☛ Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único posible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
- ☛ En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

Calculamos la continuidad:
La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supuesto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

- ☛ En $x = -1$:
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$
Luego f es continua en $x = -1$.
- ☛ En $x = 0$:
$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
Luego no es continua en $x = 0$.
- ☛ En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

b) Asíntotas verticales:

- ☛ Cuando $x \geq -1$:
$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.
- ☛ Cuando $x < -1$:
No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

Asíntotas horizontales:

- ☛ Cuando $x \geq -1$:
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.
- ☛ Cuando $x < -1$:
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$
Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

- ☛ Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x} = 3$$

Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- ☛ Cuando $x < -1$: No hay asíntotas oblicuas en este intervalo por haber horizontales.

c) El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abscisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x} dx = \int_1^2 (x + 3 + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln |x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$

3.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.3.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x)\, dx = 1$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $(-1, -1/2)$ tenemos un Mínimo y en el punto $(1, 1/2)$ tenemos un Máximo.

b)

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^a = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln(a^2+1) = 1 \Longrightarrow a = \sqrt{e^2-1}$$

Problema 3.3.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3,1)$.

Solución:

a) Estudiamos en el punto $x = 2$:

Continuidad:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} \sqrt[3]{x-2} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} x(x-2) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Como

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = f(2) \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = 2$$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = 2, \quad f'(2^+) = \infty$$

Como

$$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = 2$$

b) Es en la rama $x \geq 2$:

$$f(3) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{(x-2)^2}} \Longrightarrow m = f'(3) = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x-3) \Longrightarrow x - 3y = 0$$

Opción B

Problema 3.3.7 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Solución:

a)
$$g'(x) = f'(x + f(0))(x + f(0))' = f'(x+1)(1 + f'(0)) = f'(x+1)4$$
$$g'(0) = f'(0+1)4 = 4 \cdot 4 = 16$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{4(f(x))f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = 8$

3.4. Año 2003

3.4.1. Modelo

Opción A

Problema 3.4.1 *(2 puntos)* Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$

Solución:

$$f(0) = 4 \Longrightarrow D = 4$$
$$f'(x) = A\cos x + 2Bx + C \ \text{ como } \ f'(0) = 0 \Longrightarrow A + C = 0$$
$$f''(x) = -A\sin x + 2B \Longrightarrow A = -3, \ \ B = -5$$

Luego $A = -3$, $B = -5$, $C = 3$ y $D = 4$:

$$f(x) = -3\sin x - 5x^2 + 3x + 4$$

Problema 3.4.2 *(2 puntos)* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{5x-2}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6}$$
$$5x-2=A(x-2)+B(x-3)$$

Si $x=2\Longrightarrow 8=-B\Longrightarrow B=-8$

Si $x=3\Longrightarrow 13=A\Longrightarrow B=13$. Luego:

$$\frac{x^2+4}{x^2-5x+6}=1+\frac{13}{x-3}-\frac{8}{x-2}$$
$$\int\frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx=\int dx+13\int\frac{1}{x-3}\,dx-8\int\frac{1}{x-2}\,dx=$$
$$x+13\ln|x-3|-8\ln|x-2|=x+\ln\frac{|x-3|^{13}}{|x-2|^8}$$

Opción B

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

c) (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.

d) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x=-1$, $x=1$.

Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

$$A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$$

Solución:

a) Monotonía:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}\right)=0\Longrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en $(-\infty,-1/2)$ y decreciente en $(-1/2,\infty)$. Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2},\sqrt[3]{4}\right)$ tenemos un Máximo.

Asíntotas:

- Verticales: No hay

☛ Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}) = [\infty-\infty] = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

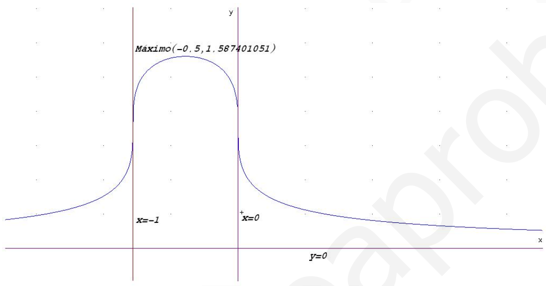
Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal.

☛ Oblicuas: No hay

b)

$$f'(a) = \infty \Longrightarrow \sqrt[3]{a^2(a+1)^2} = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = -1$$

c) Representación gráfica



d)

$$\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})\,dx = \left.\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4}-\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\ u^2$$

3.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.4.4 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde "ln"significa logaritmo neperiano).

a) (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

a) (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3\cos(3x)\cos(2x)-2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)-3\sin(2x)\sin(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

b) (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{8}$$

Problema 3.4.5 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x^5-x^8}{1-x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) (1 punto) Estudiar si f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:

a) Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1-x^6=0\Longrightarrow x=1,\ x=-1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x\longrightarrow 1}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{5x^4-8x^7}{-6x^5}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^4(5-8x^3)}{-6x^5}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{5-8x^3}{-6x}=\frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x=1$ es evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{x^5-x^8}{1-x^6}=\left[\frac{-2}{0^-}\right]=+\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x=-1$ no es evitable.

b) Por lo visto en el apartado anterior $x=-1$ es una asíntota vertical.

Opción B

Problema 3.4.6 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

c) (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

a) El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

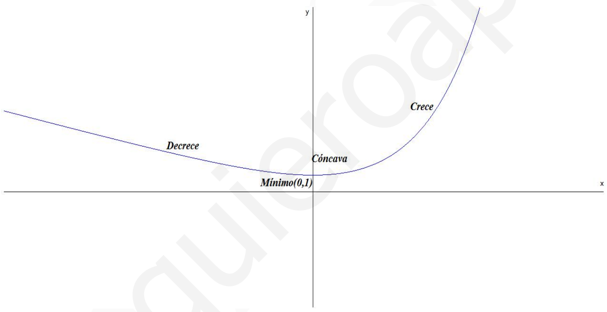
$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.

Su gráfica sería:



b)
$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abscisas) es una asíntota horizontal.

c)

$$f'(x) = \frac{1-e^x}{(e^x-x)^3} = 0 \Longrightarrow 1-e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x}+e^x(x-4)+2}{(e^x-x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0,1)$ es un máximo.

3.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.4.7 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

c) (1 punto) Calcular

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

Luego $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y $x = -\frac{5\pi}{3}$ son los únicos posibles extremos en el intervalo de definición.
Vamos a recurrir a la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f''\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos máximo en los puntos $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{5\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

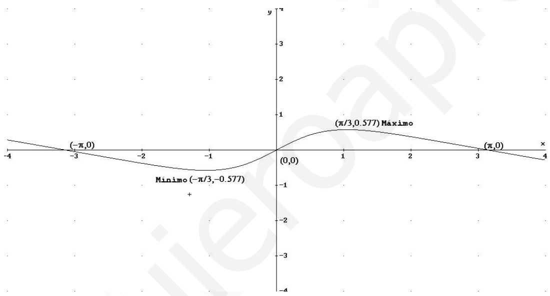
$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos mínimos en los puntos $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) Para dibujar la gráfica voy a calcular los puntos de corte: Si $x = 0$ tenemos que $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$. Si $f(x) = 0$ tenemos que $\frac{\sin x}{2 - \cos x} = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow x = \pi,\ x = -\pi$. Luego tenemos los puntos $(\pi, 0)$ y $(-\pi, 0)$. Si tenemos en cuenta que la función es impar:



c) Para resolver la integral hacemos un cambio de variable

$$t = 2 - \cos x \Longrightarrow \sin x\, dx = dt$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{\sin x}{2 - \cos x}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|2 - \cos x| + C$$

Luego la integral pedida valdrá:

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{2 - \cos x}\, dx = \ln|2 - \cos x|]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$$

Opción B

Problema 3.4.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x|4 - x|$.

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad.

b) Dibujar su gráfica.

c) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$, y el eje OX.

Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x \geq 0 \\ -2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x < 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x(4-x) & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -2x(4-x) & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 4} (-2x(4-x)) = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 4} (2x(4-x)) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

Luego la función es continua en $x = 4$, y por tanto, en todo R.

$$f'(x) = \begin{cases} 8-4x & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -8+4x & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(4^-) = -8 \\ f'(4^+) = 8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f'(4^-) \neq f'(4^+)$$

Luego la función no es derivable en $x = 4$, pero si es derivable en $R - \{4\}$.

b) Para dibujar el recinto estudiamos la gráfica de cada rama por separado:

$f(x) = 8x - 2x^2$ si $x \in (-\infty, 4]$

$f'(x) = 8 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$

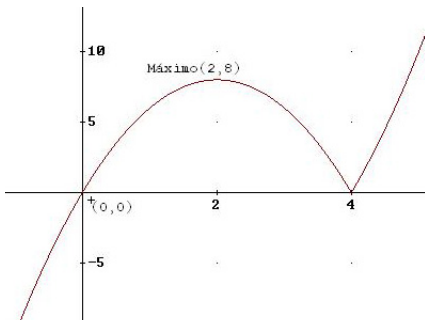
$f''(2) = -4 \Longrightarrow (2, 8)$ es un máximo.

Si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$, como puntos de corte.

$f(x) = -8x + 2x^2$ si $x \in (4, +\infty)$

$f'(x) = -8 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$, que no está en el intervalo $(4, +\infty)$.

En este intervalo la función es siempre creciente, es decir, $f'(x) > 0$ cuando $x \in (4, +\infty)$. Con estos datos estamos en condiciones de dibujar la gráfica:



c) A la vista de la gráfica podemos entender fácilmente de que recinto se trata.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 2x(4-x)dx + \int_4^5 (-2x(4-x))dx = \\ &= \int_0^4 (8x-2x^2)dx + \int_4^5 (-8x+2x^2)dx = 26\,u^2 \end{aligned}$$

3.5. Año 2004

3.5.1. Modelo

Opción A

Problema 3.5.1 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

b) (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}}\,dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2n\left(\frac{3n-1}{3n}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2n}{3n} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = e^{-2/3}$$

b)

$$F'(x) = \sqrt{5+e^{x^4}}, \quad g'(x) = 2x$$

Por la regla de la cadena:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = 2x\sqrt{5+e^{x^8}}$$

Problema 3.5.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x^2-x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.

b) (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Solución:

a)
$$x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 1 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(f) = R - \{1\}\ \text{ en } x = 0\ f(0) = a$$

Los límites laterales pedidos son:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = -\infty$$

b) En $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable por el apartado anterior.

En $x = 0$:
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = -1$$

Para que f sea continua en ese punto $a = -1$.

Opción B

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.

b) (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.

c) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

Solución:

a) $1 + \sin^2 x \neq 0$ siempre $\Longrightarrow$ no hay puntos críticos.

La función es par.

b)
$$f'(x) = \frac{-2\sin x \cos x}{(1 + (\sin^2 x))^2} = 0 \Longrightarrow -2\sin x\cos x = 0$$

$$-2\sin x\cos x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = -\pi,\ \ x = \pi \\ \cos x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\quad x = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente

En los puntos de abscisa $x = 0$, $x = -\pi$ y $x = \pi$ la función presenta un Máximo.

En el puntos de abscisa $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función presenta un Mínimo.

c)

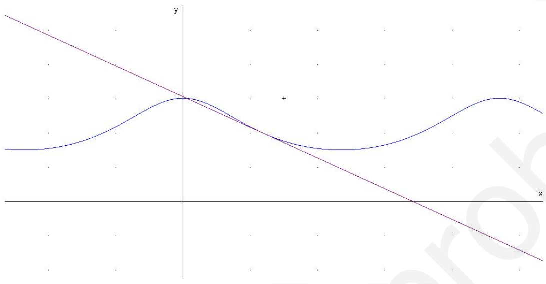
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$$

$$m=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{9}$$

La ecuación de la recta tangente

$$y-\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

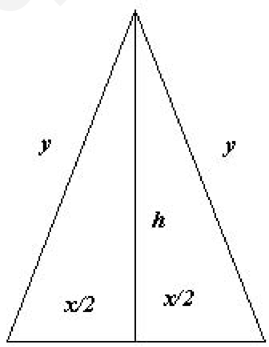
d) Representación gráfica



3.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.5.4 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.
Solución:



$$S=\frac{x\cdot h}{2};\quad x+2y=8;\quad h=\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4-x}$$
$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$
$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow y = \dfrac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 3.5.5 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

a) *a*) **Asíntotas:**

- **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Extremos:

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$x+1/2$	$-$	$+$	$+$
$x-1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

b)

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$
$$= \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1) + C$$
$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 5$$

Opción B

Problema 3.5.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

a) Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1 - a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \Longrightarrow 2ax + y - (1 + a^2) = 0$$

b) **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1 + a^2 \Longrightarrow A(0, 1 + a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a + \dfrac{1 - a^2}{2a} = \dfrac{a^2 + 1}{2a}$. Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2 + 1}{2a}, 0\right)$.

c)

$$d(A, P) = \sqrt{(a - 0)^2 + (1 - a^2 - (1 + a^2))^2} = a\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1 - a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1 - a^2 - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1 - a^2)^2}{4a^2} + (1 - a^2)^2} = (1 - a^2)\sqrt{\frac{1 + 4a^2}{4a^2}} = \frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(A, P) = 2d(B, P) \Longrightarrow a\sqrt{1 + 4a^2} = 2\frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2} \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1 - a^2}{a} \Longrightarrow a^2 = 1 - a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a \in (0, 1)$ la solución pedida es la positiva $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.5.7 *(3 puntos)* Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7)$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

a)
$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7) = 0 \Longrightarrow x = 4,\ \ x = 1,\ \ x = 7$$

Como $(x-4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2-8x+7 = (x-1)(x-7)$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 7)$	$(7, \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego f crece en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1, 7)$.

b) Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\dfrac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.

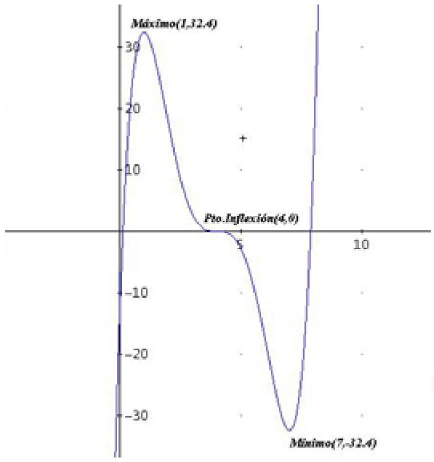
c) Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4,\ \ x = 1,8787,\ \ x = 6,1213$$

Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

$$f'''(x) = 6(2x^2-16x+29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

Luego se trata de un punto de inflexión.



Opción B

Problema 3.5.8 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Solución:

a) **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.

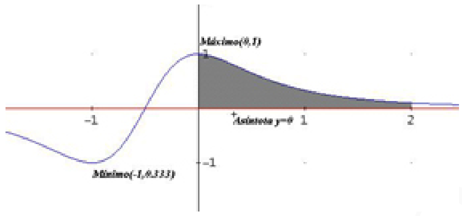
Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- ☛ **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

b) Representación Gráfica:



c)
$$\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+x+1}\Big]_0^2 = \frac{6}{7}$$

3.6. Año 2005

3.6.1. Modelo

Opción A

Problema 3.6.1 *(2 puntos)*

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función
$$f(x) = x^{15} + x + 1$$
corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Solución:

a) La función $f(x) = x^{15}+x+1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ toma los valores $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, como además la función es continua por el teorema de Bolzano: $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) La derivada de la función $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0$ para cualquier valor de x, luego la función es siempre creciente, luego sólo puede cortar una vez al eje OX, y por el apartado anterior este punto de corte tiene que estar en el intervalo $(-1, 1)$.

Problema 3.6.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array} \right. \Longrightarrow x = \pm 2$$

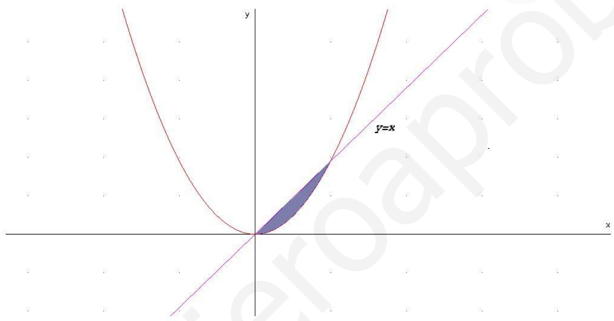
Como piden el punto del primer cuadrante la solución negativa no vale y el punto será $(2, 2)$.

b) La recta que une el origen de coordenadas y el punto $(2, 2)$ es $y = x$. Los puntos de corte son

$$x = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx = \left. \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\acute{A}rea = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}\, u^2$$



Opción B

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

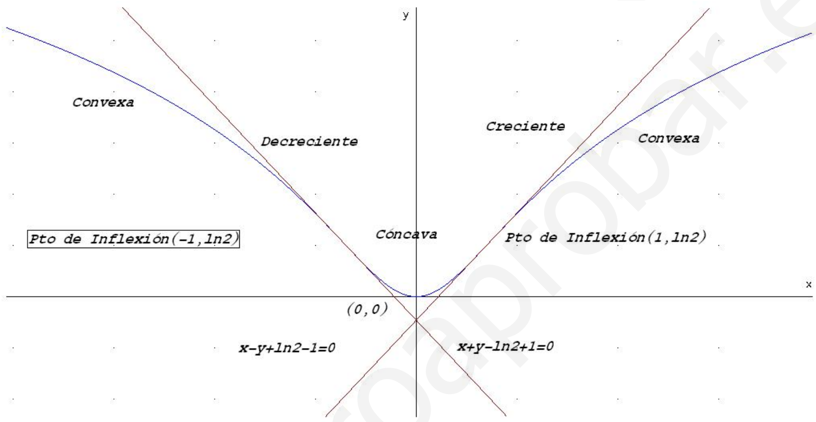
Luego en el punto $(0,0)$ tenemos un Mínimo.

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = 0 \Longrightarrow x = -1, \quad x = 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Luego en los puntos $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$ hay dos puntos de Inflexión.

b) Representación gráfica



c) La tangente en el punto $(-1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(-1) = -1 \Longrightarrow y - \ln 2 = -x + 1 \Longrightarrow x + y - \ln 2 + 1 = 0$$

La tangente en el punto $(1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(1) = 1 \Longrightarrow y - \ln 2 = x - 1 \Longrightarrow x - y + \ln 2 - 1 = 0$$

3.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.6.4 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\left.\frac{1-2xf(x)}{2}\right]_0^1 = -\frac{1-2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 3.6.5 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

☛ tiene un máximo relativo en $x = 1$

☛ tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.

☛ se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Solución:

☛
$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$

☛
$$p''(x) = 6ax + 2b \Longrightarrow p''(0) = 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$$
$$p(0) = d = 1$$

☛
$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)dx = \left.\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$
$$\Longrightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow a + 2c = 1, \quad \text{y} \quad 3a + c = 0 \Longrightarrow$$
$$a = -\frac{1}{5}, \quad c = \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$$

Opción B

Problema 3.6.6 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

a) (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$$

b) (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$

3.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.6.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a>0$

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

c) (1 punto) Hallar el valor de $a>0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Solución:

a)

$$f(a)=\frac{1}{a},\ \ m=f'(a)=-\frac{1}{a^2}$$

La recta tangente es

$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

b) Haciendo $y=0\Longrightarrow A(2a,0)$ y haciendo $x=0\Longrightarrow B\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

c)

$$d(a) = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{2}{a}\sqrt{a^4+1}$$

$$d'(a) = \frac{2a^4-2}{a^2\sqrt{a^4+1}} = 0 \Longrightarrow \; a = 1, \;\; a = -1$$

Como $a > 0 \Longrightarrow a = 1$ En el intervalo $(-1, 1)$ la d' es negativa y en el $(1, +\infty)$ es positiva, luego pasa de decrecer a crecer en $a = 1$ y, por tanto, es un mínimo.

Opción B

Problema 3.6.8 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Solución:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f(2) = \ln\frac{4}{1} = \ln 4 = 2\ln 2 \Longrightarrow (4, 2\ln 2)$$

Problema 3.6.9 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ la función es creciente en este intervalo.

En el intervalo $(0, +\infty) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ la función es decreciente en este intervalo.

Luego en el punto $(0, f(0)) = (0, 1/4)$ la función presenta un máximo.

b)

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = -\frac{1}{1+e^x}\bigg]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 1 + e^a = 4 \Longrightarrow e^a = 3 \Longrightarrow a = \ln 3$$

3.7. Año 2006

3.7.1. Modelo

Opción A

Problema 3.7.1 *(3 puntos)* Dada la función:

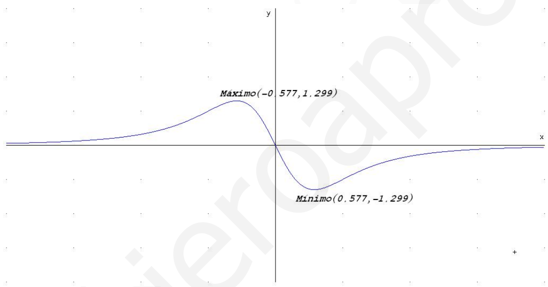
$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

a) (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x)\,dx = -1$$

Solución:



a)

$$f'(x) = \frac{4(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Máximo y en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Mínimo.

b)

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dx = -2\int_0^a 2x(1+x^2)^{-2}\,dx = -2\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}\Bigg]_0^a =$$

$$\frac{2}{1+x^2}\Bigg]_0^a = \frac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \Longrightarrow a = \pm 1,\ \text{como } a > 0 \Longrightarrow a = 1$$

Opción B

Problema 3.7.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2 - 3}$$

b) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Solución:

a)

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \frac{2}{x} = \sqrt{x^2 - 3} \Longrightarrow x = \pm 2$$

La solución negativa no vale, luego $x = 2$ es el único punto común.

b) Tangente a $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\frac{1}{2}, \text{ y } f(2) = 1 \Longrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Tangente a $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} \Longrightarrow m' = g'(2) = -2, \text{ y } g(2) = 1 \Longrightarrow y - 1 = 2(x - 2)$$

Como $m = -\dfrac{1}{m'} \Longrightarrow$ las dos rectas son perpendiculares.

Problema 3.7.3 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x - \cos x}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

b) (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Solución:

a)

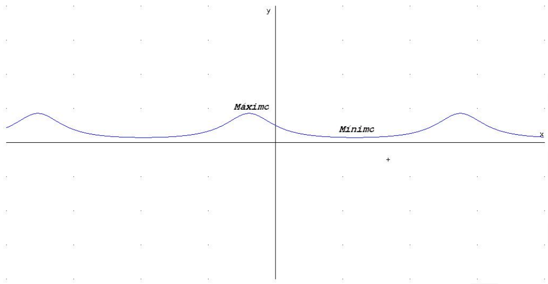
$$f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{(2 + \sin x - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\Longrightarrow \tan x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo y no se anula nunca.

	$(0, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$(\frac{7\pi}{4}, 0)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Mínimo y en el punto $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Máximo.



b) Como $f''(x)$ es una función continua y derivable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y además $f'(\pi) = f'(-\pi) = 1/9$ por el teorema de Rolle existe un punto $c \in [-\pi, \pi]$ en el que $f''(c) = 0$.

Como el punto c anula la segunda derivada y en él la función es continua tiene que tratarse de un punto de inflexión.

3.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.7.4 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Solución:

a) ☛ $Dom f = R - \{-1\}$.

☛ Asíntotas:

a) Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

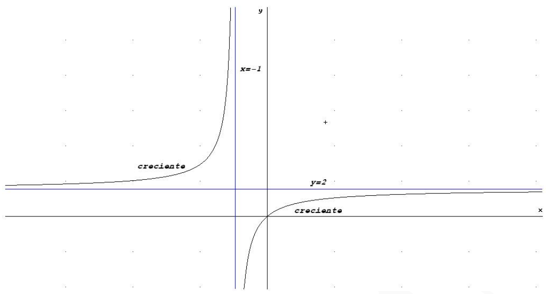
b) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

c) Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Monotonía:
$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Longrightarrow \text{siempre creciente}$$
Luego no hay ni máximos ni mínimos.

☛ Representación gráfica:



b) Si tenemos en cuenta que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales excluido el cero, y si tenemos en cuenta que la función $a_n = f(n) = \dfrac{2n}{n+1}$ hemos demostrado en el apartado anterior que es creciente en $R - \{-1\}$, con mayor razón lo es en el conjunto $N - \{0\}$.

Otra manera de demostrarlo:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$
luego la sucesión es creciente.

c)
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n+2} = 2$$

Opción B

Problema 3.7.5 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:
$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Solución:

a) *a)* ☛ $Dom f = R - \{2\}$, Punto de corte en $(0, 1/2)$.
☛ Asíntotas:

1) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

2) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

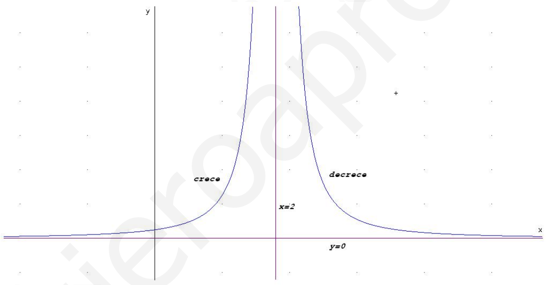
3) Oblicuas: No hay por haber horizontales.

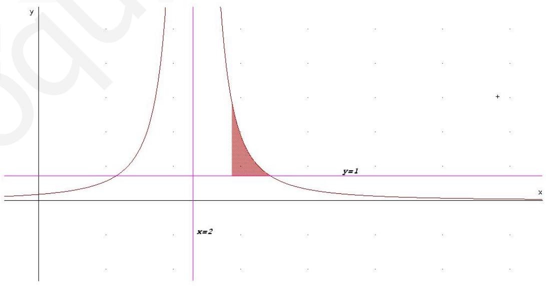
☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece





b)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

c)

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

$$S = \int_{5/2}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = -\frac{1}{x-2} - x \Big]_{5/2}^{3} = \frac{1}{2}$$

3.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.7.6 *(2 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

Solución:

$$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x^2+2x}$$

$$\begin{array}{ll} & 1 = A(x+2) + Bx \\ \text{si } x = 0 & 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2 \\ \text{si } x = -2 & 1 = -2B \Longrightarrow B = -1/2 \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2} = \ln\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Problema 3.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua en todo valor de x.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) Continua en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(3x+2) = 2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(x^2+2a\cos x) = 2a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = 1$$

Continua en $x = \pi$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \pi}(x^2+2a\cos x) = \pi^2 - 2a = \pi^2 - 2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \pi}(ax^2+b) = a\pi^2 + b = \pi^2 + b \end{array}\right\} \Longrightarrow b = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2\cos x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2\sin x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ 2x & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Es derivable en } x = \pi$$

Opción B

Problema 3.7.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \le x \le 1$.

Solución:

a) $Dom(f) = R$

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} xe^{2x} = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{t \longrightarrow \infty} (-te^{-2t}) = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{-1}{-2e^{2t}} = 0$$

Luego cuando la $x \longrightarrow -\infty$ hay una asíntota $y = 0$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Monotonía:

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece

La función es creciente en el intervalo: $(-1/2, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, -1/2)$

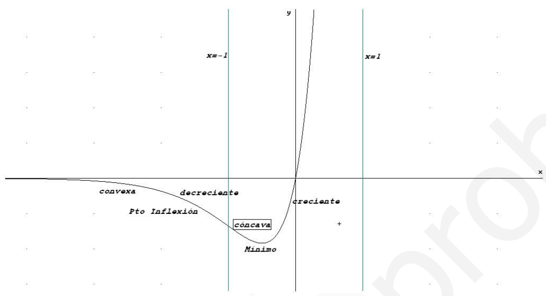
Como en el punto $(-1/2, -1/(2e))$ la función pasa de decrecer a crecer estamos ante un mínimo.

Curvatura:

$$f''(x) = 4e^{2x}(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Como en el punto $(-1, -1/(e^2))$ la función pasa de convexa a cóncava estamos ante un punto de inflexión.



b)

$$Área = \left| \int_{-1}^{0} xe^{2x}\, dx \right| + \left| \int_{0}^{1} xe^{2x}\, dx \right|$$

La integral $\displaystyle\int xe^{2x}\, dx$ se resuelve por partes, llamamos:

$u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{2x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}\, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = e^{2x}\left(\frac{2x-1}{4}\right) = F(x)$$

$$Área = |F(0) - F(-1)| + |F(1) - F(0)| = \left|\frac{3e^{-2} - 1}{4}\right| + \left|\frac{e^2 + 1}{4}\right| = 2{,}245762562$$

3.8. Año 2007

3.8.1. Modelo

Opción A

Problema 3.8.1 *(3 puntos)*

a) (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_{0}^{x} (f(t) + t^2 + t^3)\, dt$$

b) (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

a) Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función continua si

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

Luego $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

b)

$$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$

$$F(1) = \int_0^1 (f(t) + t^2 + t^3)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t^3\,dt = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\Big]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

$$y - \frac{19}{4} = 3(x-1)$$

Opción B

Problema 3.8.2 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

a) (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

b) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$

$$f'(x) = 12x - 3x^2 \Longrightarrow m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \Longrightarrow a = 5,\ \ a = -1$$

Como $a > 0 \Longrightarrow$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \Longrightarrow (5, 25)$ es el punto buscado.

b) Los puntos de corte con el eje OX son

$$6x^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 6$$

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = 2x^3 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^6 = 108\,u^2$$

Problema 3.8.3 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(kx+5)\left(\frac{x+3}{x} - 1\right) = 3k$$

Luego $3k = 2 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{3}$.

3.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.8.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = x^2+m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) $(a, f(a)) = (a, a^2+m)$, $f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(a) = 2a$. Luego la recta tangente sería: $y-a^2-m = 2a(x-a)$. Si imponemos que pase por el punto $(0,0) \Longrightarrow -a^2 - m = -2a^2 \Longrightarrow a = \sqrt{m}$ (la solución negativa no vale).

b) La recta $y = x$ tiene de pendiente $1 \Longrightarrow f'(a) = 2a = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$, luego el punto de tangencia es el $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, es decir, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + m = \frac{1}{2} \Longrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Opción B

Problema 3.8.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-12}{x^2+4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Solución:

$$\frac{x^2-12}{x^2+4} = 0 \Longrightarrow x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2-12}{x^2+4}\, dx \right|$$

$$F(x) = \int \frac{x^2-12}{x^2+4}\, dx = \int \left(1 - 16\frac{1}{x^2+4}\right) dx = x - 16\int \frac{1}{x^2+4}\, dx =$$

$$x - 16\int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right) dx = x - 4\int \frac{2}{t^2+1}\, dt = x - 8\arctan t = x - 8\arctan\frac{x}{2}$$

$$S = |F(2\sqrt{3}) - F(-2\sqrt{3})| = \left|\frac{4(3\sqrt{3}-4\pi)}{3}\right| = |-9,8269| = 9,8269\ u^2$$

Problema 3.8.6 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

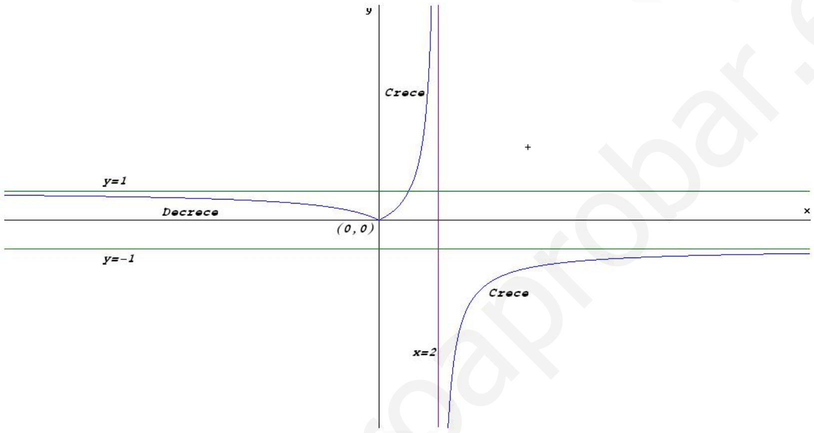
$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dominio: $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$



Monotonía: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$. Asíntotas:

- Verticales:
  Si $x < 0$ no hay
  Si $x \geq 0 \Longrightarrow x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales:
  Si $x < 0 \Longrightarrow y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$$

  Si $x \geq 0 \Longrightarrow y = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = -1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

3.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.8.7 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$

Luego la función tiene un mínimo en el punto $(-1, 5/2)$ y un máximo en el $(1, 7/2)$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

Como la función en estos tres puntos cambia de curvatura y hay continuidad, los tres son puntos de inflexión:

$$(0, 3), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right), \quad \left(-\sqrt{3}, \frac{11\sqrt{3}}{4}\right)$$

b)

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}\, dx = 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$$

$$F(0) = 4 \Longrightarrow C = 4 \Longrightarrow F(x) = 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 4$$

Opción B

Problema 3.8.8 *(3 puntos)* Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

- ☛ $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.
- ☛ $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
- ☛ $g(-1) = 0$, $\;g(0) = 2$, $\;g(2) = 1$.

☛ $\lim_{x\longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

c) (1 punto) Si $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

Solución:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$

Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

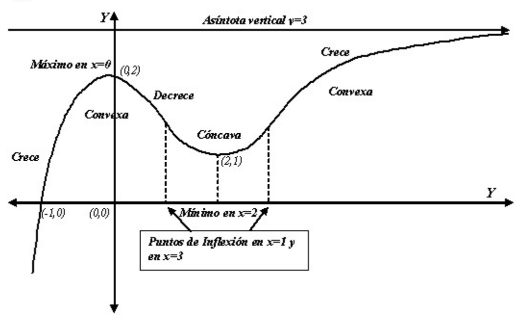
	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$g''(x)$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$

Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene dos puntos de inflexión en $x = 1$ y en $x = 3$.

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: No hay, ya que la función es continua y derivable en todo R.
- ☛ Horizontales: en $y = 3$, ya que $\lim_{x\longrightarrow +\infty} g(x) = 3$
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

b) Su representación sería:



c) $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, como $g(x)$ es continua y derivable podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo y tenemos que $G'(x) = g(x) \Longrightarrow G'(x_0) = g(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 = -1$

3.9. Año 2008

3.9.1. Modelo

Opción A

Problema 3.9.1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

a) (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

b) (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

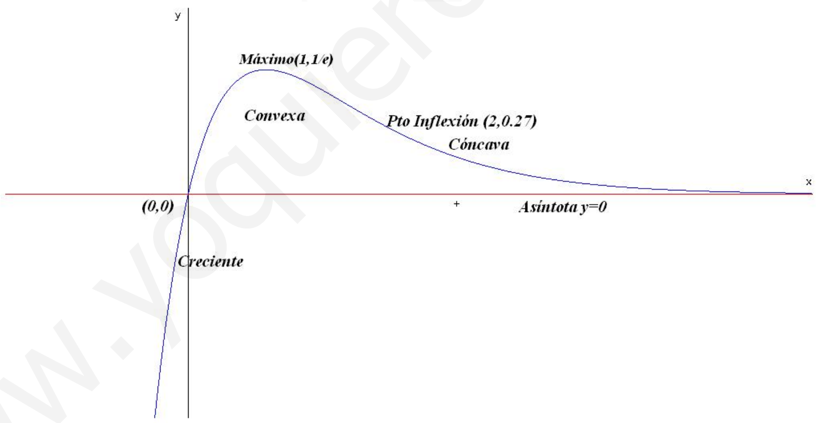
- Verticales: No hay ya que el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

b) Representación gráfica



$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Luego hay un máximo en el punto $(1, e^{-1})$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

Problema 3.9.2 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Solución:

a)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-5}$$

$$\lambda=\lim_{n\longrightarrow\infty}(1-5n)\cdot\left(\frac{2+n}{1+n}-1\right)=-5$$

b)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}=$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n})(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2+1/n^2-3/n^3}{(1+5/n)(\sqrt{1+2/n-3/n^4}+\sqrt{1-1/n^3})}=1$$

Opción B

Problema 3.9.3 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} ax^2+b & \text{si} & |x|<2\\ 1/x^2 & \text{si} & |x|\geq 2\end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

b) (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x=1$, $x=3$.

Solución:

a)

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} ax^2+b & \text{si} & |x|<2\\ 1/x^2 & \text{si} & |x|\geq 2\end{array}\right.\Longrightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 1/x^2 & \text{si} & x\leq -2\\ ax^2+b & \text{si} & -2<x<2\\ 1/x^2 & \text{si} & x\geq 2\end{array}\right.$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=-2$:

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} (ax^2+b) = 4a+b$$

$$4a+b = \frac{1}{4} \Longrightarrow 16a+4b=1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$: (Quedan los mismos resultados de $x=-2$)

La derivada será:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -2/x^3 & \text{si} & x \le -2 \\ 2ax & \text{si} & -2 < x < 2 \\ -2/x^3 & \text{si} & x \ge 2 \end{array} \right.$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=-2$:

$$f'(-2^-) = \frac{1}{4}, \quad f'(-2^+) = -4a$$

$$-4a = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=2$: (Quedan los mismos resultados de $x=-2$)

$$4a = -\frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Si $a = -\dfrac{1}{16} \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1/x^2 & \text{si} & x \le -2 \\ -1/16x^2+1/2 & \text{si} & -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} & x \ge 2 \end{array} \right.$$

b) El signo de la función f en el intervalo $[1,2]$ es siempre positiva, y lo mismo ocurre en el intervalo $[2,3]$

$$-1/16x^2+1/2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Los íntervalos de integración serán $(1,2)$ y $(2,3)$

$$S_1 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\right)\,dx = \left.\frac{-x^3}{48}+\frac{x}{2}\right]_1^2 = \frac{17}{48}$$

$$S_2 = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx = \left.-\frac{1}{x}\right]_2^3 = \frac{1}{6}$$

$$S = S_1+S_2 = \frac{17}{48}+\frac{1}{6} = \frac{25}{48}\ u^2$$

3.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.9.4 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow +\infty}(e^x - x^2)$

b) (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}(e^x - x^2) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} e^x = \infty$$

ya que:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{4}{5}\right)^x+1\right)}{6^x\left(\left(\frac{3}{6}\right)^x+1\right)} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x+1}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1} = 0$$

Problema 3.9.5 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = e^{-2}$$

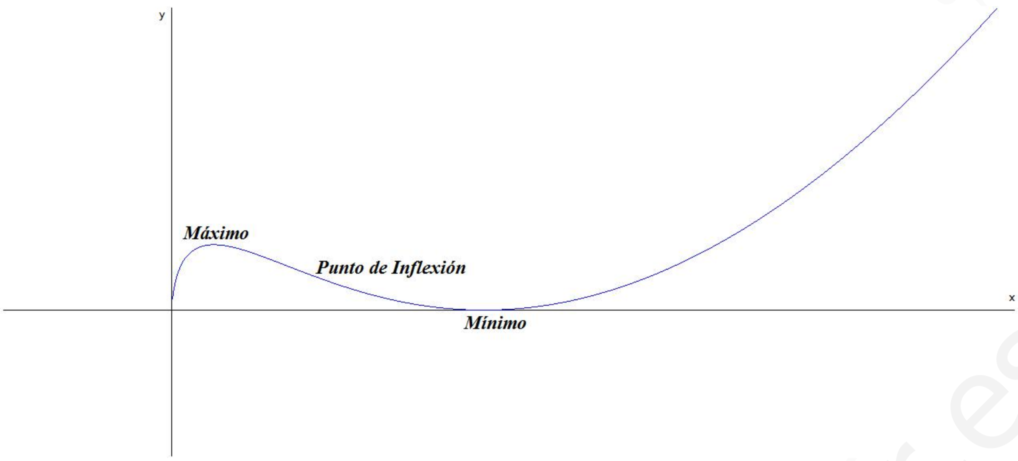
	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en el punto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo en $(1, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

	$(0, e^{-1})$	(e^{-1}, ∞)
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

La función presenta un punto de Inflexión en el (e^{-1}, e^{-1})



Opción B

Problema 3.9.6 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:
$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$
el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Solución:

a)
$$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow c^2x^4 + x^2 + c = 0$$
Esta ecuación no tiene soluciones para $0 < c < 10$, ya que el discriminante $1 - 4c^2 < 0$, esto quiere decir que, la función no corta el eje OX en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, los límites de integración del área buscada serán desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
$$S = \left| \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) \, dx \right| = \left| \frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x \right]_0^1 \right| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$
$$S(c) = \frac{3c^2 + 15c + 5}{15c}$$

b)
$$S'(c) = \frac{3c^2 - 5}{15c^2} = 0 \Longrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

	$(0, -\sqrt{5}/3)$	$(-\sqrt{5}/3, \sqrt{5}/3)$	$(\sqrt{5}/3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en $c = -\sqrt{5}/3$ y un mínimo en $c = \sqrt{5}/3$, que es el valor buscado.

3.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.9.7 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

a) (2 puntos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 punto) Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

Solución:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

a) ☛ Asíntotas:

a) Verticales: No Hay

b) Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, pero no lo es cuando $x \longrightarrow -\infty$.

c) Oblicuas: No hay por haber horizontales

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

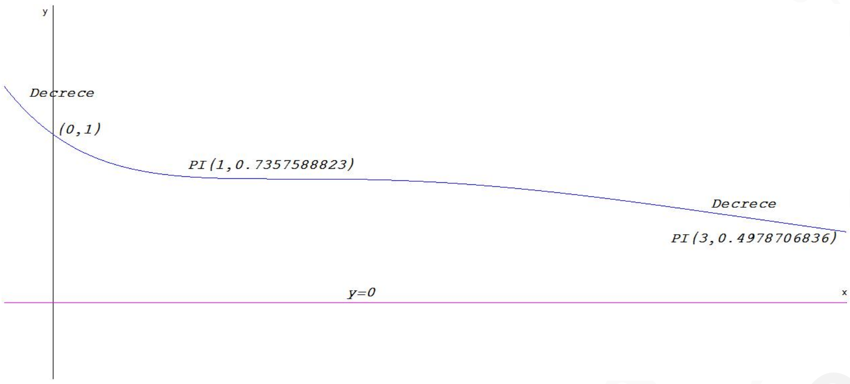
Además, $f'(x) \leq 0$ siempre y, por tanto, la función es siempre decreciente. Esto quiere decir que, la función no tiene ni máximos ni mínimos.

☛ Curvatura:

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

☛ Representación:



b) Se trata de una integral por partes donde $u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{e^{-x}}\,dx = -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}dx =$$

(Volviendo a resolver por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$)

$$= -e^{-x}(x^2+1) + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\right] = -e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} =$$

$$= -e^{-x}(x^2+2x+3) = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\,dx = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}\bigg]_0^1 = 3 - \frac{6}{e}$$

Opción B

Problema 3.9.8 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\,dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Indicación : Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Solución:

a) Se trata de una integral por partes, donde hacemos: $u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x}$ y $dv = x^3dx \Longrightarrow v = \dfrac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln(x)\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} = \frac{4x^4 \ln x - x^4}{16} + C$$

b) $x = e^t - e^{-t} \Longrightarrow dx = (e^t + e^{-t})dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{4+(e^t - e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}}}\, dt =$$

$$\int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\, dt = \int dt = t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right) + C$$

3.10. Año 2009

3.10.1. Modelo

Opción A

Problema 3.10.1 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$

c) (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a) (1 punto) Continuidad:

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} \frac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right) = \frac{7}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16} \Longrightarrow$$

f es continua en $x = \dfrac{3}{2}$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7(x-2)}{6} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{3}{4} \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) \neq f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 3/2$

b) Estudiamos su representación gráfica

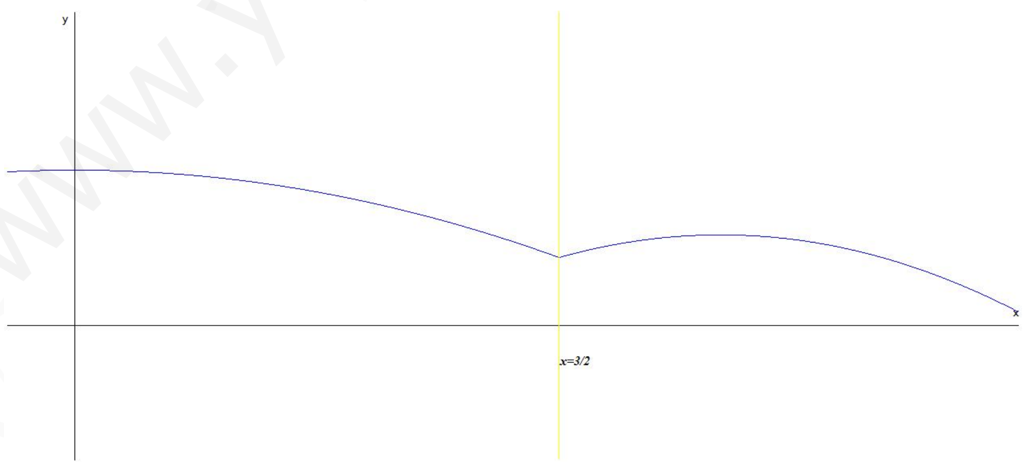
Primero los extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7(x-2)}{6} = 0 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ x = 2 \quad \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Recurrimos a la segunda derivada para discernir su clase

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Máximo} \quad \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7}{6} \Longrightarrow \text{Máximo} \quad \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

x	$f(x)$
0	1
3/2	7/16
2	7/12



Opción B

Problema 3.10.2 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 0)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 0$

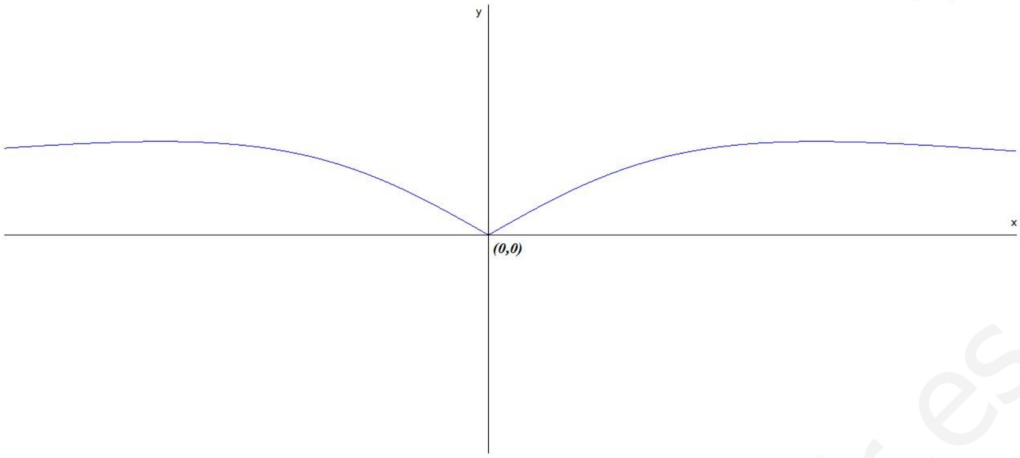
Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 0$



b) Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle la función debe ser continua en el intervalo $(-1,1)$ y derivable en el intervalo $[-1,1]$, lo cual no es cierto según el apartado anterior.

Problema 3.10.3 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Solución:

☛ Comprobamos si hay continuidad en el punto $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \left((x-1)^2\right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$

☛ Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = 1$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln x = 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x = e & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

☛ Calculamos el área:

$$S = |S_1| + |S_2|$$

Resolvemos las integrales por separado

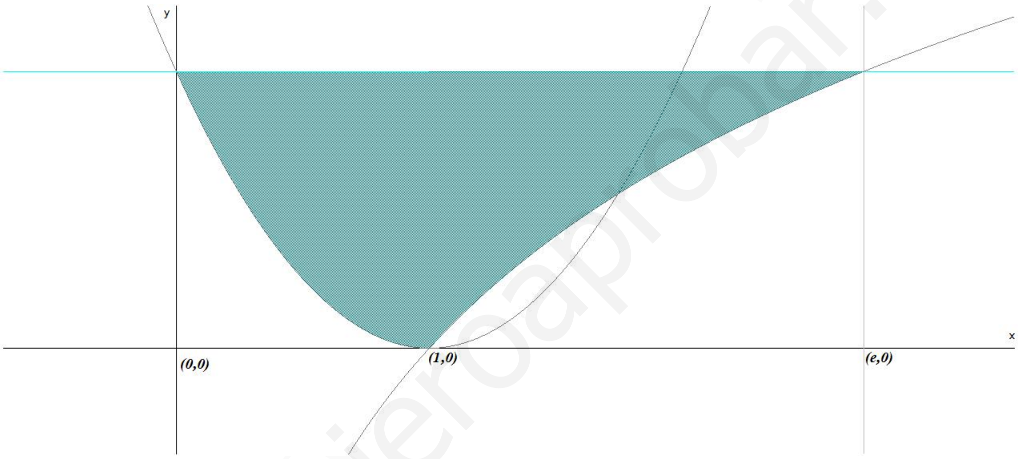
$$S_1 = \int_0^1 (1-(x-1)^2)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow |S_1| = \frac{2}{3}$$

La siguiente integral se resuelve por partes $u = \ln x \Longrightarrow u' = dx/x$ y $dv = dx \Longrightarrow v = x$

$$\int (1-\ln x)dx = x - \left(x\ln x - \int dx\right) = 2x - x\ln x$$

$$S_2 = \int_1^e (1-\ln x)dx = 2x - x\ln x]_1^e = e-2 \Longrightarrow |S_2| = e-2$$

$$S = \frac{2}{3} + e - 2 = e - \frac{4}{3}\, u^2$$



3.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.10.4 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow +\infty}(x+1)\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8} - 1\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{x+1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)$$

Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1 + \frac{1}{4x+8}\right)^{(x+1)} = e^{1/4}$$

Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{(x+1)} = e^0 = 1$$

Problema 3.10.5 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt$$

Solución:

Se trata de una integral que se resuelve por partes:

$$\left(u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt;\quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$\int t^2\, e^{-t}\, dt = -t^2 e^{-t} + 2 \int te^{-t}\, dt =$$

$$\left(u = t \Longrightarrow du = dt;\quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$= -t^2 e^{-t} + 2\left[-te^{-t} + \int e^{-t}\, dt\right] = -t^2 e^{-t} + 2\left[-te^{-t} - e^{-t}\right] = -e^{-t}\left(t^2 + 2t + 2\right)$$

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt = -e^{-t}\left(t^2 + 2t + 2\right)\Big]_0^x = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 2$$

Opción B

Problema 3.10.6 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Solución:

a)

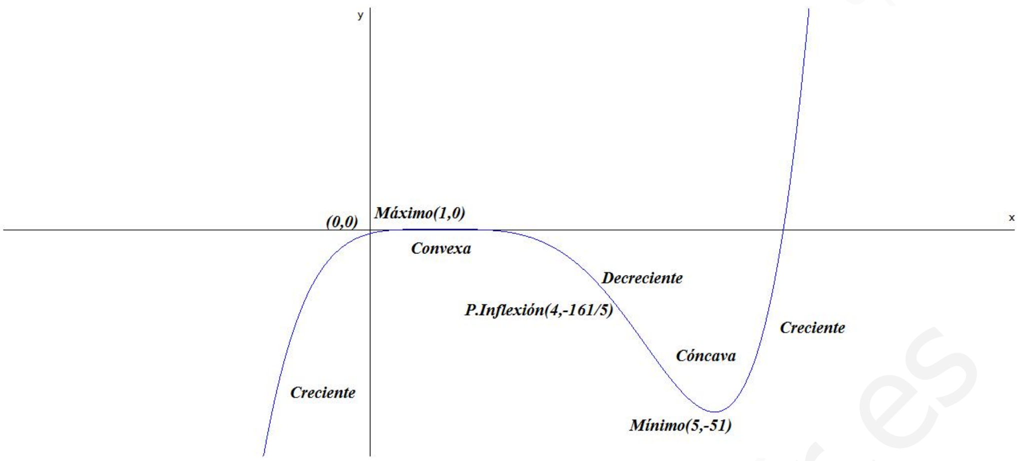
	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

b) En $x = 1$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 4(x-4)(x-1)^2$$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 4$ y $x = 1$. El único posible punto de inflexión es $x = 4$ ya que en $x = 1$ hay un máximo:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$

c) 

$$f(x)=\int\left[x^4-8x^3+18x^2-16x+5\right]\,dx=\frac{x^5}{5}-2x^4+6x^3-8x^2+5x+C$$

$$f(0)=0+C=0\Longrightarrow C=0$$

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-2x^4+6x^3-8x^2+5x$$

3.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.10.7 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & \text{si}\quad 1+ax>0\ \text{ y }\ x\neq 0\\[2ex] -\dfrac{1}{2} & \text{si}\qquad x=0\end{cases},$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x=0$.

b) (1,5 puntos) Para $a=b=1$, estudiar si la función f es derivable en $x=0$ aplicando la definición de derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+ax)-bx}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a-b-abx}{2x+2ax^2}$$

Si $a\neq b$ este límite no tiene solución, por tanto continuamos con la condición de que $a=b$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a-b-abx}{2x+2ax^2}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-a^2x}{2x+2ax^2}=-\frac{a^2}{2}=-\frac{1}{2}\Longrightarrow a=b=\pm 1$$

b) Si $a = b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si} \quad 1 + x > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad x = 0 \end{cases}$$

La definición de derivada en el punto 0 es

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f(0+h) = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}, \quad f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h + h^2}{2h^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1 + 2h}{6h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1 + 2h}{6h + 6h^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

Luego no es derivable en el punto $x = 0$.

Opción B

Problema 3.10.8 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) (1,5 puntos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

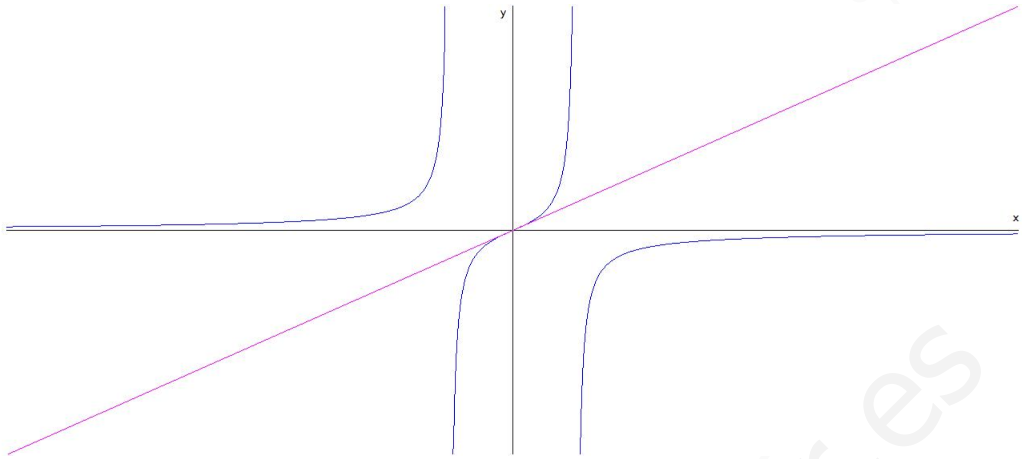
Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es $m = 1$:

$$f'(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} = 1 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Los puntos serán: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/8)$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/8)$

b) En $x = 0$ la recta tangente es $y = x$



c) Se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0,2]$ y por tanto $\exists c \in [0,2]$ que cumple

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

3.10.4. Reserva

Opción A

Problema 3.10.9 *(3 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto) $f(x) = (2x)^{3x}$.

b) (1 punto) $g(x) = \cos\frac{\pi}{8}$.

c) (1 punto) $h(x) = \int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t}\,dt$.

Solución:

a) $f'(x) = 3(2x)^{3x}(1 + \ln(2x))$

b) $g'(x) = 0$

c)

$$s(x) = \int_{5\pi}^{x} e^{\cos t}\,dt \Longrightarrow s'(x) = e^{\cos x}$$

$$h(x) = s(6x) \Longrightarrow h'(x) = 6e^{\cos x}$$

Opción B

Problema 3.10.10 *(2 puntos)* Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x) + V(y)$ si $x + y = 5$.

Solución:

$$f(x) = V(x) + V(y) = x^3 + y^3, \quad y = 5 - x \Longrightarrow f(x) = x^3 + (5 - x)^3 \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3(5-x)^2 = 30x - 75 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f''(x) = 30 \Longrightarrow f''\left(\frac{5}{2}\right) = 30 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Sustituyendo en $f(x)$:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{4} = 31,25\ cm^3$$

Problema 3.10.11 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx,\ \int x^3 e^{x^4}\,dx$

b) (1 punto) $\displaystyle\int 2^x\,dx,\ \int \frac{1+x+x^4}{x^3}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^3\,dx = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$

$\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{e^{x^4}}{4} + C$

b) $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln 2 \cdot 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$\displaystyle\int \frac{1+x+x^4}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C$

3.11. Año 2010

3.11.1. Modelo

Opción A

Problema 3.11.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\,e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

a) (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

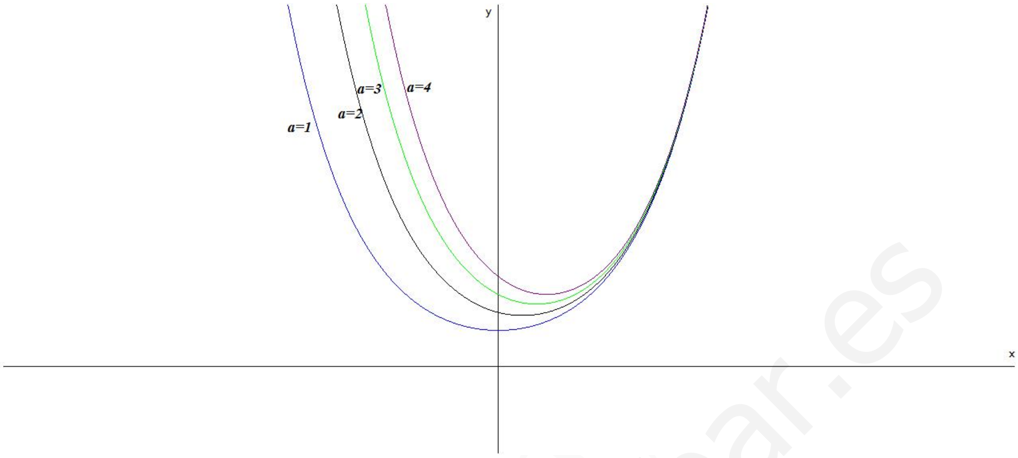
b) (1 punto) Estudiar para que valor , o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.

c) (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

a) $f'(x) = e^x - a\,e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\ln a}{2}$

☛ Si $a > 0$:

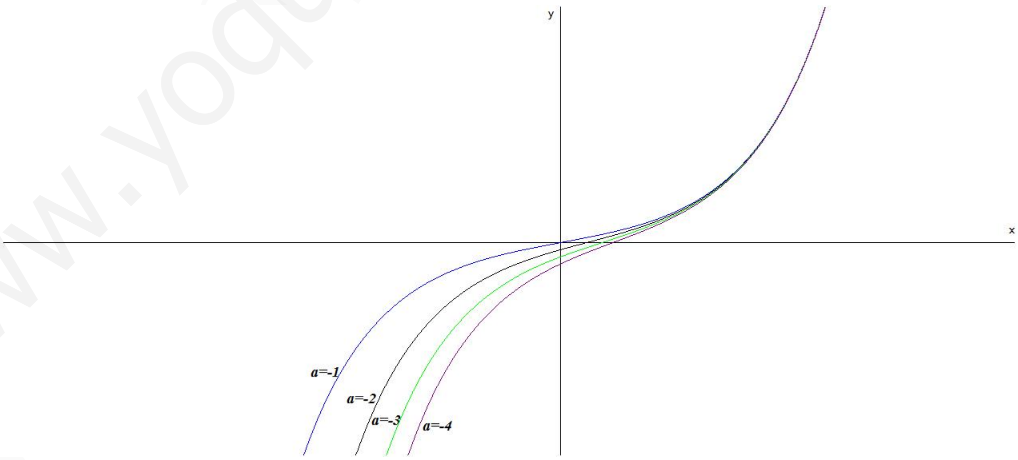


	$(-\infty, \ln a/2)$	$(\ln a, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el inetervalo $(-\infty, \ln a/2)$ y creciente en el $(\ln a/2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\dfrac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$

☛ Si $a \leq 0 \Longrightarrow \ln a$ no existe, luego no hay extremos. Por otro lado $f'(x) > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre creciente.



$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{2x}-a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2e^x = \infty$$

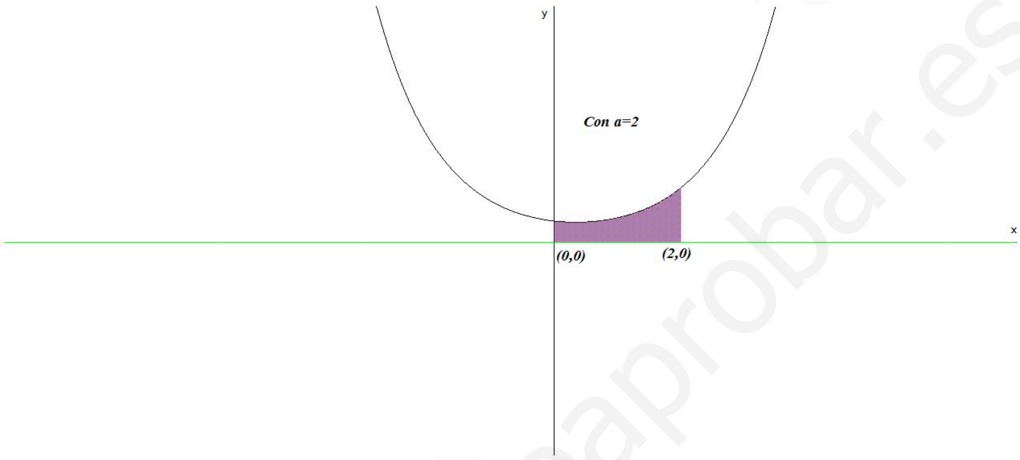
En este caso no hay asíntotas horizontales sea cual sea el valor de a.

Cuando $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{e^{2x}-a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow \infty} (e^{-x} + a\,e^{x}) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1+ae^{2x}}{e^x} = \infty \text{ si } a \neq 0$$

Es decir, no hay asíntotas horizontales en este caso siempre que $a \neq 0$. Si $a = 0 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1+ae^{2x}}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$. En este caso hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

b) Con $a > 0$:



$$S = \int_0^2 (e^x + a\,e^{-x})\,dx = e^x - a\,e^{-x}\big]_0^2 = a(1-e^(-2)) + e^2 - 1\,u^2$$

Opción B

Problema 3.11.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.

b) (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Solución:

a) $f(-1) = 0$. El punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow m = f'(-1) = 2$. Luego la recta tangente es:

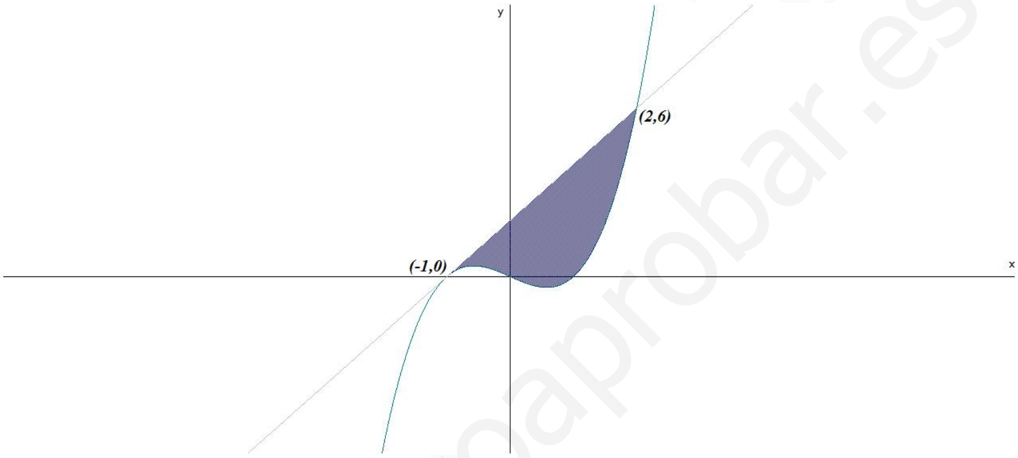
$$y = 2(x+1) \Longrightarrow 2x - y + 2 = 0$$

b) Para encontrar los puntos de intersección lo hacemos por igualación:

$$x^3 - x = 2x + 2 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 2$$

Los puntos de intersección son: $(-1, 0)$ y $(2, 6)$.

c)
$$S = \int_{-1}^{2} (2x + 2 - x^3 + x)\, dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\, dx = -\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}\; u^2$$



3.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 3.11.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.

d) (0,75 puntos) Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$

b) $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

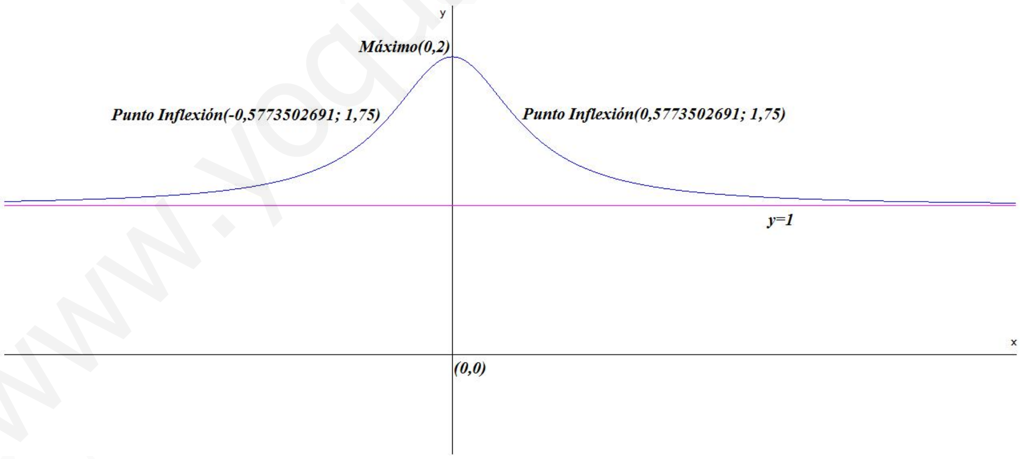
La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ y es convexa el intervalo $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

La función presenta puntos de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{7}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{7}{4}\right)$

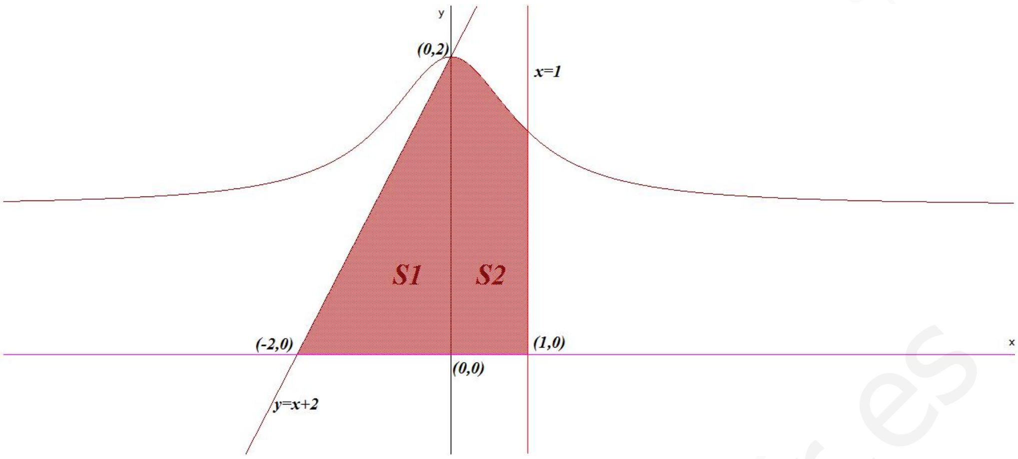
c) Como el denominador no se anula nunca no hay asíntotas verticales y, pasamos a estudiar las horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

y, por tanto, no hay asíntotas oblicuas.



d) $S1 = \dfrac{4}{2} = 2$ y $S2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$:



$$\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \arctan x + x]_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4}$$

$$\acute{A}rea = |S1| + |S2| = 3 + \frac{\pi}{4} = \frac{12+\pi}{4}\,u^2$$

Opción B

Problema 3.11.4 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si} & x > 0 \\ & & \\ x + k & \text{si} & x \le 0 \end{array}\right.$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.

b) (1 punto) Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (x+k) = k$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2^x \ln 2\sqrt{x} - 2^x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2^x \cdot x \cdot \ln 2 - 2^{x-1}} = \frac{0}{-1/2} = 0$$

Luego $k = 0$

b) Si $x=0 \Longrightarrow f(0)=0 \Longrightarrow (0,0)$. Si $f(x)=0 \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}=0 \Longrightarrow x=0,\ \ x=1 \Longrightarrow (0,0)$ y $(1,0)$, por la otra rama obtenemos el punto $(0,0)$.

c) Se pide la tangente en la rama $x>1$:

$$f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)2^x-\sqrt{x}\ln x\cdot 2^x\ln 2}{2^{2x}}$$

$$m=f'(1)=\frac{1}{2}$$

La recta tangente es $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$

3.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 3.11.5 *(2 puntos)* Hallar:

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$

b) (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x}\right]^{25}=(-1)^{25}=-1$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(1+4x^3)^{2/x^3}=\lambda\Longrightarrow \ln\lambda=\lim_{x\longrightarrow 0}\ln(1+4x^3)^{2/x^3}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2\ln(1+4x^3)}{x^3}=$$
$$\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{24}{3(1+4x^3)}=8\Longrightarrow\lambda=e^8$$

Problema 3.11.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$, donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) Hay que estudiar la inecuación: $x^2+4x-5>0$.

$$x^2+4x-5=0\Longrightarrow x=-5,\quad x=1$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$. Las asíntotas verticales son:

☛ $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} \ln(x^2+4x-5) = -\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow -5^+} \ln(x^2+4x-5) \text{ no existe}$$

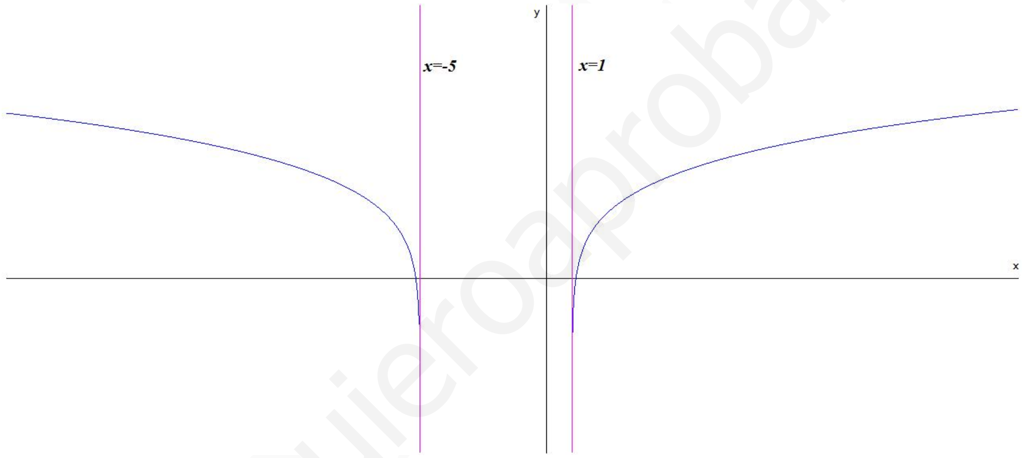
☛ $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \ln(x^2+4x-5) \text{ no existe}, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} \ln(x^2+4x-5) = -\infty$$

b) $f'(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x-5} = 0 \Longrightarrow x = -2$ Estudio la derivada sin tener en cuenta que procede de un logaritmo y luego restringiré la conclusiones al dominio de esta función:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-5)$ y creciente en el $(1,\infty)$.



Opción B

Problema 3.11.7 *(3 puntos)* Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \quad y = 2x + 1$$

se pide:

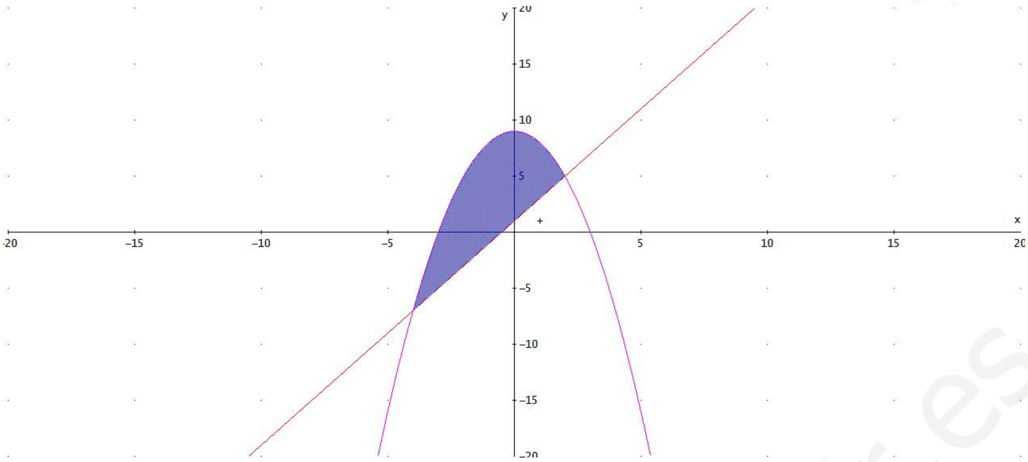
a) (1 punto) Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) (1 punto) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Solución:

a) La función $f(x) = 9 - x^2$ tiene los puntos de corte con los ejes: $(0,9)$, $(3,0)$ y $(-3,0)$, presenta un máximo en $(0,9)$ y es una función par (simétrica respecto a OY). La función $g(x) = 2x+1$ es una recta que pasa por los puntos: $(0,1)$ y $(-1/2,0)$

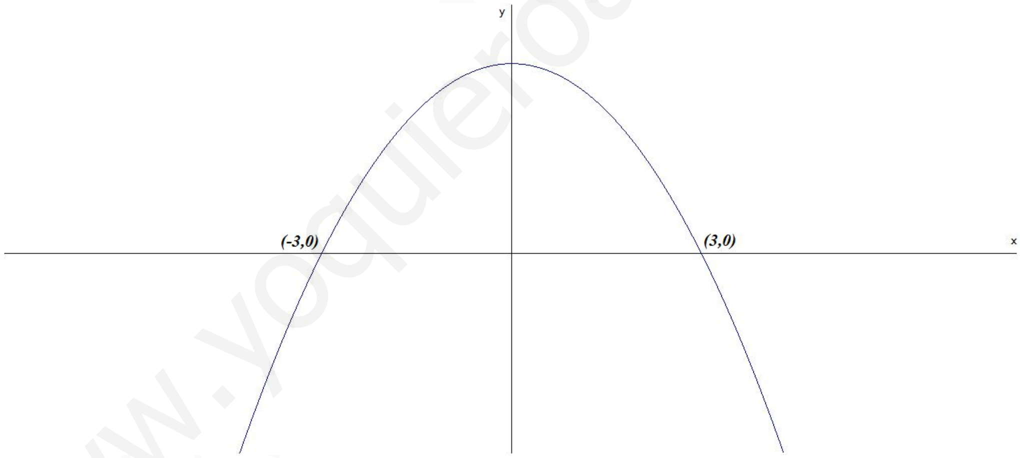


b) Calculamos los puntos de corte de estas dos gráficas:

$$9 - x^2 = 2x + 1 \Longrightarrow x = -4, \quad x = 2$$

$$S = \int_{-4}^{2} (9 - x^2 - 2x - 1)\, dx = \int_{-4}^{2} (-x^2 - 2x + 8)\, dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \Big]_{-4}^{2} = 36\ u^2$$

c) Dibujamos $y = 9 - x^2$ y por simetría podemos hacer:



$$V = 2\pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2\, dx = 2\pi \int_{0}^{3} (81 + x^4 - 18x^2)\, dx = 81x + \frac{x^5}{5} - 6x^3 \Big]_{0}^{3} = \frac{1296\pi}{5}\ u^3$$

3.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 3.11.8 *(2 puntos)* Calcular los límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (1 + \arctan x)^{a/x}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+\arctan x)^{a/x}=\lambda \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{a\ln(1+\arctan x)}{x}=\ln\lambda$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a\ln(1+\arctan x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{a}{1+x^2}}{1+\arctan x}=a=\ln\lambda \Longrightarrow \lambda=e^a$$

b)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3+2e^x}{7+5e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2e^x}{5e^x}=\frac{2}{5}$$

Problema 3.11.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$

Solución:

a)
$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)(4-x^2)^{-1/2}\,dx=-\sqrt{4-x^2}\Big]_0^1=2-\sqrt{3}$$

b) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x\,dx$ se resuelve por partes $u=x$ y $dv=\cos x\,dx \Longrightarrow du=dx$ y $v=\sin x$:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$$

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x]_0^\pi=-2$$

Opción B

Problema 3.11.10 *(3 puntos)* Los puntos $P(1,2,1)$, $Q(2,1,1)$ y $A(a,0,0)$ con $a>3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Solución:

$\overrightarrow{AP}=(1-a,2,1)$ y $\overrightarrow{AQ}=(2-a,1,1)$ y como punto elijo el $A(a,0,0)$:

$$\pi:\begin{vmatrix}1-a & 2-a & x-a\\ 2 & 1 & y\\ 1 & 1 & z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi: x+y+(a-3)z-a=0$$

Punto de corte de π con OY: hacemos $x = 0$ e $z = 0 \Longrightarrow B(0, a, 0)$.

Punto de corte de π con OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, a/(a-3))$.

Tendremos los vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0), \ \ \overrightarrow{OB} = (0, a, 0), \ \ \overrightarrow{OC} = (0, 0, a/(a-3))$$

El volumen del tetraedro será:

$$V(a) = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a/(a-3) \end{vmatrix}| = \frac{a^3}{6a - 18}$$

Para calcular el mínimo hacemos su derivada e igualamos a cero:

$$V'(a) = \frac{a^2(2a-9)}{6(a-3)^2} = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = \frac{9}{2}$$

El único punto a estudiar será el $a = 9/2$:

	$(-\infty, 9/2)$	$(9/2, \infty)$
$V'(a)$	$-$	$+$
$V(a)$	decrece	crece

$\Longrightarrow$ Mínimo $\left(\frac{9}{2}, \frac{81}{8}\right)$

Luego los puntos pedidos son:

$$A\left(\frac{9}{2}, 0, 0\right), \ \ B\left(0, \frac{9}{2}, 0\right), \ \ C\left(0, 0, 3\right)$$

3.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 3.11.11 *(2 puntos)* Obtener el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(ax^2)\left(\frac{x^2-3}{x^2+3} - 1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-6ax^2}{x^2+3} = -6a$$

$$e^{-6a} = 4 \Longrightarrow \ln e^{-6a} = \ln 4 \Longrightarrow -6a = \ln 4 \Longrightarrow a = -\frac{\ln 4}{6}$$

Problema 3.11.12 *(2 puntos)* Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_{14}^{16}(x-15)^8\,dx$

b) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int_{14}^{16} (x-15)^8\,dx = \left.\frac{(x-15)^9}{9}\right]_{14}^{16} = \frac{2}{9}$

b) $\displaystyle\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx$ se resuelve por partes: $u = x-9 \Longrightarrow du = dx$ y $dv = (x-10)^{19}dx \Longrightarrow$ $v = \dfrac{(x-19)^{20}}{20}$

$$\int (x-10)^{19}(x-9)\,dx = \frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \int (x-10)^{20}\,dx =$$

$$\frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21} + C$$

$$\int_9^{11} (x-10)^{19}(x-9)\,dx = \left.\frac{(x-9)(x-10)^{20}}{20} - \frac{(x-10)^{21}}{21}\right]_9^{11} = \frac{2}{21}$$

Opción B

Problema 3.11.13 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar y obtener las asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) (0,5 puntos). Representar gráficamente la función.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales: $x = -5$

$$\lim_{x\longrightarrow -5^+} \frac{3x^2+5x-20}{x+5} = \left[\frac{30}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -5^-} \frac{3x^2+5x-20}{x+5} = \left[\frac{30}{0^-}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+5x-20}{x+5} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx+n \Longrightarrow y = 3x-10$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+5x-20}{x^2+5x} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{3x^2+5x-20}{x+5} - 3x\right) = -10$$

b) Estudio completo:

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x+5)^2} = 0 \Longrightarrow x = -5 + \sqrt{10}, \;\; x = -5 - \sqrt{10}$$

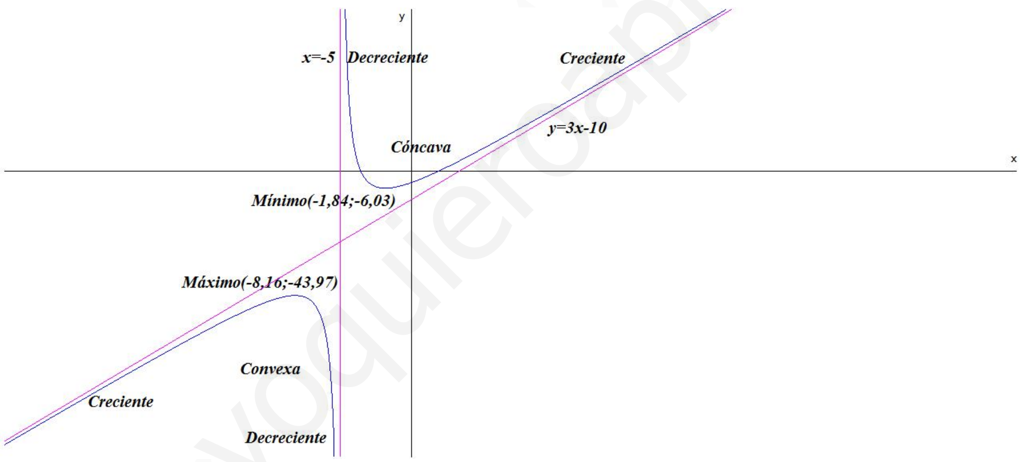
	$(-\infty, -5-\sqrt{10})$	$(-5-\sqrt{10}, -5+\sqrt{10})$	$(-5+\sqrt{10}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función tiene un Máximo en el punto $(-8,16; -43,97)$ y un Mínimo en el punto $(-1,84; -6,03)$.

☛ Curvatura: $f''(x) = \dfrac{60}{(x+5)^3} \neq 0$ Luego la función no tiene puntos de Inflexión.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

c) Representación gráfica:



3.12. Año 2011

3.12.1. Modelo

Opción A

Problema 3.12.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas.

b) (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

a) ☛ Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = \frac{3 - x}{(x + 1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función presenta un Máximo en el punto $\left(3, \frac{1}{8}\right)$. En el punto $x = -1$ la función no es continua, en ese punto habrá una posible asíntota vertical.

☛ Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x - 1}{(x + 1)^2} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x - 1}{(x + 1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x - 1}{(x + 1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x - 1}{(x + 1)^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

☛ Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo $[0, 3]$:

$$\frac{x - 1}{(x + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Los límites de integración serán de 0 a 1 y de 1 a 3. Calculamos la integral indefinida de la función por descomposición polinómica:

$$\frac{x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} = \frac{A(x + 1) + B}{(x + 1)^2}$$

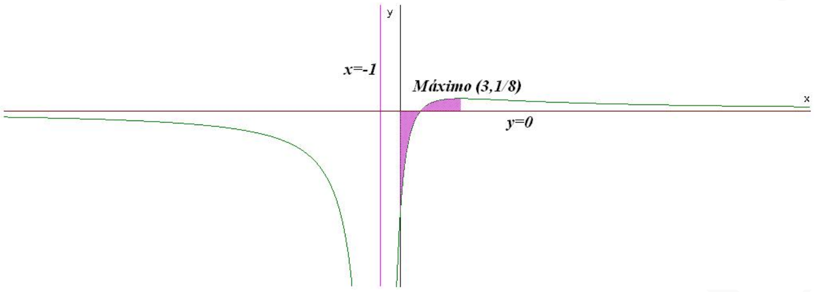
$$x - 1 = A(x + 1) + B \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \Longrightarrow B = -2 \\ x = 0 \Longrightarrow -1 = A + B \Longrightarrow A = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int \frac{x - 1}{(x + 1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x + 1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x + 1)^2}\,dx = \ln|x + 1| + \frac{2}{x + 1}$$

$$S_1 = \int_0^1 \frac{x - 1}{(x + 1)^2}\,dx = F(1) - F(0) = \ln 2 - 1$$

$$S_2 = \int_1^3 \frac{x - 1}{(x + 1)^2}\,dx = F(3) - F(1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ u^2$$



Opción B

Problema 3.12.2 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x}$

b) (1 punto). $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{1/x} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{(-1/x^2)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \left(\frac{1/\cos^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}} - \frac{-1/\cos^2 x}{2\sqrt{1-\tan x}}\right) = 1$$

Problema 3.12.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

Comprobamos si hay algún punto de corte de esta función con el eje de abscisas que esté dentro del intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2} - \sin x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Los límites de integración serán de 0 a $\pi/6$ y de $\pi/6$ a $\pi/2$. Calculamos la integral indefinida:

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = \frac{x}{2} + \cos x$$

$$S_1 = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = F(\pi/6) - F(0) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) dx = F(\pi/2) - F(\pi/6) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} = 0,47$$

3.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.12.4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular la integral $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$.

b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

a)

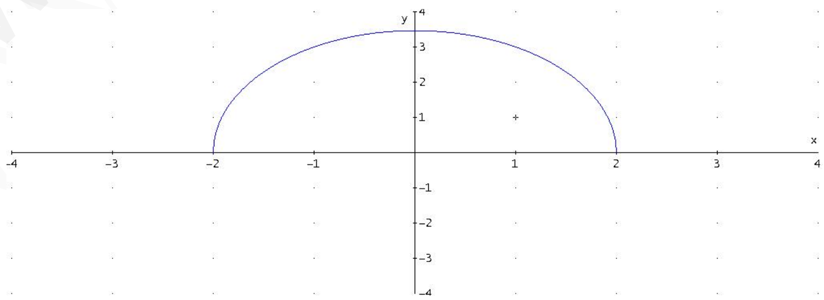
$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx = \left.\frac{\sqrt{(4+5x^2)^3}}{15}\right]_1^3 = \frac{316}{15}$$

b) El dominio de la función viene dado por la inecuación $12 - 3x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f) = [-2, 2]$ y su signo es siempre positivo, la función siempre está por encima del eje de abscisas; como en $x = \pm 2$ la función vale cero en estos dos puntos que serán mínimos relativos. Por otra parte:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-2,0)$	$(0,2)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego hay un máximo en el punto $(0, 2\sqrt{3})$ que, por ser el único, será un máximo absoluto. Alcanzará un mínimo absoluto en los puntos en los que $f(x) = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$.



Problema 3.12.5 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5+3x+m=0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$$

b) Sea cual sea el valor de m, la función $f(x)=4x^5+3x+m$ es una función polinómica y, por tanto, continua y derivable en R.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(x^5+3x+m)=\infty \text{ y } \lim_{x\longrightarrow-\infty}(x^5+3x+m)=-\infty$$

Luego la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty,\infty)$ y, por el teorema de Bolzano, necesariamente tiene cortar al eje de abscisas.

$$f'(x)=20x^4+3\geq 0\ \ \forall x\in R$$

Luego la función es siempre creciente, en consecuencia sólo puede haber un punto de corte (Teorema de Rolle).

Opción B

Problema 3.12.6 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{ax^4+1}{x^3}$$

Se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x=1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de la gráfica de $y=f(x)$ para $a=1$.

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a=1$.

Solución:

a)

$$f'(x)=\frac{ax^4-3}{x^4}=0 \text{ y } f'(1)=0\Longrightarrow a=3$$

$$f''(x)=\frac{12}{x^5}\Longrightarrow f''(1)=12>0$$

Luego en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3x^4 = 3 \Longrightarrow x = \pm 1$$

En $x = -1$:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Longrightarrow f''(-1) = -12 < 0$$

Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

b) Si $a = 1$:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

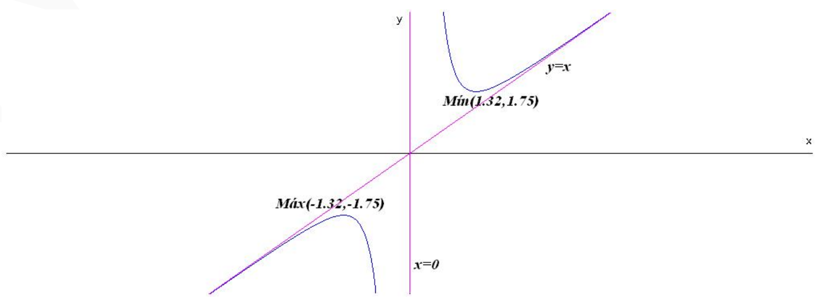
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x\right) = 0$$

$$y = x$$

c) La gráfica para $a = 1$:



Se trata de una función IMPAR, bastaría con calcular sus extremos

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = -1,32, \;\; x = 1,32$$

	$(-\infty; -1,32)$	$(-1,32; 1,32)$	$(1,32; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1,32; -1,75)$ y un mínimo relativo en el punto $(1,32; 1,75)$

3.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.12.7 *(3 puntos).*

a) (1 punto) Calcular los límites:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}}$$

b) (1 punto) Calcular la integral: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2}\, dx$

c) (1 punto) Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{4 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{4 + e^{-(x+1)}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + 3x^2}\, dx = \frac{1}{6} \ln|1 + 3x^2|\big]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$$

c) $x^2 + 9x + 14 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f) = (-\infty, -7] \cup [-2, \infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x - 9}{2\sqrt{x^2 + 9x + 14}}$$

La función tiene derivada en $(-\infty, -7) \cup (-2, \infty)$.

Opción B

Problema 3.12.8 *(2 puntos).* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.
Solución: f es continua en $x = 0$ si

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} e^{-1/x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

Como $f(0) = k \Longrightarrow k = 0$

Problema 3.12.9 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -\sin x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

b) (1 punto). Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -\sin x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

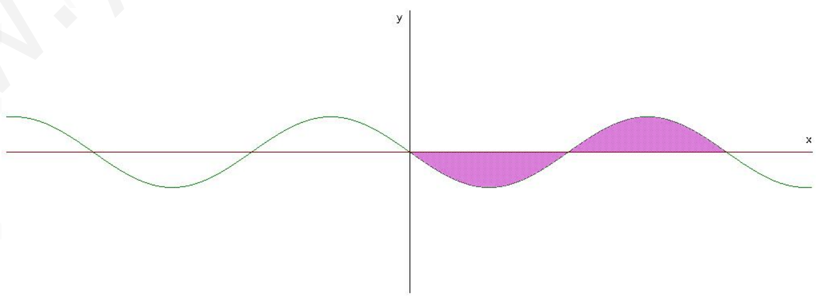
Solución:

a) $f(x) = -\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pi$. En el intervalo $[0, 2\pi]$ hay dos recitos de integración $S_1 \equiv [0, \pi]$ y $S_2 \equiv [\pi, 2\pi]$

$$S_1 = \int_0^{\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_0^{\pi} = -2$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx = \cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4\ u^2$$



b)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} (-\sin x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \pi \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big]_0^{\pi} = \pi^2\ u^3$$

3.13. Año 2012

3.13.1. Modelo

Opción A

Problema 3.13.1 *(2 puntos)* Halla el valor de λ para que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2} & \text{si} \quad x>0 \\ \\ \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$$

sea continua. Razonar la respuesta.

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{2\lambda x e^{\lambda x^2}}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{2\lambda(e^{\lambda x^2}+2\lambda x^2 e^{\lambda x^2})}{6}=\frac{\lambda}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sin 2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{2\cos 2x}{1}=2$$

Para que f sea continua en $x=0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=f(0)$$

Luego $\dfrac{\lambda}{3}=2\Longrightarrow \lambda=6$ verificaría la primera igualdad, pero no la segunda, dado que $f(0)\neq 2$. Es decir, con $\lambda=6$ la función será continua en $R-\{0\}$, en $x=0$ presenta una discontinuidad evitable y sería continua si incluimos la rama $f(0)=2$.

Problema 3.13.2 *(2 puntos)* Dado el polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x=-1/3$, $x=-1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0,P(0))$ sea $y=x+3$.

Solución:

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c\Longrightarrow P'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\begin{cases} P'\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0\Longrightarrow \dfrac{1}{3}-\dfrac{2a}{3}+b=0 \\ \\ P'(-1)=0\Longrightarrow 3-2a+b=0 \\ \\ P'(0)=1 \text{ pendiente de } y=x+3\Longrightarrow b=1 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=1\end{cases}$$

El punto $(0,P(0))$ también pertenece a la recta $y=x+3$ luego para $x=0\Longrightarrow y=3\Longrightarrow P(0)=3\Longrightarrow c=3$ El polinomio buscado es

$$P(x)=x^3+2x^2+x+3$$

.

Opción B

Problema 3.13.3 *(3 puntos)* Sabiendo que la función $F(x)$ tiene derivada $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$, y, además, que:

$$F(2) = 1, \quad F(3) = 2, \quad F(4) = 6, \quad F(5) = 3, \quad f(3) = 3 \text{ y } f(4) = -1;$$

Hallar:

a) (0,5 puntos). $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$

b) (1 punto). $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx$

c) (1,5 puntos). $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = F(5) - F(2) = 3 - 1 = 2$

b) $\displaystyle\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx =$
$= 5(F(3) - F(2)) - 7(3 - 2) = 5(2 - 1) - 7 = -2$

c) $\displaystyle\int_2^4 F(x)f(x)\,dx = \left.\frac{(F(x))^2}{2}\right]_2^4 = \frac{F(4)^2}{2} - \frac{F(2)^2}{2} = \frac{36}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}.$

3.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.13.4 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 2 \Longrightarrow a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = -3 \\ f''(3) = 0 \Longrightarrow a = -9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -9 \\ b = 15 \\ c = -5 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$$

Problema 3.13.5 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^\pi e^{2x}\cos x\,dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x}\,dx$

Solución:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx = -\frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)$

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\cos x\Longrightarrow du=-\sin x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx=$$

$$\left[\begin{array}{c} u=\sin x\Longrightarrow du=\cos x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right]=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}\sin x}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx\right)$$

$$I=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{2x}\sin x}{2}-\frac{1}{4}I\Longrightarrow I+\frac{1}{4}I=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{4}\Longrightarrow$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{5}$$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$

Opción B

Problema 3.13.6 *(3 puntos)* Dadas las funciones

$$f(x)=\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}},\ \ g(x)=(lnx)^x,\ \ h(x)=sen(\pi-x)$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.

c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0,2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Solución:

a) $Dom(f)=(\sqrt{3},\infty)$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3x+\ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3+\frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}}=3$$

b)

$$g'(x)=(\ln x)^x\left(\ln(\ln(x)+\frac{1}{\ln x}\right)\Longrightarrow g'(e)=1$$

c) $h(x)sen(\pi-x)=0\Longrightarrow\pi-x=k\pi\Longrightarrow x=(1-k)\pi$,, el único punto de corte en este intervalo es en $x=\pi$.

$$h'(x)=-\cos(\pi-x)=0\Longrightarrow\pi-x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Longrightarrow x=\pi\left(\frac{1}{2}-k\right)$$

Luego $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

3.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.13.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos relativos de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$

c) (1 punto). Hallar la primitiva $g(x)$ de $f(x)$ tal que $g(\pi/4) = 0$.

Solución:

$$f'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in Z$$

a) En el intervalo $(-\pi, \pi)$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -2\cos 2x$:

$$f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Mínimo}$$

b)

$$f''(x) = -2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ \ k \in Z$$

En el intervalo $(-\pi, \pi)$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$ y $x = \pm 3\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 4\sin 2x$:

$$f'''(\pm\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = \pm\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

$$f'''(\pm 3\pi/4) = \pm 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = \pm 3\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)

$$g(x) = \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

$$g(\pi/4) = \frac{\pi/2 + \sin \pi/2}{4} + C = \frac{\pi + 2}{8} + C = 0 \Longrightarrow C = -\frac{\pi + 2}{8}$$

$$g(x) = \frac{2x + \sin 2x}{4} - \frac{\pi + 2}{8}$$

Opción B

Problema 3.13.8 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} f(x)$

b) (1 punto) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}} = \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -1$$

Problema 3.13.9 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $f(x)$ una función continua tal que $\int_1^8 f(u)\,du = 3$. Hallar

$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx$$

b) (1 punto) Hallar el dominio de definición y las abscisas de los puntos donde la función

$$F(x) = \sqrt{(x-3)(9-x)^2}$$

alcanza sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

a)

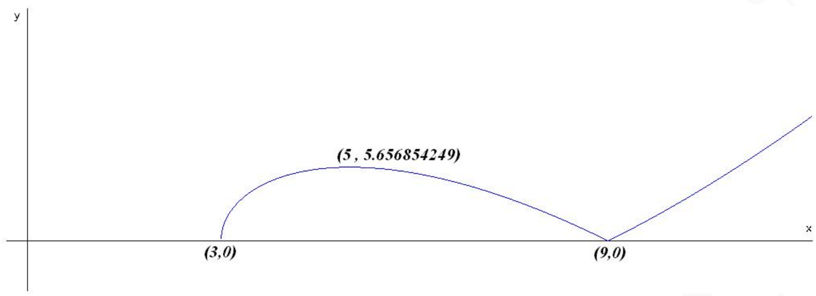
$$\int_1^2 f(x^3)x^2\,dx = [u = x^3] = \frac{1}{3}\int_1^8 f(u)\,du = 1$$

b) $\text{Dom}(F(x)) = [3, +\infty)$

$$F'(x) = \frac{3(x-5)(x-9)}{2\sqrt{(x-3)(9-x)^2}} = 0 \Longrightarrow x = 5,\ x = 9$$

	$(3,5)$	$(5,9)$	$(9,\infty)$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(5, 4\sqrt{2})$ hay un máximo relativo y en el punto $(9,0)$ hay un mínimo relativo. En el punto $(3,0)$ hay un mínimo global.



3.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.13.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) (1 punto). Hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$.

c) (1 punto). Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 6 + A; \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 17$$

$$9 + A = 17 \Longrightarrow A = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 8 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 10 - 2x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f'(3^-) = 3 \neq f'(3^+) = 4 \Longrightarrow \text{no es derivable en } x = 3$$

b) $f'(x) = 0$ sólo en el intervalo $(3, \infty)$ y será: $10 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 5$

c) $f(4) = 20$, $f(8) = 12$, $f(5) = 21$, luego tendríamos un máximo absoluto en el punto $(5, 21)$ y un mínimo absoluto en el punto $(8, 12)$.

Opción B

Problema 3.13.11 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) (1 punto). Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) $x^2 \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$ y $\sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$, luego podemos concluir que $f(x) = x^2 \sin x \neq 0$ en $(\pi/2, \pi)$.

b) La integral se calcula por partes:

$$\int x^2 \sin x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin x\, dx \Longrightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x\, dx \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \Big]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

c) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $f'(\pi) = -\pi^2 \Longrightarrow m = 1/\pi^2$, $f(\pi) = 0$:

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi) \text{ recta normal}$$

$$y = -\pi^2(x - \pi) \text{ recta tangente}$$

3.14. Año 2013

3.14.1. Modelo

Opción A

Problema 3.14.1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si} & x < 0 \\ a & \text{si} & x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) (1 punto). Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2x^2+3x}{x-1} = 0; \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0; \quad f(0) = a$$

Luego $a = 0$.

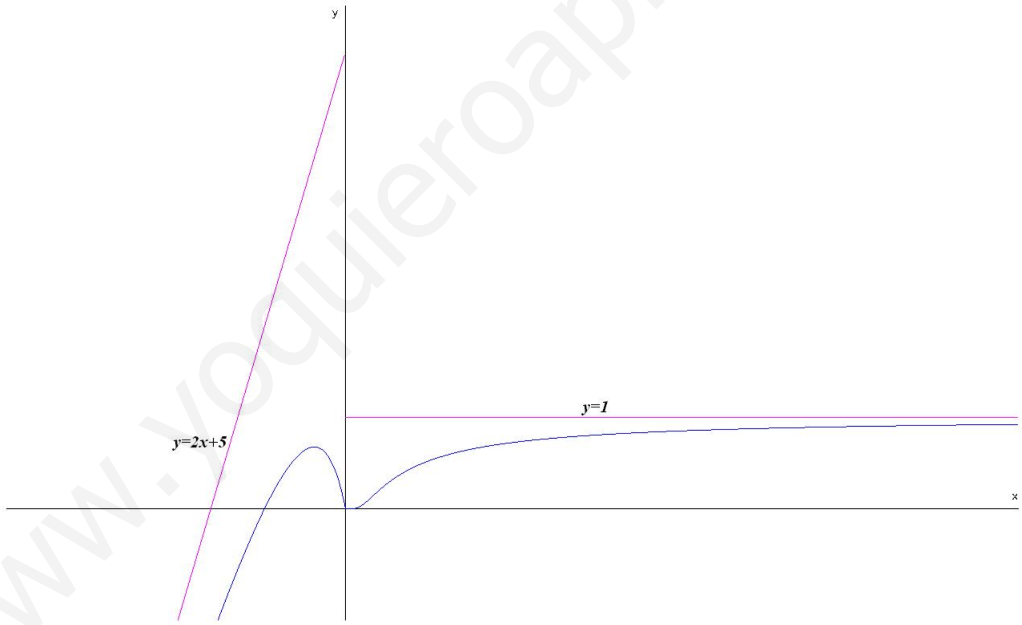
b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-4x-3}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 3; \quad f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1/h}{e^{1/h}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{-1/h^2}{-1/h^2 e^{1/h}} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/h}} = 0$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.



c) Si $x < 0$:

- Verticales: La única posible sería en $x = 1$, pero no está en la rama y, por tanto no es válida.
- Horizontales: No tiene

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{x-1} = -\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+3x}{x-1} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x-1} \right) = 5 \Longrightarrow y = 2x + 5$$

Si $x > 0$:

- ☛ Verticales: No puede haberlas.
- ☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Opción B

Problema 3.14.2 *(3 puntos)*

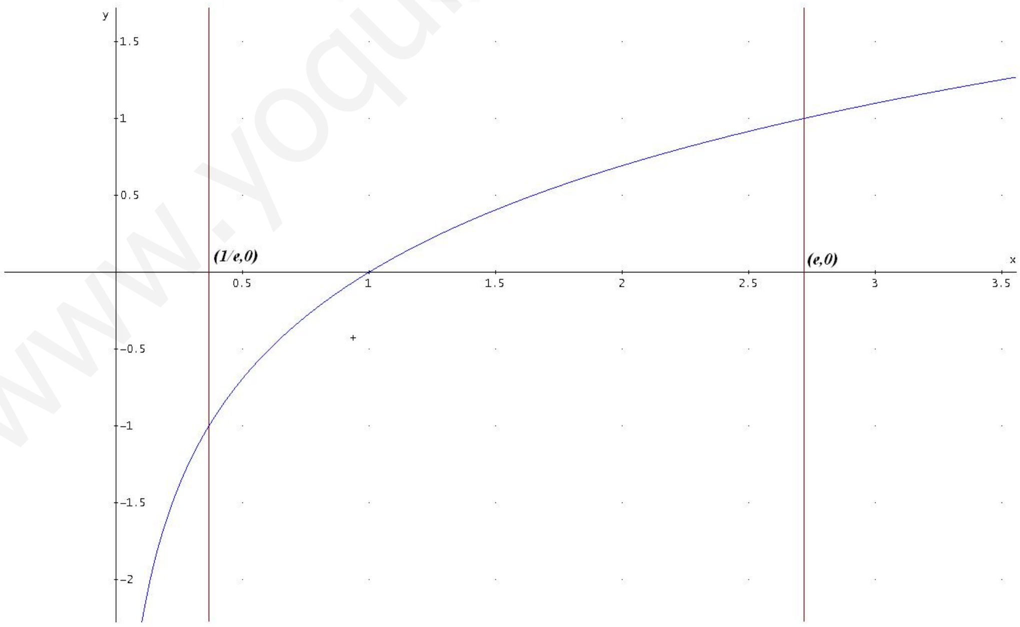
a) (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.

b) (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.

c) (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX.

Solución:

a) $f(1/e) = -1$, $f(e) = 1$ y $f(1) = 0$:

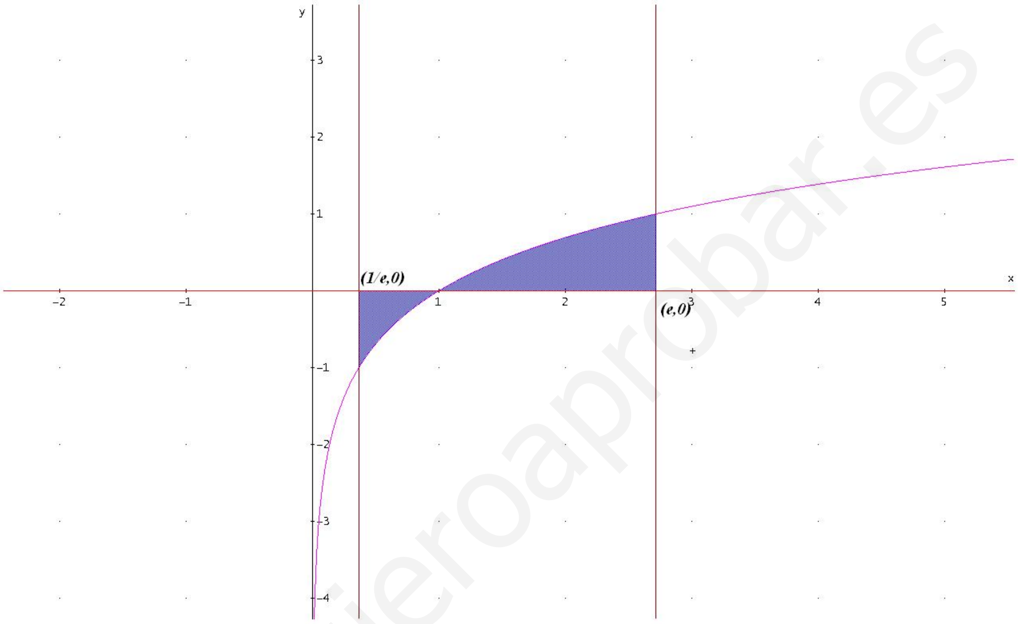


b)

$$F(x)=\int \ln x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln x\Longrightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\Longrightarrow v=x\end{array}\right]=x\ln x-\int dx=x(\ln x-1)$$

$$S_1=F(1)-F(1/e)=\frac{2-e}{e};\quad S_2=F(e)-F(1)=1$$

$$Área=|S_1|+|S_2|=\left|\frac{2-e}{e}\right|+1=\frac{e-2}{e}+1=\frac{2(e-1)}{e}\,u^2$$



c)

$$F(x)=\int (\ln x)^2\,dx=\left[\begin{array}{c} u=(\ln x)^2\Longrightarrow du=\frac{2\ln x}{x}dx\\ dv=dx\Longrightarrow v=x\end{array}\right]=$$

$$x(\ln x)^2-2\int \ln x\,dx=x(\ln x)^2-2x(\ln x-1)$$

$$V=\pi\int_{1/e}^{e}(\ln x)^2\,dx=\pi(F(e)-F(1/e))=\frac{\pi(e^2-5)}{e}\,u^3$$

3.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.14.3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

Solución:

a) ☛ Verticales: $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^3}{(x-3)^2} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-3)^2} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 6x^2 + 9x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 6x + 9} - x\right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{6x^2 - 9x}{x^2 - 6x + 9}\right) = 6 \Longrightarrow y = x + 6$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 9x^2}{(x-3)^3}$ en el punto de abscisa $x = 2$ el valor de la pendiente de la recta tangente es $m = f'(2) = 28$ y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 8)$, la recta buscada en su ecuación punto pendiente será:

$$y - 8 = 28(x - 2)$$

Problema 3.14.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a)} \int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^2 \frac{3 - x^2 + x^4}{x^3}\,dx$$

Solución:

a)

$$\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx = \int \frac{x}{x^2+9}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+9| - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

b)

$$\int_1^2 \frac{3 - x^2 + x^4}{x^3}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2x^2} - \ln|x|\Big]_1^2 = \frac{21}{8} - \ln 2$$

Opción B

Problema 3.14.5 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

Solución:

a)
$$f'(x) = -2\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ \ k \in Z$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sólo hay tres soluciones: $x = \pm\pi/2$ y $x = 0$. Analizamos estos extremos por el criterio de la segunda derivada. $f''(x) = -4\cos 2x$:

$$f''(0) = -4 < 0 \Longrightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay un Máximo absoluto}$$
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = \frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$
$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{en } x = -\frac{\pi}{2} \text{ hay un Mínimo absoluto}$$

b)
$$f''(x) = -4\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4},\ \ k \in Z$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ las soluciones serán: $x = \pm\pi/4$. Analizamos estos puntos por el criterio de la tercera derivada. $f'''(x) = 8\sin 2x$:

$$f'''(\pi/4) = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = \pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$
$$f'''(-\pi/4) = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{en } x = -\pi/4 \text{ hay un punto de Inflexión}$$

c)
$$\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2x)\,dx = x + \frac{\sin 2x}{2}\bigg]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

3.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.6 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{-x} - x$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el polinomio de segundo grado, $P(x) = ax^2 + bx + c$, que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes: $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

b) (1 punto). Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución real.

Solución:

a)
$$f(x) = e^{-x} - x \Longrightarrow f'(x) = -e^{-x} - 1 \Longrightarrow f''(x) = e^{-x}$$
$$P(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow P'(x) = 2ax + b \Longrightarrow P''(x) = 2a$$
$$\left\{\begin{array}{l} P(0) = f(0) = c = 1 \\ P'(0) = f'(0) = b = -2 \\ P''(0) = f''(0) = 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

b) La función f es continua en $\mathbb{R}$, además.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(e^{-x}-x)=+\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow \infty}(e^{-x}-x)=-\infty$$

la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty,+\infty)$ y por el teorema de Bolzano aseguramos que $\exists\, c\in\mathbb{R}/f(c)=0$.
La función f es siempre decreciente ya que $f'(x)=-e^{-x}-1<0$ y, por tanto, ese punto c es único.

Problema 3.14.7 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} a & \text{si} & x<0\\ 1+xe^{-x} & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$ y estudiar, en ese caso, la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular, en función de a, la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-} a=a\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}(1+xe^{-x})=1\end{array}\right. \Longrightarrow a=1$$

Derivabilidad en $x=0$: $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x<0\\ e^{-x}(1-x) & \text{si} & x>0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=1\end{array}\right. \Longrightarrow f$ no es derivable en $x=0$.

b) $\displaystyle\int(1+xe^{-x})\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}dx\Longrightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right]=x-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=x-xe^{-x}-e^{-x}=$ $x-e^{-x}(x+1)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} a\,dx+\int_{0}^{1}(1+xe^{-x})\,dx=[ax]_{-1}^{0}+\left[x-e^{-x}(x+1)\right]_0^1=$$

$$a+(1-2e^{-1})-(-1)=a+2(1-e^{-1})$$

Opción B

Problema 3.14.8 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si} & x<0\\[2ex] \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x), \lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)$

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ f no es continua en $x = 0$ presenta una discontinuidad no evitable, hay un salto.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

c) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

3.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.14.9 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

c) (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2} = \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)}$$

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = -1$ y $x = 4$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = 0$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{5(7x^2-40x+88)}{2(x+1)^2(x-4)^2} < 0\ \forall x \in R$. Luego f decrece en todo el dominio $R - \{-1, 4\}$.

$f''(x) = \dfrac{5(7x^3-60x^2+264x-344)}{(x+1)^3(x-4)^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

Hay un punto de inflexión en $(2, 5/2)$.

c) La gráfica es:

Opción B

Problema 3.14.10 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0, \ \ m = f'(0) = 1; \ \ f(0) = 0 \Longrightarrow y = x$$

b)

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\,dx = x - \arctan x]_0^1 =$$

$$1-\frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$

Problema 3.14.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

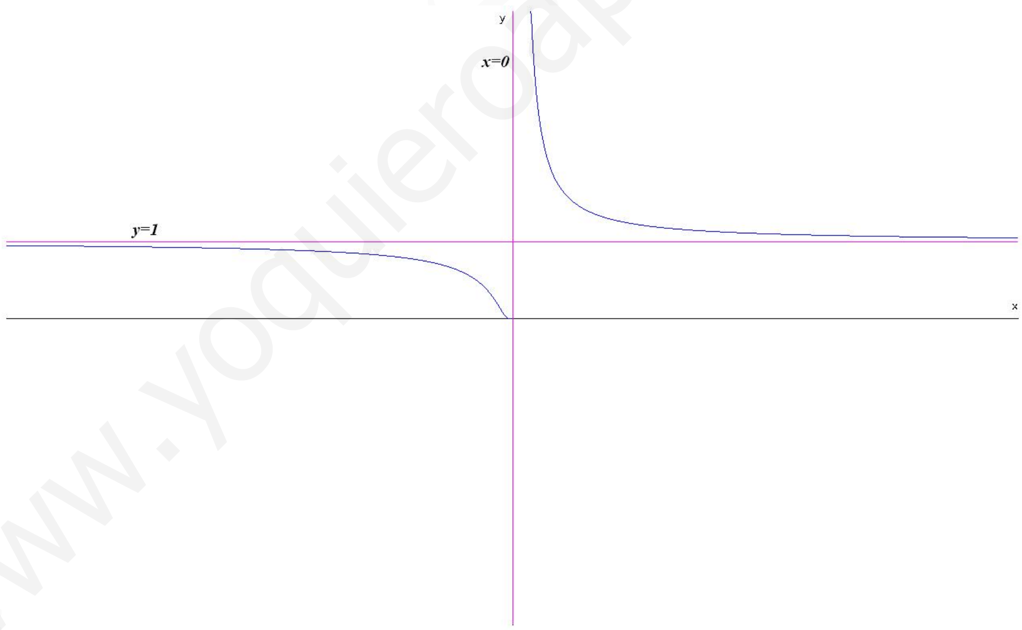
b) (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$; $\lim_{x\longrightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$.

$\lim_{x\longrightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$; $\lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$; luego en 0 no extiste el límite.

b) La gráfica sería:



Por el apartado anterior la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} < 0,\ \forall x \in R - \{0\}$$

Luego la función es siempre decreciente.

3.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.12 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, un punto de inflexión en el de abscisa $x = 2/3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 1$.

b) (0,5 puntos). ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Solución:

a)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(2/3) = 0 \Longrightarrow 4 + 2a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

b)

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f''(x) = 6x - 4$$

$f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo.

Problema 3.14.13 *(2 puntos)*Dada la función:

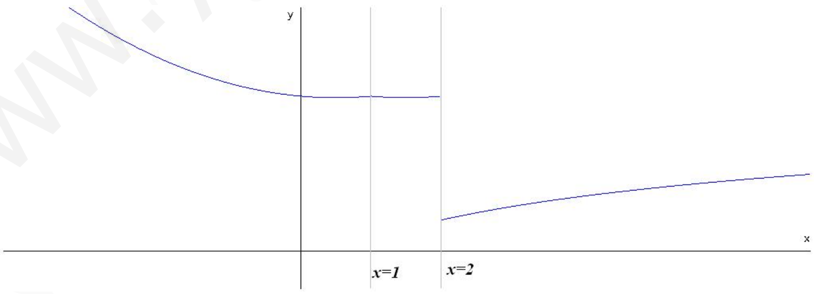
$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x^2 - x + 25 & \text{si} & x \le 1 \\ 5\sqrt{(2+x)^2 + (5-x)^2} & \text{si} & 1 < x < 2 \\ \frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si} & x \ge 2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

Solución:



a) Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - x + 25) = 25$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+}(5\sqrt{(2+x)^2+(5-x)^2}) = 25$$

$$f(1) = 25$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.
Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-}(5\sqrt{(2+x)^2+(5-x)^2}) = 25$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+}(\frac{5\ln(1+x^2)}{\ln 5}) = 5$$

Luego $f(x)$ es discontinua no evitable en $x = 2$, hay un salto.

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{5(2x-3)}{\sqrt{2x^2-6x+29}} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{10x}{(x^2+1)\ln 5} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = 1 \neq f'(1^+) = -1$ luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 2$: No puede ser derivable ya que no es continua.
En resumen, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

Opción B

Problema 3.14.14 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) (0,5 puntos). Hallar el valor de α para el que esta recta tangente es horizontal.

c) (1,5 puntos). Representar gráficamente la función $y = f(x)$ para $\alpha = 2$, estudiando sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2x(1-\alpha)}{(x^2+1)^2}$

$$b = f(1) = \frac{1+\alpha}{2}, \quad m = f'(1) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$y - \frac{1+\alpha}{2} = \frac{1-\alpha}{2}(x-1)$$

b) $m = 0 \Longrightarrow 1-\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$

c) Si $\alpha = 2$ tenemos $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

- ☛ $\text{Dom}(f) = R$, es una función par, con corte con OY en $(0, 2)$ y siempre positiva.
- ☛ Asíntotas: No tiene verticales, tiene una horizontal en $y = 1$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2+1} = 1$ y por tanto no hay oblicuas.

☛ Monotonía: $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

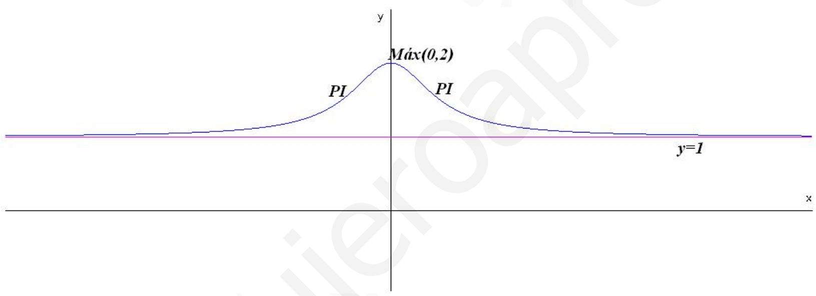
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 2)$.

☛ $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ y Convexa: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



3.15. Año 2014

3.15.1. Modelo

Opción A

Problema 3.15.1 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\arctan x - x}{x^3}$

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} [1 - \sin x]^{1/x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x\longrightarrow 0}[1-\sin x]^{1/x} = [1^\infty] = \lambda$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{-\cos x}{1-x}}{1} = -1 = \ln\lambda \Longrightarrow \lambda = e^{-1}$$

Problema 3.15.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6) = \int_5^6 g(x)\,dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx$$

b) (1 punto). Sea $f(x)$ una función continua que verifica $\int_1^e f(u)\,du = \frac{1}{2}$. Hallar

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx.$$

Solución:

a)

$$\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x-5 \Longrightarrow du = dx \\ dv = g'(x)dx \Longrightarrow v = g(x) \end{array}\right] =$$

$$(x-5)g(x)]_5^6 - \int_5^6 g(x)\,dx = g(6) - 0 - g(6) = 0$$

b)

$$\int_0^2 f(e^{x/2})e^{x/2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{x/2} \Longrightarrow 2du = e^{x/2}dx \\ x = 0 \Longrightarrow u = 1 \\ x = 2 \Longrightarrow u = e \end{array}\right] = 2\int_1^e f(u)\,du = 1$$

Opción B

Problema 3.15.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.

b) (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2x^2+6}{x-1} = -6$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$$

Como $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \neq \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}$ la función tiene en $x=0$ un discontinuidad no evitable, hay un salto.

b) Cuando $x<0$: No hay asíntotas verticales ni horizontales, pero hay oblicuas: $y=mx+n \Longrightarrow y=2x+2$

$$m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2+6}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+6}{x-1} - 2x\right) = 2$$

Cuando $x \geq 0$: No hay asíntotas verticales pero si horizontales y, por tanto, no hay oblicuas. $y=1$

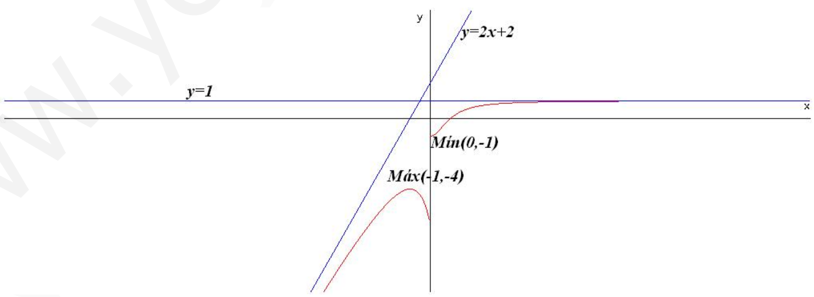
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

c)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x<0 \\[2ex] \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Cuando $x<0$: $x^2-2x-3=0 \Longrightarrow x=-1, \ x=3$ No vale. En $x=-1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego hay un máximo en el punto $(-1,-4)$

$x \geq 0$: $4x=0 \Longrightarrow x=0$. En $x=0$ la función empieza a crecer, luego hay un mínimo en el punto $(0,-1)$



3.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.15.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Sea $f : R \longrightarrow R$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \text{ y } f''(-2)$$

b) (1 punto). Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

Solución:

a) Por ser $x = -2$ la abscisa del punto de tangencia con la recta $y = 16x + 16 \Longrightarrow f(-2) = -32 + 16 = -16$.
La pendiente de esta recta es $m = f'(-2) = 16$ y, por último, al ser punto de inflexión $f''(-2) = 0$.

b) $g(x) = x^4 + 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = -4$

$$\int_{-4}^{0} (x^4 + 4x^3)\, dx = \left.\frac{x^5}{5} + x^4\right]_{-4}^{0} = -\frac{4^4}{5}$$

$$S = \left|-\frac{4^4}{5}\right| = \frac{256}{5}\ u^2$$

Problema 3.15.5 *(2 puntos)* Calcular justificadamente:

a) $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$

b) $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-2 - e^x + 3\cos(3x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-e^x - 9\sin(3x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{5x^3}{2x^3} = \frac{5}{2}$$

Opción B

Problema 3.15.6 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1 - x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)$ y $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular el valor de a, para que $f(x)$ sea continua en todo R.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (a + \ln(1-x)) = \infty$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} (a + \ln(1-x)) = a, \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow a = 0$$

c)

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -\frac{1}{1-x} & \text{si} & x < 0 \\ xe^{-x}(2-x) & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right.$$

Luego la función no es derivable en $x = 0$. Concluimos con que f es continua y derivable en $R - \{0\}$ y sería continua en $x = 0$ pero no derivable para $a = 0$.

3.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.15.7 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{mx^3 - 1}{x^2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.

c) (1 punto). En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{mx^3 + 2}{x^3}; \quad f'(1) = 0 \Longrightarrow m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -2$$

b) Para $m = -2$: $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 1}{x^2}$

☛ Verticales en $x = 0$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales no hay: $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-2x^3-1}{x^2}=-\infty$
- ☛ Oblicuas $y=mx+n$:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x^3-1}{x^3}=-2$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(-2x^3-1x^2+2x\right)=0$$

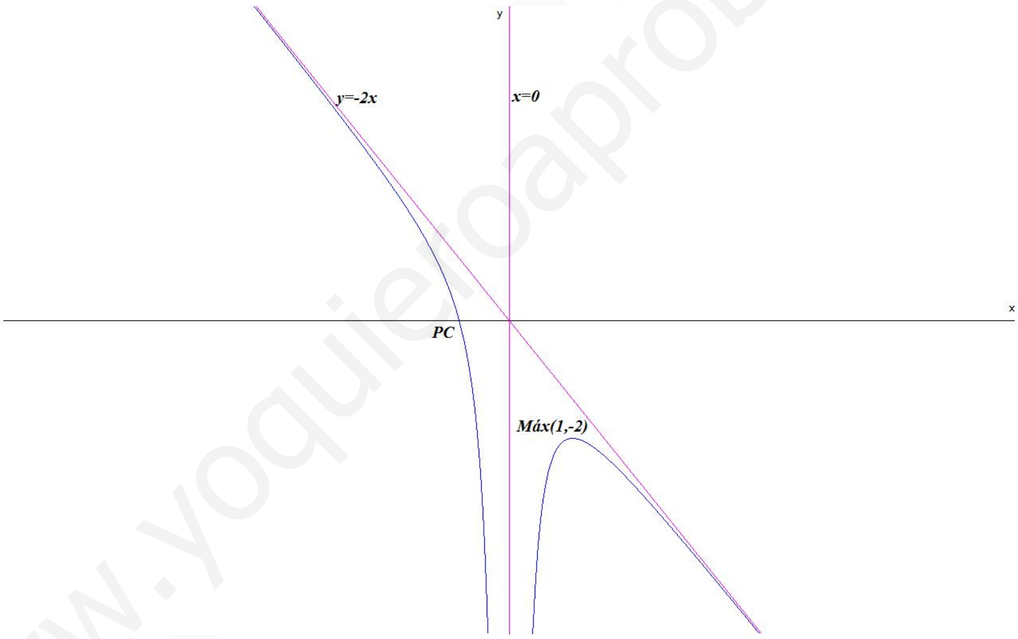
$$y=-2x$$

c) Puntos de corte con eje de ordenadas: no hay

Puntos de corte con eje de abscisas: $-2x^3-1=0\Longrightarrow x=-1/\sqrt[3]{2}\Longrightarrow(-1/\sqrt[3]{2},0)$.

$$f'(x)=\frac{-2x^3+2}{x^3};\quad f''(x)=\frac{-6}{x^4};\quad f''(1)=-6<0$$

Luego hay un máximo en el punto $(1,-2)$



Opción B

Problema 3.15.8 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0)=1$ y $f'(0)=2$. Se considera la función $g(x)=2(f(x))^2$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar la recta tangente a la curva $y=g(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}$.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a) $y-b=m(x-a)$, $a=0$, $b=g(a)=g(0)=2(f(0))^2=2$ y $m=g'(a)=g'(0)=4f(0)f'(0)=8$ (ya que $g'(x)=4f(x)f'(x)$) Luego la recta tangente tiene de ecuación: $y-2=8(x-0)\Longrightarrow y=8x+2$.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{f'(x)}{-e^{-x}}=-2$

Problema 3.15.9 *(2 puntos)* Calcular:

a) (1 punto). $\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{dx}{1-4x^2}$

b) (1 punto). $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^{3/2}\frac{dx}{1-4x^2}=\frac{1}{4}\left(\ln|2x+1|-\ln|2x-1|\right)\Big]_1^{3/2}=-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right)=-0,1$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{-1}{\ln x+\frac{x}{x}+1}=-\frac{1}{2}$

3.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.15.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4},$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}=\frac{x+4+x(x+1)}{(x+1)(x+4)}=\frac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}$$

a) $Dom(f)=R-\{-1,-4\}$ y asíntotas:

☛ Verticales:

$$x=-1:\ \lim_{x\longrightarrow -1^-}f(x)=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty;\ \lim_{x\longrightarrow -1^+}f(x)=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$$

$$x=-4:\ \lim_{x\longrightarrow -4^-}f(x)=\left[\frac{12}{0^+}\right]=+\infty;\ \lim_{x\longrightarrow -4^+}f(x)=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$$

☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x+4)} = 1$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{(x+1)^2(x+4)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego la función tiene un máximo en el punto $(-2, -2)$ y un mínimo en el punto $(2, 2/3)$.

c)

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + 1 - \frac{4}{x+4} \right) dx =$$

$$= x + \ln|x+1| - 4\ln|x+4|]_0^1 = 1 + 9\ln 2 - 4\ln 5 = 1 - \ln\left(\frac{625}{512}\right) \simeq 0,8$$

Opción B

Problema 3.15.11 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

c) (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x)\, dx$$

,

donde ln denota logaritmo neperiano.

Solución:

a) La función es continua si: $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

☛ $$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \left(\frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{10\sin x + 2x}{4x} =$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{10\cos x + 2}{4} = 3$$

☛ $$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (xe^x + 3) = 3$$

☛ $f(0)=a\Longrightarrow a=3$

b) De ser derivable en $x=0$ sólo sería para $a=3$, para cualquier otro valor de a la función no sería continua y, por tanto, tampoco sería derivable. Para que sea derivable tiene que cumplirse que $f'(0^-)=f'(0^+)$:

☛ $$f'(0^-)=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{\frac{5\sin(0+h)}{2(0+h)}+\frac{1}{2}-3}{h}=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{5\sin h-5h}{2h^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{5\cos h-5}{4h}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{5\sin h}{4}=0$$

☛ $$f'(0^+)=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{(0+h)e^{0+h}+3-3}{h}=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{he^h}{h}=1$$

☛ Como $f'(0^-)\neq f'(0^+)\Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=0$.

c)

$$\int(xe^x+3)\,dx=\left[\begin{array}{c}u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^xdx\Longrightarrow v=e^x\end{array}\right]=xe^x-\int e^x\,dx+3x=3x+e^x(x-1)+C$$

$$\int_1^{\ln 5}f(x)\,dx=\left.3x+e^x(x-1)\right]_1^{\ln 5}=8(\ln 5-1)=4,88$$

3.16. Año 2015

3.16.1. Modelo

Opción A

Problema 3.16.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.

b) (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=\pm 1/2$.

Solución:

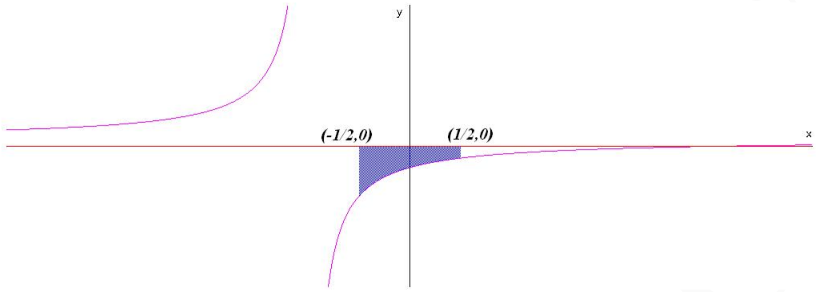
a) $x^2-1=0\Longrightarrow x=\pm 1\Longrightarrow \mathrm{Dom}(f)=R-\{\pm 1\}$

b) $f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0\Longrightarrow$La función es creciente en todo el dominio de la función $R-\{\pm 1\}$

c)

$$S_1=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{x-3}{x+1}\,dx=\left.x-4\ln(x+1)\right]_{-1/2}^{1/2}=1-4\ln 3$$

$$S=|S_1|=4\ln 3-1\ u^2$$



Opción B

Problema 3.16.2 *(3 puntos)* Hallar

a) (1 punto). $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\displaystyle\int (3x+5)\cos x\,dx$.

c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x)=\frac{ex-e^x}{x}$$

.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}-\frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{1}=1$$

b) $\displaystyle\int (3x+5)\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=3x+5\Longrightarrow du=3dx \\ dv=\cos x\Longrightarrow v=\sin x\end{array}\right]=$

$$(3x+5)\sin x-3\int \sin x\,dx=(3x+5)\sin x+3\cos x+C$$

c) $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{x^2}=0\Longrightarrow x=1$. Si $x>1\Longrightarrow f'(x)<0\Longrightarrow f$ es decreciente en el intervalo $(1,\infty)$. Si $x<1\Longrightarrow f'(x)>0\Longrightarrow f$ es creciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(0,1)$ En $x=1$ hay un máximo local.

3.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.16.3 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde ln denota logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $x > -1$, y $x \neq \pm 2 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-1, 2) \cup (2, \infty)$
Asíntotas:

- Verticales:
En $x = -2$: no hay asíntota en el intervalo $(-2, -1)$ la función no existe.
En $x = 2$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
En $x = -1$: $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) =$ No existe y $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
- Horizontales: $y = 0$; $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x) = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2} + \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.
$f(0) = 0$ y $f'(0) = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow y = \dfrac{3}{4}x$ es la recta tangente buscada.

c)

$$\int \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx = \int \frac{x}{x^2-4}\,dx + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx =$$
$$= \frac{\ln|x^2-4|}{2} + \frac{(\ln(x+1))^2}{2} + C$$

Opción B

Problema 3.16.4 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} (xe^x + 1) = 1, \text{ y } f(0) = 1$$

La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en R.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\sin h - h}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\cos h - 1}{2h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{2} = 0$$

$$f'(0^+) = 1$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow$ la función es derivable en $R - \{0\}$

c) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = e^x(x-1) + x]_1^3 = 2e^3 + 2 = 42,17$

3.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.5 *(3 puntos)*

a) (2 punto). Determinar los valores a, b, c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax - b & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Solución:

a) Continua en $x = 0$: $f(0) = -1$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+}(ax - b) = -b \Longrightarrow b = 1$

Continua en $x = 1$: $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-}(ax - b) = a - b$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+}(x^2 + bx + c) = 1 + b + c \Longrightarrow a - b = 1 + b + c \Longrightarrow a - 2b - c = 1$

Luego $a - 2 - c = 1 \Longrightarrow a - c = 3$

Derivable en $x = 1$: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ a & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$ $f'(1^-) = a$, $f'(1^+) = 2 + b \Longrightarrow a - b = 2 \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow c = 0$

b) La función g es continua en el intervalo $[1, 2]$ y también derivable en $(1, 2)$. ($g(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = 2x + 1$) Por el Teorema del Valor Medio $\exists c \in (1, 2)/g'(c) = \dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \dfrac{6 - 2}{1} = 4$

$g'(c) = 2c + 1 = 4 \Longrightarrow c = \dfrac{3}{2}$

Opción B

Problema 3.16.6 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar los puntos de inflexión y dibujar la curva $y = f(x)$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, puntos de corte :$(0,0)$
Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales: $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$
  $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} x^2e^{-x} = \infty$ No hay.
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

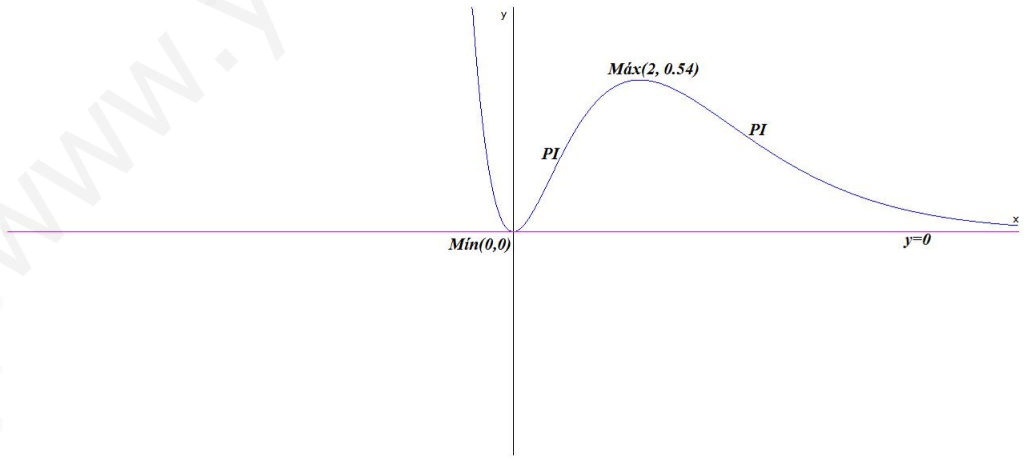
b) $f'(x) = xe^{-x}(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$:

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(0,0)$ y decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$. Tiene un mínimo en el punto $(0,0)$ y un máximo en $(2,4e^{-2})$.

c) $f''(x) = e^{-x}(x^2-4x+2) = 0 \Longrightarrow x = 2\pm\sqrt{2}$ son los puntos de inflexión:

	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2},\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	cónvexa $\frown$	cóncava $\smile$



3.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.16.7 *(2 puntos)*

a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una úunica solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Solución:

a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 > 0 \Longrightarrow$ la función es siempre creciente.

b) Es una función polinómica y, por tanto, continua:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene puntos de corte con el eje OX y, como esta función es creciente en R, concluimos que sólo hay un punto de corte.(Sólo hay una solución)
$f(0) = 1$ y $f(-1) = -2 \Longrightarrow$ por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene el punto de corte en el intervalo $(-1, 0)$ de longitud 1.

Problema 3.16.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx$

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty}(1-x)e^{-x}$

Solución:

a) $\displaystyle\int_1^4 (1-x)e^{-x}\,dx = xe^{-x}\Big]_1^4 = 4e^{-4} - e^{-1} = -0,29$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{1-x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-1}{e^x} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty}(1-x)e^{-x} = \infty$

Opción B

Problema 3.16.9 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x\ln(x)\text{si} & x > 0 \\ x^2e^x & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

(donde ln denota logaritmo neperiano y a es un núumero real) se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo R.

b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} x^2e^x = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = a + \lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln(x) = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

La función es continua en $x = 0$ si $a = 0$.

b)

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{rcl} \ln x + 1 & \text{si} & x > 0 \\ 2xe^x + x^2e^x & \text{si} & x < 0 \end{array}\right.$$

$$f'(0^-) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{h\ln h}{h} = -\infty$$

$f'(0^-) \neq f'(0^-) \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow$ la función es derivable en $R - \{0\}$

c) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) - x\big]_{-1}^{0} = 2 - \dfrac{5}{e} = 0,161$

3.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.10 *(2 puntos)* Dada $f(x)$, función derivable, con derivada continua, tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, se define la función $g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)}$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar $g(0)$, $g'(0)$ y $(fg)'(0)$.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,5 puntos). Obtener el valor de $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{x}$

Solución:

$$g(x) = (f(x))^2 - e^{f(x)} \Longrightarrow g'(x) = 2(f(x))f'(x) - f'(x)e^{f(x)}$$

$$y = (fg)(x) = f(g(x)) \Longrightarrow y' = (fg)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

a) $g(0) = (f(0))^2 - e^{f(0)} = 0 - e^0 = -1$; $g'(0) = 2(f(0))f'(0) - f'(0)e^{f(0)} = -1$ y $(fg)'(0) = f'(g(0))g'(0) = -f'(-1)$.

b) $y - b = m(x - a)$ donde $a = 0$, $b = f(a) = f(0) = 0$ y $m = f'(a) = f'(0) = 1 \Longrightarrow y = x$

c) $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f'(x)}{1} = 1$

Problema 3.16.11 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) (1 punto). Justificar que f está definida en todo x del intervalo $[0,1]$ y calcular $\displaystyle\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx$.

Solución:

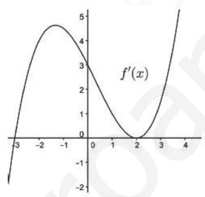
a) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = -1$

b) $x^2-4x+3 \geq 0 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$, luego la función está definida en el intervalo $[0,1]$.

$$\int_0^1 (x-2)f(x)\,dx = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2-4x+3}\,dx = \left.\frac{(x^2-4x+3)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = -\sqrt{3}$$

Opción B

Problema 3.16.12 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función con derivada de orden dos continua para todo número real y cuya gráfica contiene al origen.



La función derivada $f'(x)$ (representada en el gráfico adjunto) es positiva para todo $x > 2$ y negativa para todo $x < -3$. Se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) (1 punto). Determinar las abscisas de los extremos relativos de $f(x)$ y clasificar dichos extremos.

c) (1 punto). Demostrar que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(-3, 2)$.

Solución:

a) Se sabe que $f(0) = 0$ (f pasa por el origen de coordenadas) y por la gráfica $m = f'(0) = 3 \Longrightarrow y = 3x$

b) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 2$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	creciente

La función presenta un mínimo en $x = -3$. En $x = 2$ no hay extremo.

c) En $x = 2$ $f''(2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ es un punto de inflexión, pero no pertenece al intervalo. En $x = -3/2$ $f''(-3/2) = 0 \Longrightarrow x = -3/2$ es un punto de inflexión, que si pertenece al intervalo.

3.17. Año 2016

3.17.1. Modelo

Opción A

Problema 3.17.1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$, se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.

c) (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Solución:

a) $f'(x) = 4x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\; x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es decreciente en: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
La función es decreciente en: $(0, 4)$

b) La función tiene un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(4, 32/3)$.

c) Llamamos $g(a) = f'(a) = 4a - a^2$ y tenemos que optimizar esta función: $g'(a) = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $g''(a) = -2$, es decir $g''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow$ en $a = 2$ hay un máximo. La máxima pendiente de las rectas tangentes a $f(x)$ será: $g(2) = 4$.

d) $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 6$:

$$V = \pi \int_0^6 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^7}{63} + \frac{4x^5}{5} - \frac{2x^6}{9}\right]_0^6 = \frac{10368\pi}{35}\, u^3$$

Opción B

Problema 3.17.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x < 1 \\ xe^{1-x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} |x| & \text{si} & x<1 \\ xe^{1-x} & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} -x & \text{si} & x<0 \\ x & \text{si} & 0\leq x<1 \\ xe^{1-x} & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ccc} -1 & \text{si} & x<0 \\ 1 & \text{si} & 0\leq x<1 \\ (1-x)e^{1-x} & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right.$$

a) La función es continua y derivable en cualquier punto distinto de 1 ó 0, donde hacemos su estudio:

- Continuidad en $x=0$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=f(0)=0 \Longrightarrow$ la función es continua. Derivabilidad en $x=0$: $f'(0^-)=-1\neq f'(0^+)=1 \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=0$.
- Continuidad en $x=1$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=f(1)=1 \Longrightarrow$ la función es continua. Derivabilidad en $x=1$: $f'(1^-)=1\neq f'(1^+)=0 \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=1$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0 -x\,dx+\int_0^1 x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^0+\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=1$

c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 xe^{1-x}\,dx=-(x+1)e^{1-x}\Big]_1^2=2-\frac{3}{e}$

3.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.17.3 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si} & x<0 \\ xe^{-x} & \text{si} & x\geq 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos). Calcular la recta tangente a la curva $y=f(x)$, en $x=2$.

c) (1,5 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

Solución:

a) La función es continua en cualquier punto distinto de 0, donde hacemos su estudio: Continuidad en $x=0$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=f(0)=0 \Longrightarrow$ la función es continua en R.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{\frac{-1}{1-x}}{-1}=0$$

b) $f(x) = xe^{-x} \Longrightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x)$

$$b = f(2) = 2e^{-2};\ \ m = f'(2) = -e^{-2} \Longrightarrow y - 2e^{-2} = -e^{-2}(x-2)$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{1-x} + \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx = -\frac{(\ln(1-x))^2}{2}\Bigg]_{-1}^{0} - e^{-x}(x+1)\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 - 2e^{-1} = 0,5$

Opción B

Problema 3.17.4 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in R$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) (1 punto). Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5; \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14$$

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ \ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,\ \ f''(x) = 6ax + 2b,\ \ f'''(x) = 6a$

$$\left\{\begin{array}{l} f'''(x) = 12 \Longrightarrow 6a = 12 \Longrightarrow a = 2 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow a + b + c + d = 3 \\ f'(1) = 1 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 1 \\ f''(1) = 4 \Longrightarrow 6a + 2b = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{array}\right.$$

La función polinómica buscada es $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

b) $g(x) = ax^2 + bx + c,\ \ g'(x) = 2ax + b,\ \ g''(x) = 2a$

$$g''(x) = 2a \Longrightarrow 2a = 6 \Longrightarrow a = 3$$

$$\int_0^1 (3x^2 + bx + c)\,dx = x^3 + \frac{2bx^2}{2} + cx\Bigg]_0^1 = \frac{b + 2c + 2}{2} = 5 \Longrightarrow b + 2c = 8$$

$$\int_0^2 (3x^2 + bx + c)\,dx = x^3 + \frac{2bx^2}{2} + cx\Bigg]_0^2 = 2b + 2c + 8 = 14 \Longrightarrow b + c = 3$$

$$\left\{\begin{array}{l} b + 2c = 8 \\ b + c = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2 \\ c = 5 \end{array}\right.$$

La función polinómica buscada es $g(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Problema 3.17.5 *(2 puntos)* Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ |x \ln x| & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ |x \ln x| & \text{si} & x > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ -x\ln x & \text{si} & 0 < x \le 1 \\ x \ln x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ -\ln x - 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ \ln x + 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (-x \ln x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{\ln x}{1/x} \right) = \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{1/x}{-1/x^2} \right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Luego f es continua en $x = 0$ Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (-x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (x \ln x) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Luego f es continua en $x = 1$
Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = +\infty$ y, por tanto no es derivable.
Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = +1$ y, por tanto no es derivable.
Conclusión: La función f es continua en R y derivable en $R - \{0, 1\}$.

3.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.17.6 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?
Solución:
x :precio de la papeleta.
$f(x) = x(5000 - (x - 2)500) = -500x^2 + 6000x$
$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \Longrightarrow x = 6$
$f''(x) = -1000 \Longrightarrow f(6) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 6$ euros es un máximo que produciría un importe de $f(6) = 18000$ euros, si restamos el precio del ordenador tendríamos que se dona a la ONG la cantidad de $18000 - 600 = 17400$ euros.

Problema 3.17.7 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, definida para $x \neq -1$. Se pide:

a) (1,5 punto). Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

b) (0,5 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)g(x)$.

Solución:

a) $2+x-x^2 = \dfrac{2}{x+1} \Longrightarrow x=0$ y $x=\pm\sqrt{3} \Longrightarrow$ el recinto de integración es entre 0 y $\sqrt{3}$ por ser en el primer cuadrante.

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2+x-x^2-\frac{2}{x+1}\right)dx = 2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-2\ln|x+1|\Big]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{3}{2}+\sqrt{3}-2\ln|\sqrt{3}+1| = 1,22\,u^2$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow -1} f(x)g(x) = \lim_{x\longrightarrow -1}\frac{4+2x-2x^2}{x+1} = \lim_{x\longrightarrow -1}\frac{(x+1)(-2x+4)}{x+1} = 6$$

Opción B

Problema 3.17.8 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x-4}+2x-1 & \text{si} \quad x\neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de la curva $y=f(x)$.

b) (1 punto). Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y=f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a) ☛ Verticales: $x=2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

☛ Oblicuas: $y=mx+n \Longrightarrow y=2x-1$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 = \infty$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx) = -1$$

b) $f'(x) = -\dfrac{9}{2(x-2)^2}+2$ si $x\neq 2$, $f'(x)=0 \Longrightarrow x=\dfrac{7}{2},\ x=\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty,1/2)$	$(1/2,7/2)$	$(7/2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función tiene un Máximo en el punto $(1/2,-3)$ y un Mínimo en el punto $(7/2,9)$.

$f''(x) = \dfrac{9}{(x-2)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ no ha puntos de inflexión.

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

Luego f es cóncava en el intervalo $(2,\infty)$ y convexa en $(-\infty,2)$.

c)

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{2x-4}+2x-1\right)dx=\frac{9}{2}\ln|x-2|+x^2-x\bigg]_{-1}^{1}=-\frac{9\ln 3}{2}-2=-6,94$$

3.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.17.9 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=(6-x)e^{x/3}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $x=0$.

Solución:

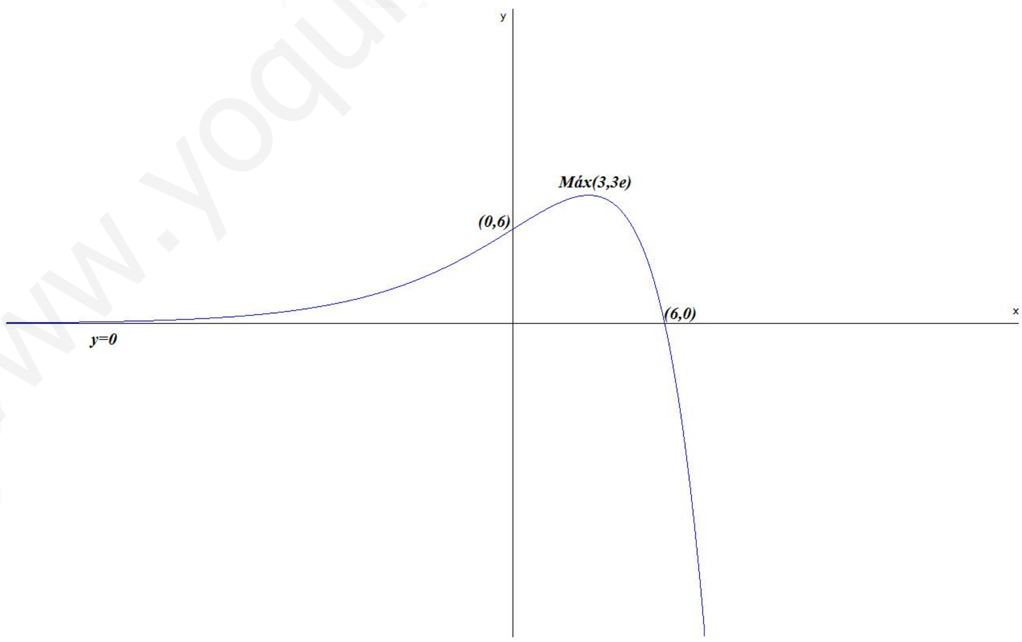
a) $Dom(f)=R$, y los puntos de corte serán $(6,0)$ y $(0,6)$. Asíntotas verticales no hay, estudiamos las horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(6-x)e^{x/3}=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}(6-x)e^{x/3}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}(6+x)e^{-x/3}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6+x}{e^{x/3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{1/3e^{x/3}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Luego, cuando $x\longrightarrow-\infty$ tenemos la asíntota horizontal $y=0$.
Como hay horizontales no hay oblicuas.



b) $f'(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) e^{x/3} = 0 \Longrightarrow x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, \infty)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(3, 3e)$.

c) $a = 0 \Longrightarrow b = f(a) = f(0) = 6$ y $m = f'(a) = f'(0) = 1$. La recta tangente a la función es $y - 6 = x \Longrightarrow y = x + 6$. Esta recta corta a los ejes coordenados en los puntos $(-6, 0)$ y $(0, 6)$ que con el eje OY forma un triángulo de base 6 u y altura 6 $u \Longrightarrow S = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18\ u^2$.
Otra forma:

$$S = \int_{-6}^{0} (x + 6)\, dx = \left.\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-6}^{0} = 18\ u^2$$

Opción B

Problema 3.17.10 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Solución:

a) Continuidad: Las ramas son continuas para cualquier valor, estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{5 - x} = \dfrac{1}{5} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{5 + x} = \dfrac{1}{5} \\ f(0) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Luego la función es continua en R.
Asíntotas verticales no tiene y las horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{5 - x} = 0; \text{ y } \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{5 + x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Oblicuas no hay al tener horizontales.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{-1}{(5+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(0^-) = \frac{1}{25} \ne f'(0^+) = -\frac{1}{25}$$

luego la función es derivable en $R - \{0\}$.

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\,dx =$$

$$-\ln|5-x|]_{-1}^{0} + \ln|5+x|]_{0}^{1} = 2\ln\left(\frac{6}{5}\right) = 0,365$$

3.18. Año 2017

3.18.1. Modelo

Opción A

Problema 3.18.1 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

Solución:
Sea x el aumento en euros de las papeletas:

$$f(x) = (2+x)(5000-500x) - 600 = -500x^2 + 4000x + 9400$$

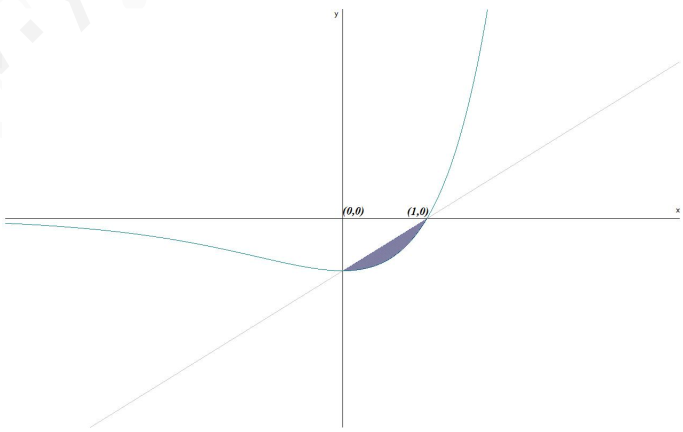
$$f'(x) = -1000x + 4000 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

$$f''(x) = -1000 \Longrightarrow f''(4) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 4 \text{ máximo}$$

Hay que aumentar el precio en 4 euros (hay que vender a 6 euros) y el beneficio sería $f(4) = 17400$ euros.

Problema 3.18.2 *(2 puntos)* Calcular el área comprendida entre las curva $y = (x-1)e^x$ y la recta $y = x - 1$.

Solución:



$f(x) = g(x) \Longrightarrow (x-1)e^x = x - 1 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$.

$$F(x) = \int ((x-1)e^x - x + 1)\ dx = \left[\begin{array}{c} u = x - 1 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array} \right] =$$

$$-\frac{x^2}{2} + x + (x-1)e^x - \int e^x\, dx = -\frac{x^2}{2} + x + (x-2)e^x$$

$$S_1 = \int_0^1 ((x-1)e^x - x + 1)\ dx = F(1) - F(0) = \frac{5-2e}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{2e-5}{2} \simeq 0,218\ u^2$$

Opción B

Problema 3.18.3 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$ y se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de f.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

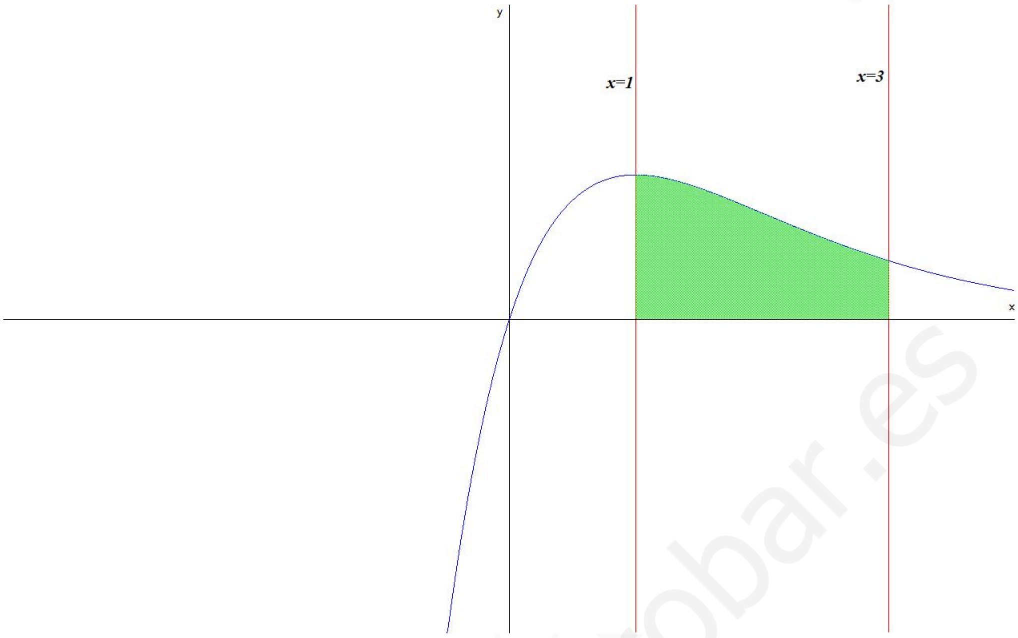
Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, Asíntotas:

- ☛ Verticales: No hay.
- ☛ Horizontales: $\lim_{x\longrightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ y $\lim_{x\longrightarrow \infty} xe^{-x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $f''(x) = e^{-x}(x-2) \Longrightarrow f''(1) = -e^{-1} < 0 \Longrightarrow$ en $x = 1$ la función presenta un máximo.

c) La función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[1, 3]$ y, por tanto, los límites de integración son 1 y 3.



$$F(x) = \int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] =$$

$$-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

$$S_1 = \int_1^3 xe^{-x}\,dx = F(3) - F(1) = -\frac{4}{e^3} + \frac{2}{e} = 0,54$$

$$S = |S_1| = \frac{2e^2-4}{e^3}\ u^2 \simeq 0054\ u^2$$

3.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.18.4 *(2 puntos)* Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución:
$c'(t) = e^{-t/2}\left(1 - \dfrac{t}{2}\right) = 0 \Longrightarrow t = 2$:

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$c'(t)$	$+$	$-$
$c(t)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$.

La función es decreciente en el intervalo $(2, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(2, 2/e) = (2, 0, 736)$. El paciente no llega a estar en riesgo, ya que en el máximo la concentración está por debajo de 1 mg/ml.

Problema 3.18.5 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, la única asíntota vertical es $x = 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2+x+6}{x-2} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2+x+6}{x-2} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+x+6}{x^2-2x} = 1$

c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx = \int_3^5 \left(x+3+\frac{12}{x-2}\right)dx = \left.\frac{x^2}{2} + 3x + 12\ln|x-2|\right]_3^5 = 14 + 12\ln 3 \simeq 27,18$

Opción B

Problema 3.18.6 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(f(x) - \dfrac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos). Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

c) (1,25 puntos). Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{\sin x}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2\sin x - 2x}{x\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2\cos x - 2}{\sin x + x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{-2\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -8$ luego la ecuación de la recta en su forma punto pendiente es: $y - 4 = -8\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

c) $\dfrac{2}{x} = -x + 3 \Longrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 2$:

$$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + x - 3\right) dx = 2\ln x + \frac{x^2}{2} - 3x\Big]_1^2 = -\frac{3}{2} + 2\ln 2 \simeq -0,114$$

$$S = |S_1| = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \simeq 0,114 \ u^2$$

3.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.7 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$, definidas para $x \in (-2, 4)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el valor o valores de x para los que $f'(x) = g'(x)$.

b) (1 punto) Hallar el punto x del intervalo $(-2, 4)$ en el que la diferencia $f(x) - g(x)$ es mínima y determinar el valor de esta diferencia mínima.

c) (0,5 puntos) Hallar $\lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} (f(x) - g(x))$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 4^-} (f(x) - g(x))$.

d) (1 punto) Hallar $F(x)$, primitiva de la función $f(x) - g(x)$, que cumple la condición $F(2) = 2 + \ln 2$.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$ y $g'(x) = -\dfrac{1}{(x-4)^2} \Longrightarrow -\dfrac{1}{(x+2)^2} = -\dfrac{1}{(x-4)^2} \Longrightarrow$

$$(x-4)^2 = (x+2)^2 \Longrightarrow 12x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

b) $h(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-4} \Longrightarrow$

$$h'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-4)^2} \Longrightarrow 12x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

	$(-2, 1)$	$(1, 4)$
$h'(t)$	$-$	$+$
$h(t)$	decreciente	creciente

Como la función decrece en el intervalo $(-2, 1)$ y crece en el $(1, 4)$, en $x = 1$ habrá un mínimo.

c) $\lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} \dfrac{-6}{(x+2)(x-4)} = \left[\dfrac{-6}{0^-}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 4^-} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \longrightarrow 4^-} \dfrac{-6}{(x+2)(x-4)} = \left[\dfrac{-6}{0^-}\right] = +\infty$

d) $F(x) = \displaystyle\int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-4}\right) dx = \ln|x+2| - \ln|x-4| + C$

$$F(2) = \ln 4 - \ln 2 + C = 2\ln 2 - \ln 2 + C = \ln 2 + C = 2 + \ln 2 \Longrightarrow C = 2$$

Luego $F(x) = \ln\left|\dfrac{x+2}{x-4}\right| + 2$

Opción B

Problema 3.18.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin^2 x - 5\sin x\cos x}{3\sin^2 x\cos x + 2\sin x};\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7}).$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes integrales:

$$\int (3u+1)\cos(2u)\,du;\quad \int_2^5 \frac{7}{4x+1}\,dx.$$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin^2 x - 5\sin x\cos x}{3\sin^2 x\cos x + 2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x(4\sin x - 5\cos x)}{\sin x(3\sin x\cos x + 2)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin x - 5\cos x}{3\sin x\cos x + 2} = -\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7}) = [\infty-\infty] = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7})(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x-7}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x}{(\sqrt{x}+\sqrt{2}\sqrt{x})} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-\sqrt{x}}{1+\sqrt{2}} = -\infty$$

b)

$$\int (3u+1)\cos(2u)\,du = \left[\begin{array}{c} w = 3u+1 \Longrightarrow dw = 3du \\ dv = \cos 2u\,du \Longrightarrow v = \frac{1}{2}\sin u \end{array}\right] =$$

$$\frac{(3u+1)\sin 2u}{2} - \frac{3}{2}\int \sin 2u\,du =$$

$$\frac{(3u+1)\sin 2u}{2} + \frac{3\cos 2u}{4} + C = \frac{2(3u+1)\sin 2u + 3\cos 2u}{4} + C$$

$$\int_2^5 \frac{7}{4x+1}\,dx. = \frac{7}{4}\ln|4x+1|\Big]_2^5 = \frac{7}{4}\ln\frac{7}{3}$$

3.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.18.9 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$ donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x=0$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} xe^{2x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ y $f(0)=0 \Longrightarrow f$ es continua en $x=0$.

Derivabilidad en $x=0$:

$f'(x) = \begin{cases} (1+2x)e^{2x} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$; $f'(0^-)=1$ y $f'(0^+)=1 \Longrightarrow f$ es derivable en $x=0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{t\longrightarrow\infty} -te^{-2t} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{-t}{e^{2t}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{-1}{2e^{2t}} = 0$

c)

$$\int xe^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u=x & \Longrightarrow & du=dx \\ dv=e^{2x}dx & \Longrightarrow & v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{3-e^2}{4e^2} = -0,148$$

Opción B

Problema 3.18.10 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

a) $b=f(0)=1$ y $m=f'(0)=-1 \Longrightarrow y=-x+1$

b) ☛ Verticales: No hay, el denominador $f(x)$ no se anula.

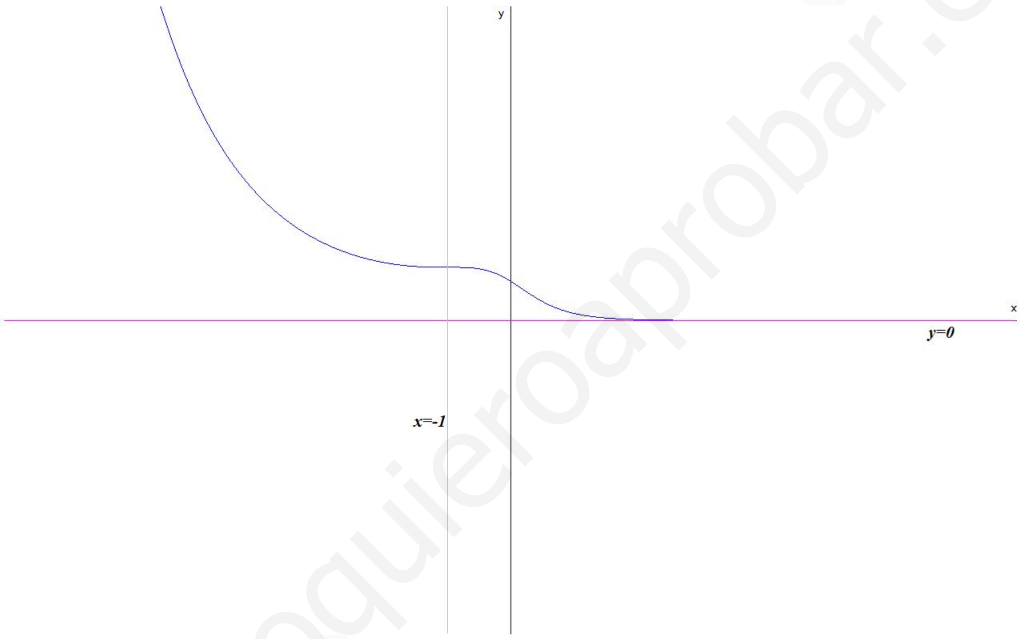
☛ Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=0\Longrightarrow y=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=\lim_{t\longrightarrow +\infty}\frac{e^{t}}{t^2+1}=\infty$$

Luego no hay asíntota horizontal cuando $x\longrightarrow -\infty$ pero si la hay cuando $x\longrightarrow +\infty$ y es $y=0$.

c) $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}=0\Longrightarrow x=-1$, en este punto la función pasa de decrecer a decrecer y en el resto de puntos la función es siempre decreciente ($f'(x)<0$ en $\mathbb{R}-\{-1\}$), luego no tiene extremos relativos.



3.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.11 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si} \quad x<0\\ xe^x+2 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Obtener la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=-\pi$

c) (1 punto) Calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} (xe^x + 2) = 2$ y $f(0) = 2 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R}$.

b) Si $x = -\pi$ tenemos: $f(-\pi) = 0$, en esa rama $f'(x) = \dfrac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2} \Longrightarrow m = f'(-\pi) = -\dfrac{2}{\pi}$. Luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y = -\frac{2}{\pi}(x + \pi)$$

c) En el intervalo $[1, 2]$ es $f(x) = xe^x + 2$:

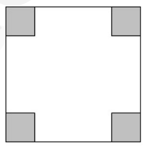
$$F(x) = \int (xe^x + 2)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right] = xe^x + 2x - \int e^x\,dx =$$

$$xe^x + 2x - e^x = e^x(x - 1) + 2x$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = e^2 + 2 = 9,389$$

Opción B

Problema 3.18.12 *(2 puntos)* Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.



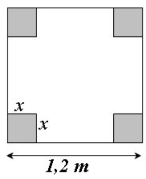
Solución:

$$V(x) = (1,2 - 2x)^2 x = (1,44 + 4x^2 - 4,8x)x = 4x^3 - 4,8x^2 + 1,44x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 9,6x + 1,44 = 0 \Longrightarrow x = 0,2, \;\; x = 0,6$$

$$V''(x) = 24x - 9,6 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} V''(0,2) = -4,8 < 0 \Longrightarrow x = 0,2 \text{ máximo} \\ V''(0,6) = 4,8 > 0 \Longrightarrow x = 0,6 \text{ mínimo} \end{array}\right.$$

El volumen máximo sería $V(0,2) = 0,128$



Problema 3.18.13 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, calcúlese el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = 1 - x$.

Solución:

$$\frac{1-x^2}{x^2+1} = 1 - x \Longrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\; x = 1$$

$$S_1 = \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{x^2+1} - 1 + x\right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\arctan x\bigg]_0^1 = \frac{\pi-3}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|\frac{\pi-3}{2}\right| = \frac{\pi-3}{2}\; u^2$$

3.19. Año 2018

3.19.1. Modelo

Opción A

Problema 3.19.1 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos(x) + |x-1|$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el valor de $f'(0)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

c) (1 punto) Hallar el área del recinto plano limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

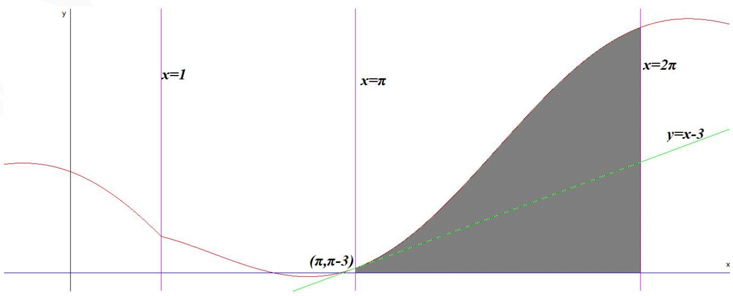
Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} 2\cos x - x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2\cos x + x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -2\sin x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2\sin x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ luego $f'(0) = -1$.

b) La ecuación punto pendiente de la recta es $y - b = m(x-a)$ donde $b = f(a) = f(\pi) = 2\cos\pi + \pi - 1 = \pi - 3$ y $m = f'(\pi) = -2\sin\pi + 1 = 1$, la recta será: $y - (\pi - 3) = x - \pi \Longrightarrow y = x - 3$.

c) La función $f(x) = 2\cos x + x - 1 > 0$ no corta al eje de abscisas en $[\pi, 2\pi]$:

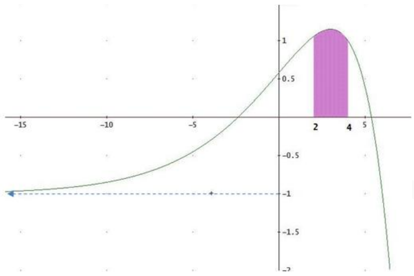
$$\int_\pi^{2\pi} (2\cos x + x - 1)\, dx = 2\sin x + \frac{x^2}{2} - x\bigg]_\pi^{2\pi} = \frac{3\pi^2}{2} - \pi\; u^2$$



Opción B

Problema 3.19.2 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función

$$f(x) = (6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$$



se pide:

a) (1 punto) Calcular el área de la región sombreada.

b) (1 punto) Determinar la abscisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.

c) (0,5 puntos) Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo (flecha discontinua inferior).

Solución:

a)

$$F(x) = \int ((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = (6-x) \Longrightarrow du = -dx \\ dv = e^{\frac{x-4}{3}}\, dx \Longrightarrow v = 3e^{\frac{x-4}{3}} \end{array} \right] =$$

$$3(6-x)e^{\frac{x-4}{3}} + 3\int e^{\frac{x-4}{3}}\, dx - x = 3(6-x)e^{\frac{x-4}{3}} + 9e^{\frac{x-4}{3}} - x = (27-3x)e^{\frac{x-4}{3}} - x$$

$$S = \int_2^4 ((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1)\, dx = F(4) - F(2) = 13 - \frac{21}{e^{2/3}} = 2,218\ u^2$$

b) $g(x) = f'(x) = \left(\dfrac{3-x}{3}\right) e^{\frac{x-4}{3}} \Longrightarrow g'(x) = -\dfrac{xe^{\frac{x-4}{3}}}{9} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$
$g(x)$	creciente	decreciente

Luego en $x = 0$ habrá un máximo punto en el que la pendiente a $f(x)$ es máxima..

c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} ((6-x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1) = -1 + \lim_{t\longrightarrow \infty} (6+t)e^{-\frac{t+4}{3}} = -1 + \lim_{t\longrightarrow \infty} \frac{6+t}{e^{\frac{t+4}{3}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -1 + \lim_{t\longrightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{t+4}{3}}} = -1 + 0 \Longrightarrow y = -1$

3.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.19.3 *(2,5 puntos)*

a) (1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0,92$; $m_2 = 0,94$; $m_3 = 0,89$; $m_4 = 0,90$; $m_5 = 0,91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x-m_1)^2 + (x-m_2)^2 + \cdots + (x-m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln(x)dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

Solución:

a) $E'(x) = 2[5x - (m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)] = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}{5} = \dfrac{4,56}{5} = 0,912$, es decir, se trata de la media de resultados. Sólo queda por comprobar que se trata de un mínimo:
$E''(x) = 10 \Longrightarrow E''(0,912) = 10 > 0 \Longrightarrow x = 0,912$ es un mínimo.
Éste valor correspondería a un error de $E(0,912) = 0,00148$.

b)

$$F(x) = \int x^2\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx \Longrightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right] =$$

$$\frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{9}$$

$$\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx = F(2) - F(1) = \frac{24\ln 2 - 7}{9} \simeq 1,07\ u^2$$

Opción B

Problema 3.19.4 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $f'(4)$.

c) (1,25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \end{cases} \Longrightarrow y = 1.$

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(4) = \dfrac{9}{125} = 0,072.$

c) La función corta al eje OX en $x = 0$ por lo que tendremos dos recintos de integración uno para cada una de las ramas: $S_1 : [-1, 0]$ y $S_2 : [0, 1]$.

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \left[\begin{array}{c} x^2 + 9 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right] = \int t^{-1/2}\, dt = t^{1/2} = \sqrt{x^2+9}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = -\sqrt{x^2+9}\Big]_{-1}^{0} = \sqrt{10} - 3 \simeq 0,162$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \sqrt{x^2+9}\Big]_{0}^{1} = \sqrt{10} - 3 \simeq 0,162$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2\sqrt{10} - 6 \simeq 0,325$$

3.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.19.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 3x^2e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\, dx$.

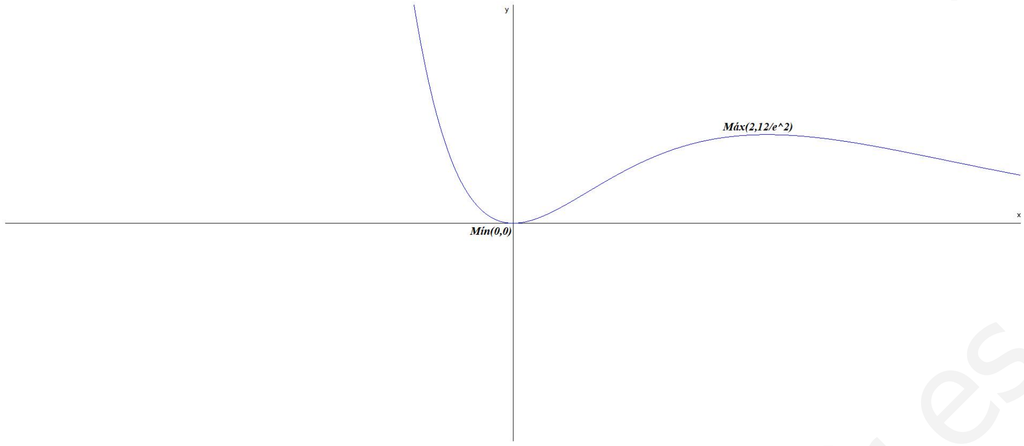
c) (0,75 puntos) Calcular los límites: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

a) $f'(x) = 3xe^{-x}(2 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y creciente en $(0, 2)$. Tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$ y un máximo en el $(2, 12/e^2)$.



b) $F(x) = \int \frac{f(x)}{x}\,dx = \int 3xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = 3x \Longrightarrow du = 3dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -3xe^{-x} + 3\int e^{-x}\,dx =$ $-3xe^{-x} - 3e^{-x} = -3e^{-x}(x+1)$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx = F(1) - F(0) = \frac{-6+3e}{e} \simeq 0,793$$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}(3x^2e^{-x}) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(3t^2e^{t}) = \infty$

$\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}(3x^2e^{-x}) = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3x^2}{e^x} = 0$

Opción B

Problema 3.19.6 *(2,5 puntos)* Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable, x, de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:

a) (0,25 puntos) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso $x = 0$ (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia).

b) (0,5 puntos) Expresar en función de x el precio del frasco que contiene $(12+x)$ ml de mezcla.

c) (0,5 puntos) Deducir con qué valor de x el precio de la mezcla se hace cero.

d) (1,25 puntos) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y el precio resultante.

Solución:

a) para $x = 0$ el precio sería: $12 \cdot 48 = 576$ euros.

b) $f(x) = (12+x)(48-3x) = -3x^2 + 12x + 576$.

c) $f(x) = (12+x)(48-3x) = 0 \Longrightarrow x = -12$ (no válida) y $x = 16$ mililitros.

d) $f'(x) = -6x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$ por la segunda derivada $f''(x) = -6 \Longrightarrow f''(2) = -6 < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo y el valor de la función en este punto es $f(2) = 14 \cdot 42 = 588$ euros.

3.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.19.7 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

b) (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Solución:

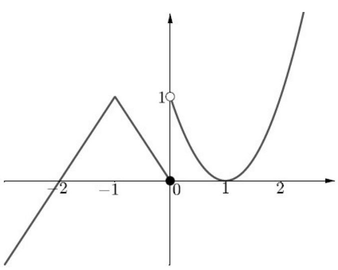
a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (8e^{2x-4}) = 8$
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^3-4x}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{3x^2-4}{1} = 8$
$f(2) = 8 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 2$.

b) Si $x \leq 2$ la función no tiene asíntotas verticales, tendría una horizontal en $y = 0$: $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (8e^{2x-4}) = 0$ y, por tanto, en esa rama no habría oblicuas.
Si $x > 2$ la función no tiene asíntotas verticales, la única posible sería en $x = 2$ pero no está en la rama. Horizontales tampoco habría $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3-4x}{x-2} = \infty$ y tampoco habría oblicuas en esa rama $m = \displaystyle\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-2x} = \infty$

c) $\displaystyle\int_0^2 8e^{2x-4}\,dx = 4e^{2x-4}\Big]_0^2 = 4 - \frac{4}{e^4} \simeq 3,927$

Opción B

Problema 3.19.8 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) (0,5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.

b) (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

c) (0,5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

d) (0,5 puntos) Determinar el valor de $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) $f(-1) = 1$ y $f'(1) = 0$.

b) En $x = -1$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = 1$ y $f(-1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = -1$.
En $x = 0$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \Longrightarrow f$ discontinua no evitable en $x = 0$, presenta un salto.

c) En $x = 0$ la función no es continua y, por tanto, no es derivable. En $x = -1$ la función es continua pero hace un pico en el que se podrían trazar infinitas rectas tangentes, luego no es derivable en $x = -1$.

d) $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \frac{2\cdot 1}{2} = 1\ u^2$.

3.20. Año 2019

3.20.1. Modelo

Opción A

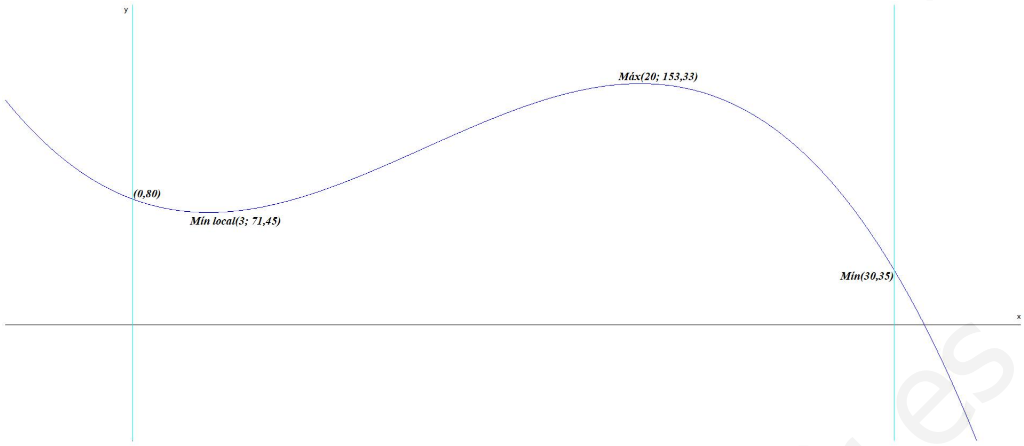
Problema 3.20.1 *(2,5 puntos)* La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función $c(t) = 80 - 6t + \dfrac{23t^2}{20} - \dfrac{t^3}{30}\ mg/m^3$ donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, **expresado en días**, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

a) (0,5 puntos) ¿Qué nivel de NO_2, había a las 12 horas del día 10 de abril?

b) (1,25 puntos) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

c) (0,75 puntos) Calcule, mediante $\dfrac{1}{30}\displaystyle\int_{0}^{30} c(t)dt$, el nivel promedio del mes.

Solución:



a) $c(9,5) = 98,21\, mg/m^3$

b) $c(0) = 80$, $c(30) = 35$ y $c'(t) = -\dfrac{t^2}{10} + \dfrac{23t}{10} - 6 = 0 \Longrightarrow t = 3,\ \ t = 20$

	$(0,3)$	$(3,20)$	$(20,30)$
$c'(x)$	$-$	$+$	$-$
$c(x)$	decreciente	creciente	decreciente

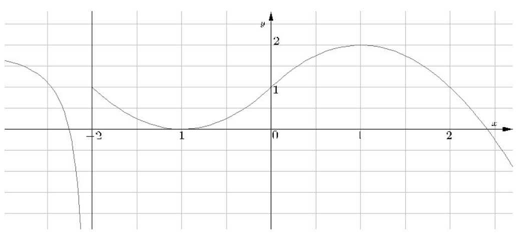
Luego el máximo se da el día 20 con $c(20) = 153,33\ mg/m^3$.

c) $\overline{X} = \dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} c(t)dt = \dfrac{1}{30}\left(80t - 3t^2 + \dfrac{23t^3}{60} - \dfrac{t^4}{120}\right)\Bigg]_0^{30} = \dfrac{3300}{30} = 110$

Opción B

Problema 3.20.2 *(2,5 puntos)*

a) (1 punto) A partir de la siguiente gráfica de la función f, determine los valores de: $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.



b) (1,5 puntos) Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx$, donde $g(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si} \quad -3 \le x \le 0 \\ 1+\sin x & \text{si} \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$

Solución:

a) En $x=-1$ hay un extremo luego $f'(-1)=0$, Por otra parte:
$\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)=1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=1$

b) La función es continua en $x=0$, los límites laterales coinciden y con el valor de la función en ese punto. Ahora resolvemos la integral:

$$\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx=\int_{-3}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{\pi}(1+\sin x)\,dx=$$

$$\left.\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-3}^{0}+\left. x-\cos x\right]_0^{\pi}=5+\pi.$$

3.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.20.3 *(2,5 puntos)* Dada $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x>0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y=f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y=f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$ y $x=e$.

Solución:

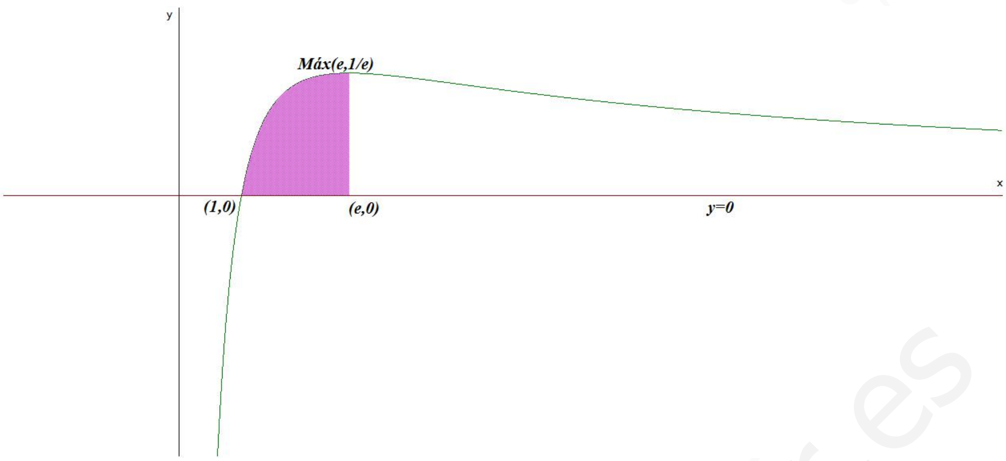
a) $\mathrm{Dom}(f)=(0,+\infty)$
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0\Longrightarrow y=0$ por la derecha.

b) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Longrightarrow 1-\ln x=0\Longrightarrow x=e$

	$(0,e)$	(e,∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0,e)$ y decrece en el intervalo $(e,+\infty)$. Luego presenta un máximo relativo en el punto $(e,1/e)$.

c) $f(x)=0\Longrightarrow x=1$ luego el intervalo de integración sería el $[1,e]$.



Aunque se trata de una integral inmediata dejo la solución por partes por las características de su resolución.

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x}dx \Longrightarrow v = \ln x \end{array}\right] = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\,dx \Longrightarrow$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

De otra forma:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ dx = xdt \end{array}\right] = \int \frac{t}{x}\,xdt = \int tdt \Longrightarrow \frac{t^2}{2}\,dx =$$

$$\frac{(\ln x)^2}{2} + C \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Longrightarrow S = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}\,u^2$$

Opción B

Problema 3.20.4 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1,5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0,5 puntos) Calcular los límites laterales. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

Solución:

a) $4x^2 - x^4 = x^2(2-x)(2+x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$.

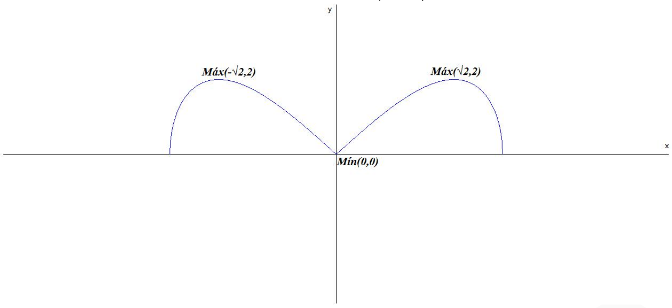
$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$-$	$+$	$+$	$-$

$\text{Dom}(f) = [-2, 2]$

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x^2)}{\sqrt{4x^2-x^4}} = 0 \Longrightarrow x(2-x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 0$

	$(-2,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},2)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f decrece en el intevalo $(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},2)$ y crece en el intervalo $(-2,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$. Tendría un mínimo en el punto $(0,0)$ y dos máximos en los puntos $(-\sqrt{2},2)$ y $(\sqrt{2},2)$.



c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = [t=-x] =$

$\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+}\dfrac{t\sqrt{4-t^2}}{-t} = \lim\limits_{t\longrightarrow 0^+}\dfrac{\sqrt{4-t^2}}{-1} = -2$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{x} =$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\sqrt{4-x^2} = 2$

3.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.20.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right) & \text{si} \quad x \le 1 \\[2ex] \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=1$.

b) (0,75 puntos) Determinar, si existe, $f'(1)$.

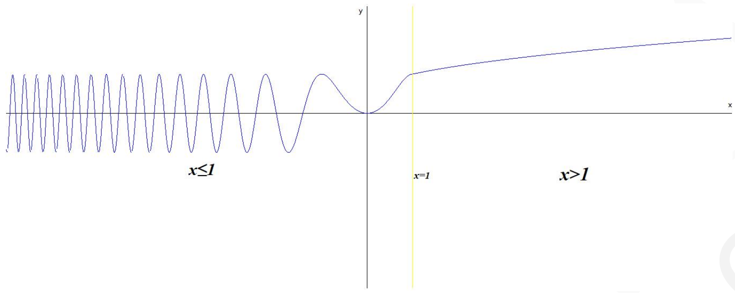
c) (1 punto) Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} 2\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right) = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2 = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2$$

Y como $f(1) = 2$ concluimos que f es continua en $x = 1$.



b) Lo hacemos aplicando la definición de derivada:

- ☛ Si $x \longrightarrow 1^-$ tenemos que $h \longrightarrow 0^-$ luego $f(1) = 2$ y $f(1+h) = 2\sin\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right)$:

$$f'(1^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{2\sin\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right)-2}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{2\pi(1+h)\cos\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right)}{1} = 0$$

- ☛ Si $x \longrightarrow 1^+$ tenemos que $h \longrightarrow 0^+$ luego $f(1) = 2$ y $f(1+h) = \frac{h}{\sqrt{1+h}-1}$:

$$f'(1^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{\sqrt{1+h}-1}-2}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{h-2\sqrt{h+1}+2}{h(\sqrt{h+1}-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1-\frac{2}{2\sqrt{h+1}}}{\sqrt{h+1}-1+\frac{h}{2\sqrt{h+1}}} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{h+1}-2}{2(h+1)-2\sqrt{h+1}+h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{h+1}}}{2-\frac{1}{\sqrt{h+1}}+1} = \frac{1}{2}$$

- ☛ Como $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow \nexists f'(1)$

c) $\displaystyle\int_0^1 2x\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi}$

Opción B

Problema 3.20.6 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \frac{1}{2(x-1)}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Determinar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y la recta $2x + 4y = 7$.

Solución:

a) Asíntotas:

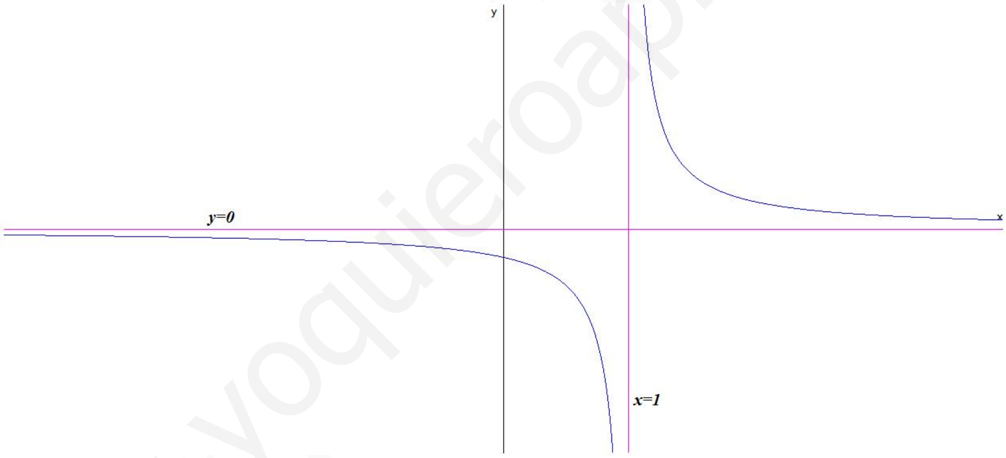
- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{1}{2(x-1)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{2(x-1)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$ ya que $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{2(x-1)} = 0$

- Oblicuas: no hay por haber horizontales.

$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} < 0 \Longrightarrow$ la función f es siempre decreciente en todo el dominio de la función $\mathbb{R} - \{1\}$.

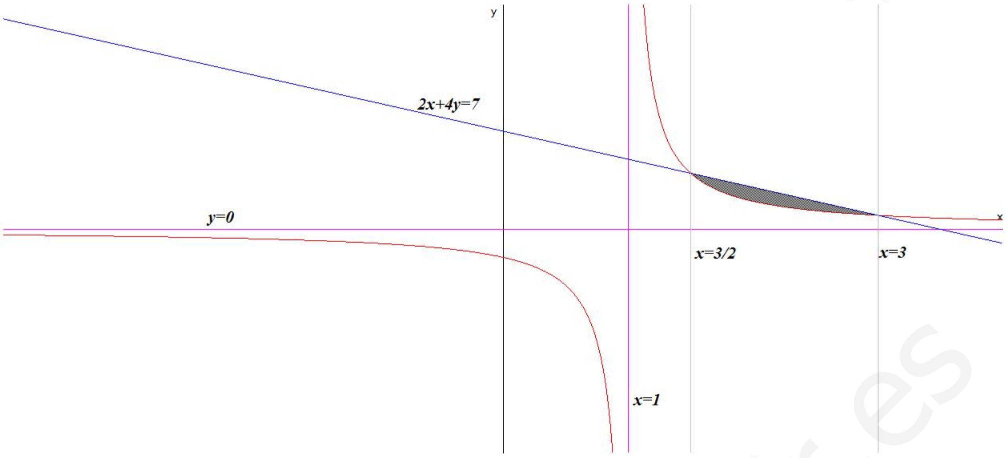


b) $2x + 4y = 7 \Longrightarrow y = \dfrac{7-2x}{4}$ los puntos de corte de las dos curvas vendrá dado por:

$$\frac{7-2x}{4} = \frac{1}{2(x-1)} \Longrightarrow x = \frac{3}{2}, \; x = 3$$

$$S = \int_{3/2}^{3} \left(\frac{7-2x}{4} - \frac{1}{2(x-1)}\right) dx = \left.\frac{7x-x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln|x-1|\right]_{3/2}^{3} =$$

$$\frac{15}{16} - \ln 2 \simeq 0,244 \;\; u^2$$



3.20.4. Ordinaria-Valencia

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

Opción A

Problema 3.20.7 Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$.

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función $g(x) = f(x) + ax$.

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$ e $\int xe^{-x}\,dx$

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{x}{e^{x^2}}$, $f(0) = 0$ y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

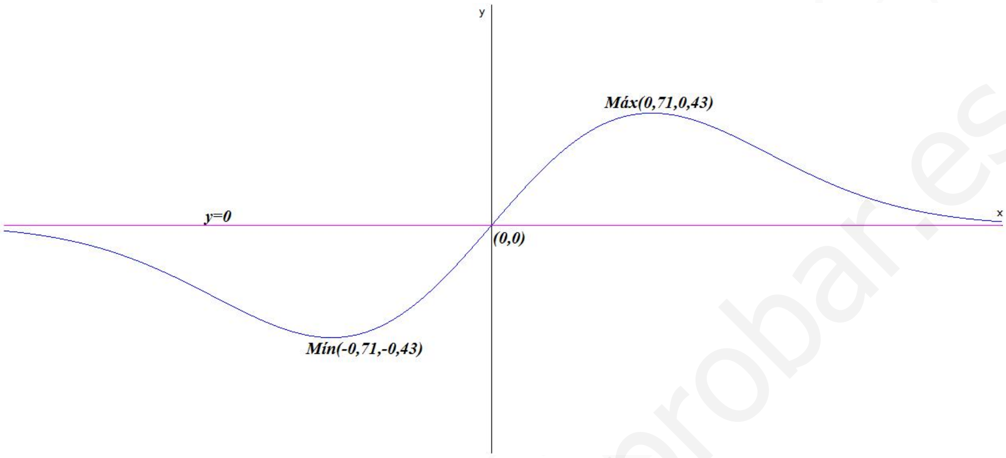
- ☛ Asíntotas verticales no hay, el denominador nunca se anula, horizontales en $y = 0$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{2xe^{x^2}} = 0$ y oblicuas no hay al haber horizontales.
- ☛ $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(-0,71, -0,43)$ y un máximo relativo en $(0,71, 0,43)$.

b) La función $g(x) = f(x) + ax$ es suma de funciones continuas y derivables y, por tanto, es continua y derivable. Por otra parte $g(0) = f(0) = 0$ y $g(1) = f(1) + a = e^{-1} + a$. Para que se cumplan las condiciones del teorema de Rolle sólo falta que $g(0) = g(1) \Longrightarrow e^{-1} + a = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{e}$

c) Representación:



d)

$$\int f(x)\,dx = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$\int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$

$$-xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

Opción B

Problema 3.20.8 *(2,5 puntos)* Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ y $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1). El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

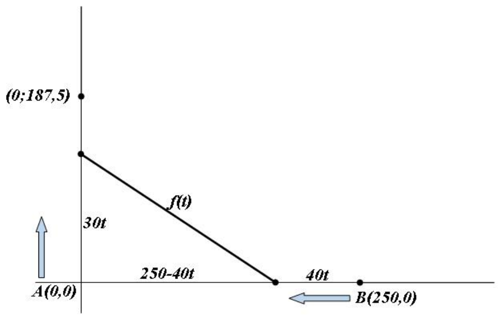
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2 puntos) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) (4 puntos) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

c) (4 puntos) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Solución:



a) $f(t)=\sqrt{(250-40t)^2+(30t)^2}=50\sqrt{t^2-8t+25}$

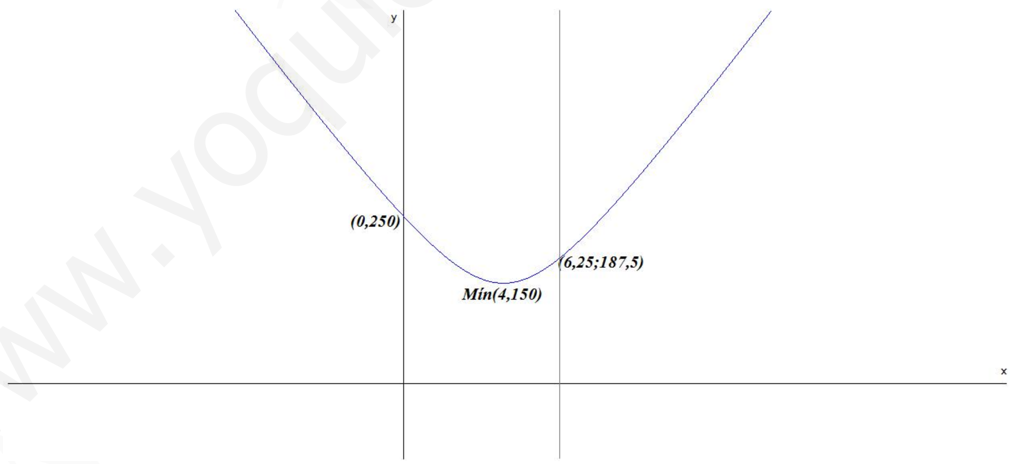
b) $T=\dfrac{e}{v}=\dfrac{250}{40}=6,25$ horas. O bien $T=\dfrac{e}{v}=\dfrac{187,5}{30}=6,25$ horas.

c) La función f estaría definida en el intervalo $[0,25/4]$, tendríamos $f(0)=250$ y $f(25/4)=187,5$.

$$f'(t)=50\frac{2t-8}{2\sqrt{t^2-8t+25}}=0\Longrightarrow 2t-8=0\Longrightarrow t=4$$

	$(0,4)$	$(4,25/4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,4)$ y creciente en el intervalo $\left(4,\frac{25}{4}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(4,150)$ y tendría el máximo en $(0,250)$ que serían las posiciones iniciales de los móviles.



3.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.20.9 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 2, \quad g(1) = 3, \quad g'(1) = 4$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1,25 puntos) Calcule la integral $\displaystyle\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 \, dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.)

Solución:

a) $h(x) = f((x+1)^2) \Longrightarrow h'(x) = 2(x+1)f'((x+1)^2) \Longrightarrow$

$$h'(0) = 2f'(1) = 4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \Longrightarrow$$

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} = \frac{2}{9}$$

b)

$$\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 \, dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{bmatrix} = \int t^4 \cos^3 x \, \frac{dt}{\cos x} =$$

$$\int t^4 \cos^2 x \, dt = \int t^4 (1 - \sin^2 x) \, dt = \int t^4 (1 - t^2) \, dt =$$

$$\int (t^4 - t^6) \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

Opción B

Problema 3.20.10 *(2,5 puntos)* Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10 - t)$

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0,5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución:

a) $F(t) = \displaystyle\int (10t^2 - t^3) \, dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$

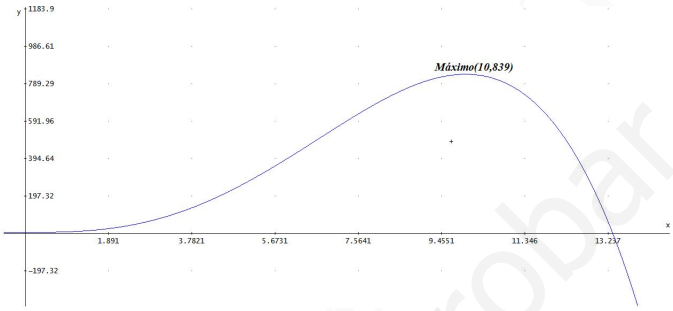
$F(0) = 6 \Longrightarrow C = 6 \Longrightarrow F(t) = \dfrac{10t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + 6$

b) $F'(t) = t^2(10-t) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 10$

.

	$(0,10)$	$(10,\infty)$
$F'(t)$	$+$	$-$
$F(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f crece en el intervalo $(0,10)$ y crece en el intervalo $(10,+\infty)$. Tendría un máximo en el punto $(10; 839, 33)$. El máximo de enfermos se encuentra en el día 10 y serán sobre 839 el número de enfermos previstos.



c) la función F es continua y además cumple: $F(13) = \frac{2269}{12}$ y $F(14) = -\frac{1354}{3}$ por el teorema de Bolzano $\exists\, c \in (13,14)/F(c) = 0$, Es decir, entre 13 y 14 días.

3.21. Año 2020

3.21.1. Modelo

Opción A

Problema 3.21.1 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\dfrac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 3e^{3x-2} \Longrightarrow m = f'(a) = 3e^{3a-2} = 3e^{-1} \Longrightarrow 3a-2 = -1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$ luego el punto de tangencia es $\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{e}\right)$ y la recta tangente tendrá por ecuación:

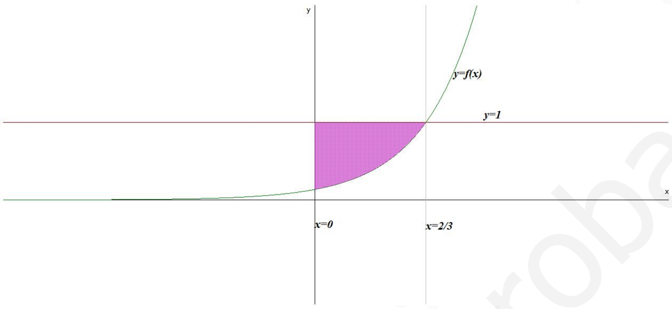
$$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e}\left(x - \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow y = \frac{3}{e}x$$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow 2/3} \dfrac{1 - e^{3x-2}}{6x - 4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 2/3} \dfrac{-3e^{3x-2}}{6} = -\dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = 1 \Longrightarrow e^{3x-2} = 1 \Longrightarrow 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ Luego el área será:

$$S_1 = \int_0^{2/3} (f(x) - 1)\, dx = \int_0^{2/3} \left(e^{3x-2} - 1\right)\, dx = \left.\frac{e^{3x-2}}{3} - x\right]_0^{2/3} =$$

$$-\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e}\right) \Longrightarrow S = |S_1| = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)\ u^2$$



Opción B

Problema 3.21.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.

b) (0,75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 x f(x)\, dx$.

Solución:

a) Calculamos la recta tangente a la función en $x = 2$:

$$a = 2,\ \ b = f(a) = f(2) = 1,\ \ f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2},\ \ m = f'(a) = f'(2) = -\frac{1}{3}$$

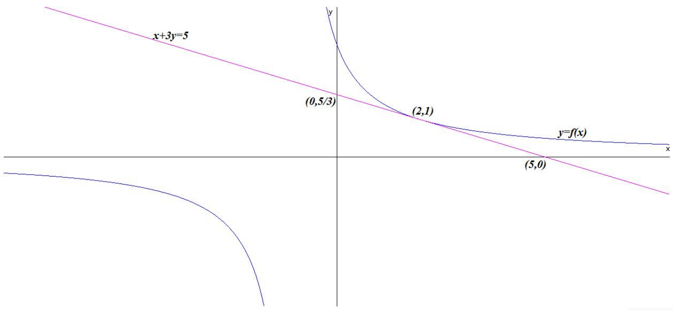
$$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Longrightarrow x + 3y = 5$$

Calculamos los puntos de corte de esta recta con los ejes:
Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 5/3)$ y con OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow (5, 0)$, luego el área de este triángulo es:

$$S_T = \frac{5 \cdot 5/3}{2} = \frac{25}{6}\ \ u^2$$

Otra forma:

$$S_T = \int_0^5 \frac{5 - x}{3}\, dx = \left.\frac{1}{3}\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^5 = \frac{25}{6}\ \ u^2$$



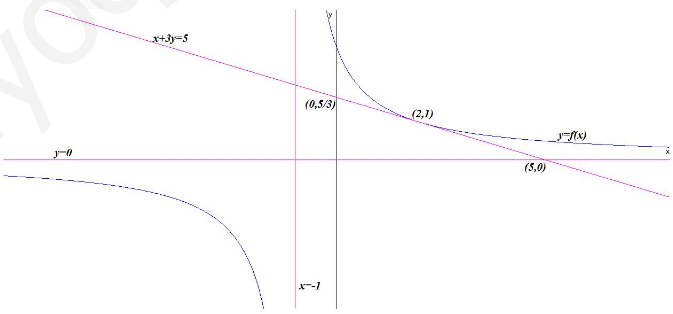
b) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$
$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{3}{x+1} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: en $y = 0$
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3}{x+1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

$f'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio de la función.



c)
$$\int_0^2 xf(x)\,dx = \int_0^2 \frac{3x}{x+1}\,dx = \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{x+1}\right)\,dx =$$
$$3x - 3\ln|x+1|\big]_0^2 = 6 - 3\ln 3$$

3.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.21.3 *(2,5 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

Solución:

a) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ función continua en el intervalo $[1, 10]$, con $h(1) = -3 < 0$ y $h(10) = 1239 > 0$. Por el teorema de Bolzano existe un número real $c \in [1, 10]$ en el que $h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c)$.

b) $m(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x \Longrightarrow m'(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ como $m''(-1) = 6 > 0 \Longrightarrow$ $x = -1$ es un mínimo. Tenemos $m(-1) = -3$ y $f(-1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = -3(x + 1) \Longrightarrow y = -3x - 2$$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x}\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x|\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{41}{6} - \ln 2\right) \simeq 1,02336.$

Opción B

Problema 3.21.4 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución:

a) La función en las ramas es continua estudiamos en el punto $x = 1$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x-1)^3 = 0$ y $f(1) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $[-4, 4]$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 0 \\ f'(1^+) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f \text{ es derivable en } [-4, 4]$$

En la rama $[-4, 1]$ tenemos $f'(x) = 2(x-1)$ es $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ en esta rama decrece la función. En la rama $(1, 4]$ tenemos $f'(x) = 3(x-1)^2$ es $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ en esta rama crece la función.

c)
$$g(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2(x-1) & \text{si} & x\le 1\\ 3(x-1)^2 & \text{si} & x>1\end{array}\right. \Longrightarrow g'(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2 & \text{si} & x\le 1\\ 6(x-1) & \text{si} & x>1\end{array}\right.$$

Continuidad de g en $x=1$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} 2(x-1)=0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} 3(x-1)^2=0$ y $g(1)=0\Longrightarrow g$ es continua en $[-4,4]$.
Derivabilidad de g en $x=1$: Tenemos $g'(1^-)=2\neq g'(1^+)=0\Longrightarrow g$ no es derivable en $x=1$.

3.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.21.5 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{2}-\sin x+x\cos x$, se pide:

a) (1,25 puntos) Estudiar su crecimiento en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Justificar, usando el teorema adecuado, que la función se anula en algún punto de ese intervalo. Justificar razonadamente que ese punto es único.

b) (1,25 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Solución:

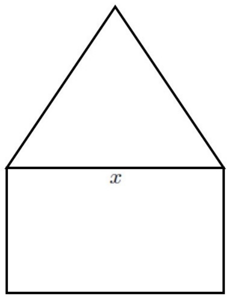
a) $f'(x)=-\cos x+\cos x-x\sin x=-x\sin x$. En el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ es $f'(x)<0\Longrightarrow f$ es decreciente en todo este intervalo.
Por otra parte f es continua y cumple que $f(0)=\dfrac{1}{2}>0$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Por el teorema de Bolzano $\exists c\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c)=0$. Como además la función es decreciente en todo el intervalo este punto es único.

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\sin x+x\cos x\right)dx=\frac{x}{2}+\cos x+\cos x+x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$\frac{x}{2}+2\cos x+x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi-8}{4}\simeq 0,3562$$
Nota: $$\int x\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=\cos x\,dx\Longrightarrow v=\sin x\end{array}\right]=$$
$$x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x.$$

Opción B

Problema 3.21.6 *(2,5 puntos)* Disponemos de 10 metros de una barra metálica.

Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida.



Se pide:

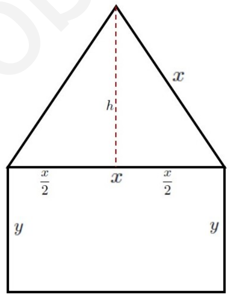
a) (0,5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.

b) (2 puntos) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.

Solución:

a) $h(x) = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

b) $10 = 4x + 2y \Longrightarrow y = 5 - 2x$



$S(x) = S_t(x) + S_r(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} + x(5 - 2x)$
$S(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3} - 8}{4}\right) x^2 + 5x$
$S'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{3} - 8}{2}\right) x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 1,595$ m
$S''(x) = \dfrac{\sqrt{3} - 8}{2} = -3,13 < 0 \Longrightarrow x = 1,595$ es un máximo relativo.
$x = 1,595$ m e $y = 5 - 2x = 1,809$ m

3.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.21.7 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x < 1, \ x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0,75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

Solución:
.

a) Si $x < 1$ y $x \neq -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} \Longrightarrow f(0) = 1$ y $(f \circ f)(x) = f(f(0)) = f(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Luego la función es continua en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < 1,\ x \neq -1 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{4x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -\frac{1}{4},\ f'(1^+) = 0 \Longrightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow$$

f no es derivable en $x = 1$.
La función es continua en $x = 1$ y en ese punto la función pasa de decrecer a crecer, luego hay un mínimo local en ese punto.

c) Asíntotas:
En la rama $x < 1$:

- Verticales: la única posible es en $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: en $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x \geq 1$:

- Verticales: No hay.
- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x} = +\infty$$

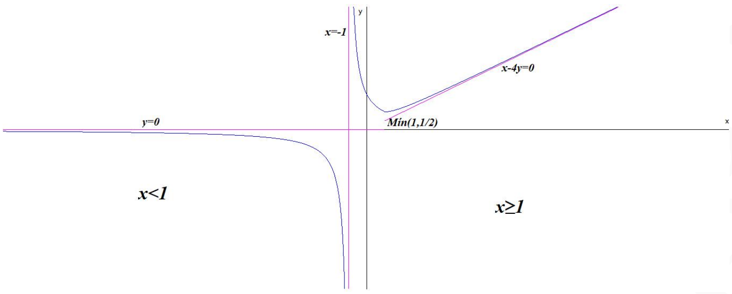
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{x}{4}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0$$

$$y = \frac{1}{4}x \Longrightarrow x - 4y = 0$$

.



Opción B

Problema 3.21.8 *(2,5 puntos)* La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0,5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0,75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1,25 puntos) La energáa total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución:

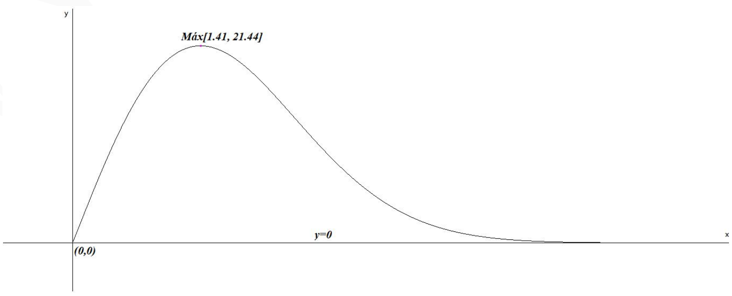
a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}} = 0$
La batería se agota con el tiempo.

b) $P'(t) = \dfrac{25}{2}(2-t^2)e^{-t^2/4} = 0 \Longrightarrow (2-t^2) = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{2}$. La solución negativa no es relevante.

	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x = \sqrt{2}$ es un máximo local.

El máximo se produce a las $\sqrt{2}$ unidades de tiempo con $P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{\dfrac{2}{e}}$ unidades de potencia.



c) $E'(t) = P(t) \Longrightarrow E(t) = \int \left(25te^{-t^2/4}\right) dt = -50e^{-t^2/4} + C$
$E(0) = 0 \Longrightarrow -50 + C = 0 \Longrightarrow C = 50 \Longrightarrow E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$

La función $P(t)$ no corta el eje de abscisas en el intervalo $(0,2)$ luego $\int_0^2 \left(25te^{-t^2/4}\right) dt = E(2) - E(0) = \dfrac{50(e-1)}{e} \simeq 31,61\ u^2$

3.22. Año 2021

3.22.1. Modelo

Opción A

Problema 3.22.1 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x \le 1,\ \ x \ne -1 \\ \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \qquad\qquad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f en $x = 1$.

b) (1 punto) Halle las asíntotas de f, si existen.

c) (1 punto) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\dfrac{1}{2}$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{2}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{1/x}{1} = 1$ y $f(1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Asíntotas:
En la rama $x \le 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

- Verticales:
En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

- ☛ Verticales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- ☛ Horizontales: $y = 0$.

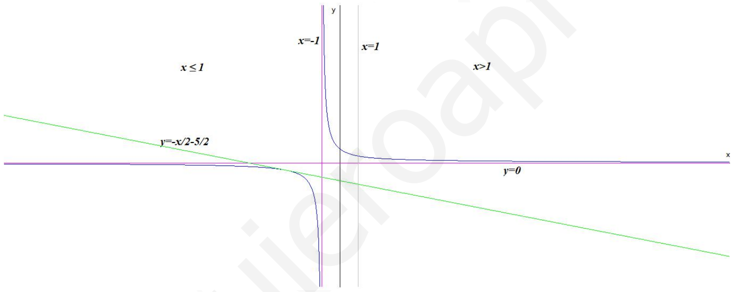
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \le 1, \;\; x \neq -1 \\ \\ -\dfrac{x\ln x - x + 1}{x(x-1)^2} & \text{si} \qquad\qquad x > 1 \end{cases}$.

Como $x_0 < 1 \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} \Longrightarrow f'(x_0) = -\dfrac{2}{(x_0+1)^2} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$
$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \Longrightarrow x_0 = -3$ y $x_0 = 1$, esta última no es válida ya que $x_0 < 1$.
En $x_0 = -3 \Longrightarrow f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1 \Longrightarrow (-3, -1)$ es el punto de tangencia. Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x+3) \Longrightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$



Opción B

Problema 3.22.2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.

c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f.

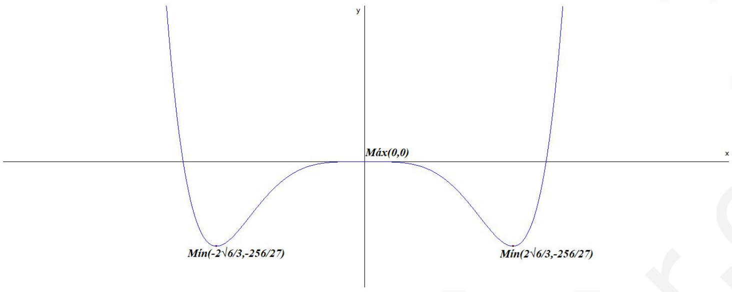
Solución:

a) $f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 8) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

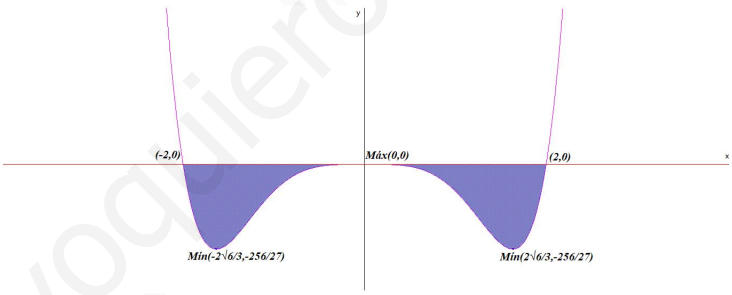
b) Tiene un mínimos relativos en los puntos de abscisa $x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ y un máximo en el punto de abscisa $x = 0$.
Tenemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y tenemos que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} = \infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} = \infty$, luego el máximo es relativo. Por el contrario, los mínimos si son relativos.



c) $f(x) = x^6 - 4x^4 = x^4(x^2-4) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. Tenemos dos recintos $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 2]$ y como la función es par estas dos áreas son iguales.

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^6 - 4x^4)\, dx = \left.\frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = -\frac{2^8}{35}$$

$$S = 2|S_1| = \frac{2^9}{35} = \frac{512}{35}\ u^2$$



3.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.22.3 *(2,5 puntos)* Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

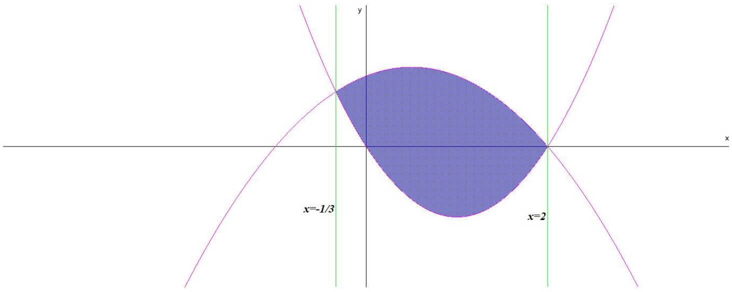
$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \Longrightarrow -3x^2 + 5x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{3}, \quad x = 2$$

$$S_1 = \int_{-1/3}^{2} \left[2 + x - x^2 - (2x^2 - 4x)\right] dx = \int_{-1/3}^{2} (-3x^2 + 5x + 2)\, dx =$$

$$-x^3+\frac{5x^2}{2}+2x\Big]_{-1/3}^{2}=\frac{343}{54}\Longrightarrow S=|S_1|=\frac{343}{54}\;u^2$$



Opción B

Problema 3.22.4 *(2,5 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\sin x & \text{si} & x<0\\ xe^x & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi,2)$ Demuestre que existe un punto $x_0\in[0,1]$ de manera que $f(x_0)=2$.

c) (0,75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a) ☛ **Continuidad en $x=0$:**

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\longrightarrow 0^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\sin x=0\\ \lim_{x\longrightarrow 0^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}xe^x=0\\ f(0)=0\end{array}\right.\Longrightarrow f\ \text{continua en}\ x=0$$

☛ **Derivabilidad en $x=0$:**

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}\cos x & \text{si} & x<0\\ e^x(x+1) & \text{si} & x\ge 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(0^-)=1\\ f'(0^+)=1\end{array}\right.\Longrightarrow f\ \text{derivable en}\ x=0$$

b) ☛ $\cos x=0\Longrightarrow x=-\frac{\pi}{2}$ en el intervalo $(-\pi,0)$.
$e^x(x+1)=0\Longrightarrow x=-1\notin[0,2]$ Luego:

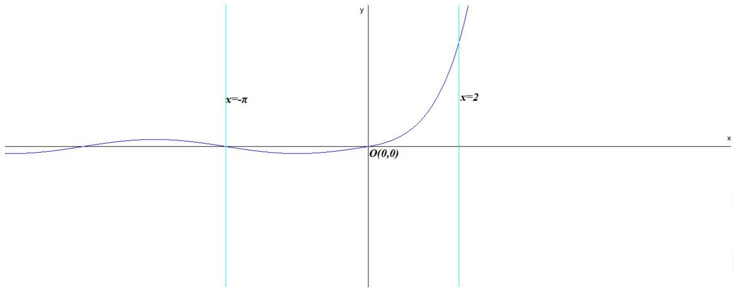
	$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$	$(0,2)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{\pi}{2},2\right)$, con un mínimo relativo en $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$.

☛ En el intervalo $[0,1]$ es $f(x)=xe^x$. Sea la función $g(x)=xe^x-2$ en este intervalo y tenemos:
$g(0)=-2<0$ y $g(1)=e-2>0$, como g es continua en el intervalo podemos aplicar el teorema de Bolzano que nos afirma que $\exists x_0\in(0,1)$ tal que $g(x_0)=0\Longrightarrow x_0e^{x_0}-2=0\Longrightarrow x_0e^{x_0}=2\Longrightarrow f(x_0)=2$.

c) $\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx = -\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + e^x(x-1)]_0^1 = -1+1 = 0$



3.22.3. Ordinaria-Coincidente

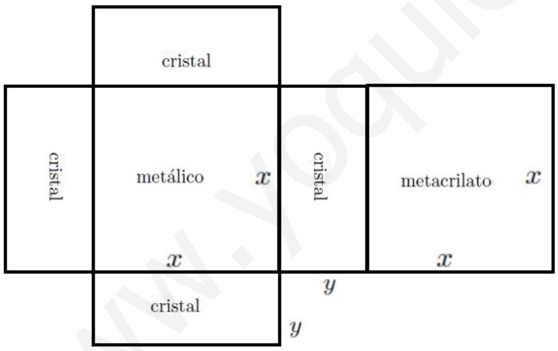
Opción A

Problema 3.22.5 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadradas. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m^2, el material metálico, de 90 euros/m^2, y el cristal, de 25 euros/m^2.

a) (0,75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.

b) (1,75 puntos) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

Solución:



a) $C = 15x^2 + 90x^2 + 4\cdot 25xy = 105x^2 + 100xy \Longrightarrow y = \frac{C-105x^2}{100x}$

b) $V(x,y) = x^2y \Longrightarrow V(x) = x^2\frac{1260-105x^2}{100x} = \frac{1260x-105x^3}{100}$

$V'(x) = -\frac{63(x^2-4)}{20} = 0 \Longrightarrow x = 2$ (el valor $x=-2$ no es relevante)

$V''(x) = -\frac{63x}{10} \Longrightarrow V''(2) = -\frac{126}{10} < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo.

Luego las dimensiones de los cuadrados son de 2 m de lado y las caras verticales serían de 2 m por $y = \frac{1260-105\cdot 4}{100\cdot 2} = \frac{21}{5}$ m.

El volumen máximo es $V(2) = \frac{1260\cdot 2-105\cdot 2^3}{100} = \frac{84}{5} \simeq 16,8$ m^3.

Opción B

Problema 3.22.6 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $[-2, 4]$.

b) (1,25 puntos) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de f en $[-2, 4]$.

c) (0,75 puntos) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ es continua en $x = 2$ y si tiene recta tangente en dicho punto.

Solución:

a) La función es siempre positiva y su dominio es toda la recta real. Se trata de un polinomio y, la raíz que lo contiene es impar, luego es continua en todo el dominio. El único punto a estudiar sería en $x = 2$:
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $[-2, 4]$
La función es derivable en todos los puntos salvo en $x = 2$ donde lo estudiaremos:

$$f'(x) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-2)^3}} \Longrightarrow f'(2^+) = \infty \quad f'(2^-) = -\infty$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$ en nuestro caso la función es derivable en $[-2, 2) \cup (2, 4]$.

b) $f'(x) < 0$ en el intervalo $[-2, 2)$ y, por tanto, decreciente. $f'(x) > 0$ en el intervalo $(2, 4]$ y, por tanto, creciente. No tiene máximos relativos.
Comprobamos los valores de la función en $x = -2 \Longrightarrow f(-2) = \sqrt[5]{16}$ y en $x = 4 \Longrightarrow f(4) = \sqrt[5]{4}$, luego hay un máximo absoluto en $\left(-2, \sqrt[5]{16}\right)$ y un mínimo relativo y absoluto en $(2, 0)$.

c) La función no es derivable en $x = 2 \Longrightarrow$ no existe recta tangente a f en $x = 2$.

3.22.4. Extrordinaria

Opción A

Problema 3.22.7 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1 (0,5 puntos) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$

a.2 (0,75 puntos) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación:** use el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ donde sea necesario).

b) (1,25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1 (0,5 puntos) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

b.2 (0,75 puntos) $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

Solución:

a) a.1 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim_{x\to 0} \frac{2-12x}{-4+\sin x} = -\frac{1}{2}$

a.2 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right) = \left[\begin{array}{c} t=\frac{1}{x} \\ x\to\infty \Longrightarrow t\to 0 \end{array}\right] = \lim_{t\to 0} t\left(3t-\frac{2}{\sin t}\right) = \lim_{t\to 0} t\left(\frac{3t\sin t-2}{\sin t}\right) =$
$\lim_{t\to 0} \frac{3t^2\sin t-2t}{\sin t} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim_{t\to 0} \frac{6t\sin t+3t^2\cos t-2}{\cos t} = -2$

b) b.1 $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=x^2-1 \\ dt=2xdx \\ dx=\frac{dt}{2x} \end{array}\right] = \int \frac{x}{t}\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt =$
$\frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$

b.2 $\int x^2e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x^2 \Longrightarrow du=2xdx \\ dv=e^{-x}dx \Longrightarrow v=-e^{-x} \\ \int udv = uv-\int vdu \end{array}\right] =$
$-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \Longrightarrow v=-e^{-x} \\ \int udv = uv-\int vdu \end{array}\right] =$
$-x^2e^{-x}+2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx\right] = -x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right) = -e^{-x}(x^2+2x+2)$

$$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2)\Big]_0^1 = 2-\frac{5}{e} \simeq 0,161$$

Opción B

Problema 3.22.8 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = x^3-|x|+2$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0,75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y=0$, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^3+x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^3-x+2 & \text{si} & x\geq 0 \end{array}\right.$$

a) ☛ **Continuidad en $x=0$:**

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-}(x^3+x+2) = 2 \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+}(x^3-x+2) = 2 \\ f(0)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x=0$$

Luego f es continua en $\mathbb{R}$

☛ **Derivabilidad en $x=0$:**

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3x^2+1 & \text{si} & x<0 \\ 3x^2-1 & \text{si} & x>0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f \text{ no es derivable en } x=0$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

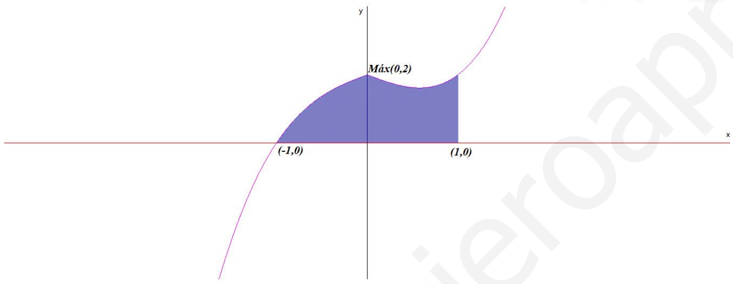
b) En la rama $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ no hay extremos en la rama y la función es siempre creciente. En el intervalo $(-\infty, 0)$.
En la rama $x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ la solución negativa no es válida por estar fuera de la rama. Para saber qué tipo de extremo es recurrimos a la segunda derivada: $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ es un mínimo relativo.
En $x = 0$ la función pasa de crecer a decrecer y además es continua, por lo que en $x = 0$ hay un máximo relativo.

c) Hay dos recintos de integración $[-1, 0]$ y $[0, 1]$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 + x + 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{4}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x + 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} = \frac{7}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3\ u^2$$



3.23. Año 2022

3.23.1. Modelo

Opción A

Problema 3.23.1 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ xe^{4-x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

c) (0,75 punto) Calcule $\int_0^2 f(x)\, dx$

Solución:

a) ☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 0^-} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} 1 - \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 0 \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} xe^{4-x^2} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0$.

☛ Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} & \text{si} & x < 0 \\ & & \\ (1-2x^2)e^{4-x^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{2x} =$
$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + x\cos x}{2} = 0$
$f'(0^+) = e^4 \Longrightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$

b) En la rama $(0, \infty) \Longrightarrow f(x) = xe^{4-x^2} \Longrightarrow f'(x) = (1-2x^2)e^{4-x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Tiene un máximo relativo en los puntos de abscisa $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $F(x) = \int f(x)\,dx = \int xe^{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array} \right] = \int xe^t \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{e^t}{2} + C =$
$-\frac{e^{4-x^2}}{2} + C$
$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = -\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} = \frac{e^4 - 1}{2} \simeq 26,8$

Opción B

Problema 3.23.2 *(2,5 puntos)* Sea $f(x) = x + x^2$, se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.

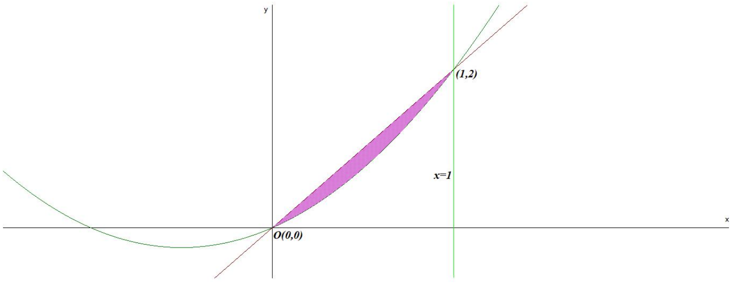
b) (1,5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

Solución:

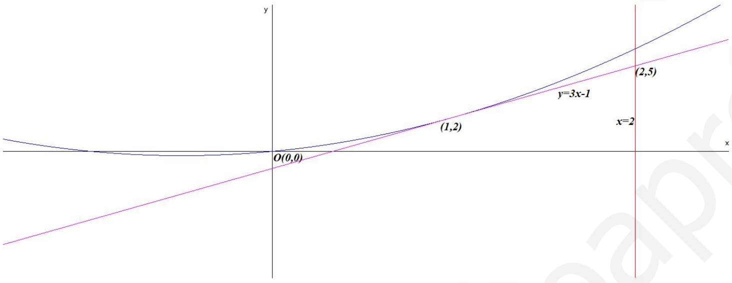
a) Buscamos los puntos de corte entre las dos gráficas: $f(x) = g(x) \Longrightarrow x + x^2 = 2x \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$
Tenemos $S = \left|\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx\right|$

$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 (x + x^2 - 2x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{6} = 0,1667\ u^2$$



b) $a = 1 \Longrightarrow b = f(a) = f(1) = 2$
$f'(x) = 1 + 2x \Longrightarrow m = f'(a) = f'(1) = 3$
La recta tangente $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Longrightarrow y = 3x - 1$
El punto de corte con $x = 2 \Longrightarrow y = 5 \Longrightarrow (2, 5)$



Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Año 2017

4.1.1. Modelo

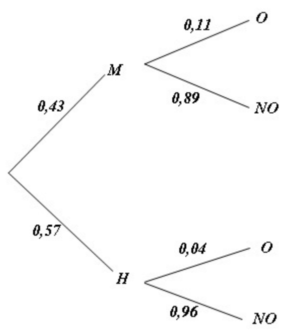
Opción A

Problema 4.1.1 *(2 puntos)* En una población de cierta especie de cérvidos, el 43 % de los adultos son machos y el 57 % hembras. Se sabe que el 11 % de los machos adultos y el 4 % de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.

b) (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?

Solución:



a) $P(O) = P(M)P(O|M) + P(H)P(O|H) = 0,11 \cdot 0,43 + 0,04 \cdot 0,57 = 0,0701$

b) $P(M|O) = \dfrac{P(O|M)P(M)}{P(O)} = \dfrac{0,11 \cdot 0,43}{0,0701} = 0,6748$

4.1.2. Ordinaria

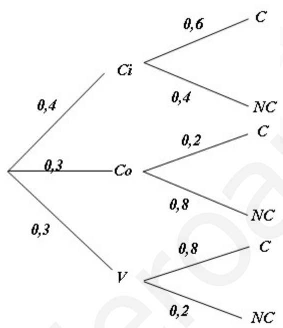
Opción B

Problema 4.1.2 *(2 puntos)* El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) (1 punto). Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto). Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Solución:



a) $P(NC) = P(Ci)P(NC|Ci) + P(Co)P(NC|Co) + P(V)P(NC|V) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,46$

b) $P(Ci|C) = \dfrac{P(C|Ci)P(Ci)}{P(C)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,4}{1 - 0,46} = 0,44$

4.1.3. Ordinaria-Coincidente

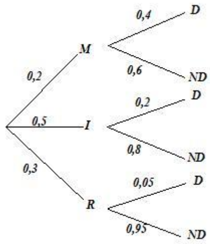
Opción B

Problema 4.1.3 *(2 puntos)* En una empresa el 20 % de los empleados son matemáticos, el 50 % ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40 % ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5 %. Elegido un empleado al azar, se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) (1 punto) Si no ocupa un cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

Solución:



a) $P(D) = P(M)P(D|M)+P(I)P(D|I)+P(R)P(D|R) = 0,4\cdot 0,2+0,2\cdot 0,5+0,05\cdot 0,3 = 0,195$

b) $P(M|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|M)P(M)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,6\cdot 0,2}{1-0,195} = 0,149$

4.1.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.1.4 *(2 puntos)* Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \dfrac{4}{9}$, $p(B) = \dfrac{1}{2}$ y $p(A\cup B) = \dfrac{2}{3}$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) (1 punto) Calcular $p(\overline{A}|B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

Solución:

$$P(A) = \frac{4}{9}\quad P(B) = \frac{1}{2}\quad P(A\cup B) = \frac{2}{3}$$

a) $P(A)\cdot P(B) = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$

$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = \dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{18}$

Luego $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B) \Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

b) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{9}$

4.1.5. Extraordinaria-Coincidente

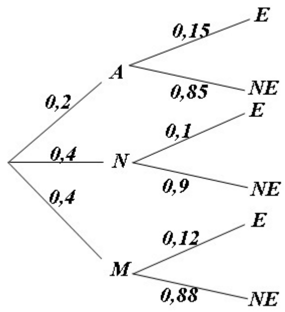
Opción A

Problema 4.1.5 *(2 puntos)* Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N y M. El 20 % de los móviles fabricados son de la marca A y el 40 % de la marca N. Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software espía se instala en el 15 % de los móviles de la marca A, en un 10 % de la marca N y en un 12 % de los móviles de la marca M. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) (1 punto) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

Solución:



a) $P(E) = P(A)P(E|A)+P(N)P(E|N)+P(M)P(E|M) = 0,0,2\cdot 0,0,15+0,4\cdot 0,1+0,4\cdot 0,12 = 0,118$

b) $P(A|E) = \dfrac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \dfrac{0,15\cdot 0,2}{0,118} = 0,254$

4.2. Año 2018

4.2.1. Modelo

Opción B

Problema 4.2.1 *(2,5 puntos)* En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.

b) (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.

c) (1 punto) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

Solución:
Sale fresa: F, sale menta: M y sale limón: L

a) $P(2^{\circ}\text{ de fresa}) = P(FF)+P(MF)+P(LF) = \dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{9}{29}+\dfrac{15}{30}\cdot\dfrac{10}{29}+\dfrac{5}{30}\cdot\dfrac{10}{29} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(FF) = \dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{9}{29} = \dfrac{3}{29}$

c) $P(\text{primero fresa}|\text{segundo fresa}) = \dfrac{P(\text{primero fresa}\cap\text{segundo fresa})}{P(\text{segundo fresa})} = \dfrac{10/30\cdot 9/29}{1/3} = \dfrac{9}{29}$

4.2.2. Ordinaria

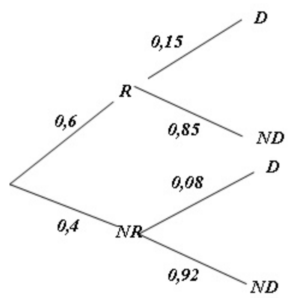
Opción A

Problema 4.2.2 *(2,5 puntos)* El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución:



a) $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|NR)P(NR) = 0,15 \cdot 0,6 + 0,08 \cdot 0,4 = 0,122 \Longrightarrow 12,20\,\%$

b) $P(R|D) = \dfrac{P(D|R)P(R)}{P(D)} = \dfrac{0,15 \cdot 0,6}{0,122} = 0,7377 \Longrightarrow 73,77\,\%$

4.2.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.2.3 *(2,5 puntos)* La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las películas de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de esos géneros cinematográficos. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

a) (0,25 puntos) No le gusten las películas de acción.

b) (0,75 puntos) Le guste al menos uno de los dos géneros mencionados.

c) (0,75 puntos) Le guste el cine de acción y el de suspense.

d) (0,75 puntos) Le gusten las películas de acción, pero no las de suspense.

Solución:
A : le gusta las de acción y S : le gusta las de suspense. $P(A) = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2} = 0,5$, $P(S) = \dfrac{135}{300} = \dfrac{9}{20} = 0,45$ y $P(\overline{A} \cap \overline{S}) = \dfrac{75}{300} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$

b) $P(A \cup S) = 1 - P(\overline{A \cup S}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75.$

c) $P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{20} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{5} = 0,2.$

d) $P(A \cap \overline{S}) = P(A) - P(A \cap S) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

Opción B

Problema 4.2.4 *(2,5 puntos)* Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, cuyas probabilidades son $P(A) = 0,6$ y $P(B) = 0,2$. Calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A \cup B), \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap B), \quad P(\overline{A}|B)$$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Solución:

Tenemos $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,2$ y por ser A y B independientes $P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,2 - 0,12 = 0,68$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,12 = 0,88$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,68 = 0,32$
- $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,12 = 0,08$
- $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,08}{0,2} = 0,4$

4.2.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.2.5 *(2,5 puntos)* Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

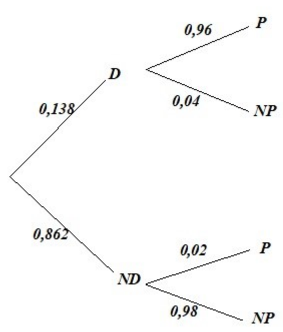
b) (1,5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

Solución:

$P(D) = 0,138$ y $P(\overline{S}) = 0,43$

a) $P(D \cap S) = 0,138 \cdot (1 - 0,43) = 0,07866$
$P(\overline{D} \cup \overline{S}) = P(\overline{D \cap S}) = 1 - P(D \cap S) = 1 - 0,07866 = 0,92134$

b) Tenemos:



$$P(D|P)=\frac{P(P|D)P(D)}{P(P)}=\frac{0,96\cdot 0,138}{P(P|D)P(D)+P(P|ND)P(ND)}=$$
$$\frac{0,13248}{0,13248+0,02\cdot 0,862}=0,88485$$

4.3. Año 2019

4.3.1. Modelo

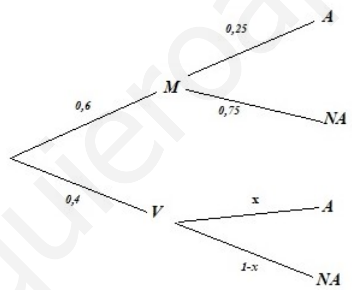
Opción B

Problema 4.3.1 *(2,5 puntos)* El grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de una escuela de idiomas, está compuesto por un 60 % de mujeres y el resto varones. Se sabe que el 30 % del grupo estudia alemán y que la cuarta parte de las mujeres estudia alemán. Se recibe un mensaje en el grupo. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que el o la remitente estudia alemán.

b) (1,25 puntos) Si en el mensaje no hay ninguna información sobre el sexo y estudios del remitente, calcular la probabilidad de que sea varón y estudie alemán.

Solución:



a) $P(M|A)=\frac{P(A|M)P(M)}{P(A)}=\frac{0,25\cdot 0,6}{0,3}=0,5$

b) $P(A)=0,6\cdot 0,25+0,4\cdot x=0,3\Longrightarrow x=P(A|V)=0,375$

$$P(A\cap V)=P(A|V)P(V)=0,375\cdot 0,4=0,15$$

4.3.2. Ordinaria

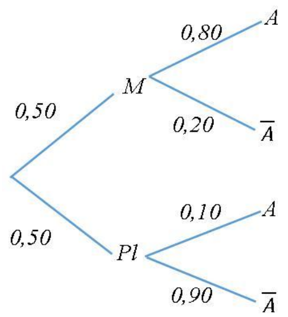
Opción B

Problema 4.3.2 *(2,5 puntos)* Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1,5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:



a) $P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|Pl)P(Pl) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,45$

b) $P(M|A) = \dfrac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = 0,889$

4.3.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

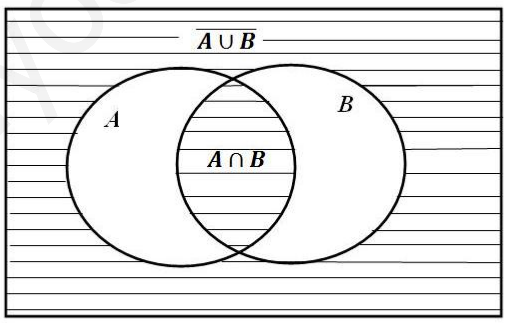
Problema 4.3.3 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos aleatorios A y B, con probabilidades respectivas $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$, se denota por $\overline{A}$ y $\overline{B}$ a los sucesos complementarios de A y B. Se pide:

a) (1 punto) Suponiendo que A y B son independientes, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

b) (1 punto) Suponiendo que A y B son incompatibles, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

c) (0,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 0,9$, ¿son A y B independientes?

Solución:
$P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B}))$



a) Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$:

$$P((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})) = P((A\cap B)\cup(\overline{A \cup B})) = P(A\cap B)+P(\overline{A \cup B})-P((A\cap B)\cap(\overline{A \cup B})) = P(A\cap B)+P(\overline{A \cup B}) = P(A\cap B)+1-P(A\cup B) = P(A\cap B)+1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) = 1+2P(A\cap B)-P(A)-P(B) = 1+2P(A)P(B)-P(A)-P(B) = 1+0,4-0,4-0,5 = 0,5$$

b) Si A y B son incompatibles $P(A\cap B)=0$:

$P((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))=P((A\cap B)\cup(\overline{A\cup B}))=P(A\cap B)+P(\overline{A\cup B})-P((A\cap B)\cap(\overline{A\cap B}))=0+P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)=1-0,4-0,5=0,1$

c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow 0,9=0,4+0,5-P(A\cap B)\Longrightarrow P(A\cap B)=0\Longrightarrow A$ y B son incompatibles. Por otra parte $P(A\cap B)=0\neq P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot 0,5=0,2\Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.3.4. Extraordinaria

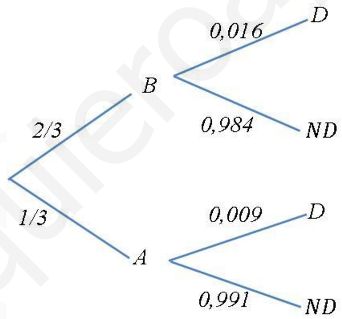
Opción B

Problema 4.3.4 *(2,5 puntos)* Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6 %, mientras que para los de alta gama es del 0,9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1,5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución:



a) $P(D)=P(D|B)P(B)+P(D|A)P(A)=0,016\cdot\frac{2}{3}+0,009\cdot\frac{1}{3}=0,0137\Longrightarrow 1,37\,\%$

b) $P(B|D)=\dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)}=\dfrac{0,016\cdot\frac{2}{3}}{0,0137}=0,78\Longrightarrow 78\,\%$

4.4. Año 2020

4.4.1. Modelo

Opción A

Problema 4.4.1 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)=0,55$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0,90$ y $P(B|A)=0,25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B|\overline{A})$.

b) (0,5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

Solución:

a) $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 0,90 \Longrightarrow P(A\cap B) = 1 - 0,90 = 0,10$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B|A)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,4$$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A\cup B) + P(A\cap B) - P(A) = 0,55 + 0,10 - 0,40 = 0,25$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,25 - 0,10}{1 - 0,4} = 0,25$$

b) A y B son independientes si se cumple $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$:

$$P(A)\cdot P(B) = 0,40\cdot 0,25 = 0,10 \text{ y } P(A\cap B) = 0,10 \Longrightarrow$$

Los sucesos A y B son independientes.

4.4.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.4.2 *(2,5 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A\cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A\cup B$?

b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{B}|A)$

Solución:

a) $P((A\cup B)\cap C) = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(\phi) = 0 \Longrightarrow A\cup B$ y C son incompatibles.

b) $P(A)\cdot P(B) = 0,5\cdot 0,25 = 0,125 = P(A\cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) = 1 - (0,5 + 0,25 - 0,125) = 0,375$

d) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,5 - 0,125}{0,5} = 0,75$

4.4.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.4.3 *(2,5 puntos)* De una bolsa con 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sea múltiplo de 2.

d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido.

Solución:
A : múltiplo de 3 (3,6,9,12,15,18), B : múltiplo de 6 (6,12,18),
C : múltiplo de 2 (2,4,6,8,10,12,14,16,18,20) y D : impar (1,3,5,7,9,11,13,15,17,19)

a) $P(AA) = \dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{38}$

b) $P(BA) = \dfrac{3}{20} \cdot \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{76}$

c) $P(\overline{CC}) = P(DD) = \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{9}{19} = \dfrac{9}{38}$

d) $P(D2|D1) = \dfrac{9}{19}$

4.4.4. Extraordinaria

Opción A

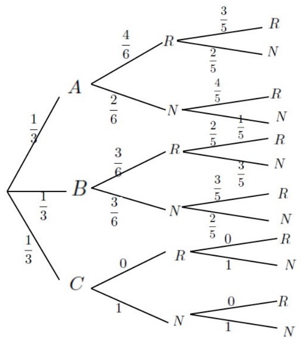
Problema 4.4.4 *(2,5 puntos)* Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

c) (0,5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Solución:
Tenemos $A : \left\{ \begin{array}{l} 4R \\ 2N \end{array} \right.$, $B : \left\{ \begin{array}{l} 3R \\ 3N \end{array} \right.$ y $C : \left\{ \begin{array}{l} 0R \\ 6N \end{array} \right.$.



a) $P(R \text{ primera}) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{1}{3} + 0\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{18} = 0,389$

b) $P(RN) = P(RN|A)\cdot P(A) + P(RN|B)\cdot P(B) + P(RN|C)\cdot P(C) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3}\cdot 0\cdot 1 = \dfrac{17}{90} = 0,189.$

c) $P(N2|R1) = \dfrac{P(N2|R1)}{P(R1)} = \dfrac{17/90}{7/18} = \dfrac{17}{35} = 0,486$

4.5. Año 2021

4.5.1. Modelo

Opción B

Problema 4.5.1 *(2,5 puntos)* Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) (0,5 puntos) Que la prueba dé resultado positivo.

b) (0,75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.

c) (0,75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.

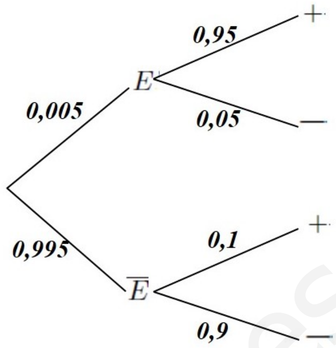
d) (0,5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

Solución:

E: enfermo, $\overline{E}$: no enfermo, $+$: positivo y $-$: negativo.

$P(-|E) = 0,05$, $P(+|\overline{E}) = 0,10$ y $P(E) = \dfrac{50}{10000} = 0,005$

a) $P(+) = P(+|E)P(E)+P(+|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,95\cdot 0,005+0,10\cdot 0,995 = 0,10425$



b) $P(E|+) = \dfrac{P(+|E)P(E)}{P(+)} = \dfrac{0,95\cdot 0,005}{0,10425} = 0,0456$

c) $P(\overline{E}|-) = \dfrac{P(-|\overline{E})P(\overline{E})}{P(-)} = \dfrac{0,90\cdot 0,995}{1-0,10425} = 0,9997$

d) $P(\text{erronea}) = P(E\cap -)+P(\overline{E}\cap +) = P(-|E)P(E)+P(+|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,05\cdot 0,005+0,10\cdot 0,995 = 0,09975$

4.5.2. Ordinaria

Opción B

Problema 4.5.2 *(2,5 puntos)* Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

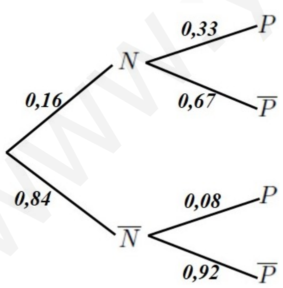
a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:
N: supera los niveles de NO_2 y P: supera los niveles partículas.



a) $P(N\cap P) = P(N)P(P|N) = 0,16\cdot 0,33 = 0,0528$

b) $P(P) = P(P|N)P(N) + P(P|\overline{N})P(\overline{N}) = 0,33\cdot 0,16 + 0,08\cdot 0,84 = 0,12$
$P(N\cup P) = P(N) + P(P) - P(N\cap P) = 0,16 + 0,12 - 0,0528 = 0,2272$

c) $P(N)\cdot P(P) = 0,16\cdot 0,12 = 0,0192 \neq P(N\cap P) \Longrightarrow N$ y P no son independientes.

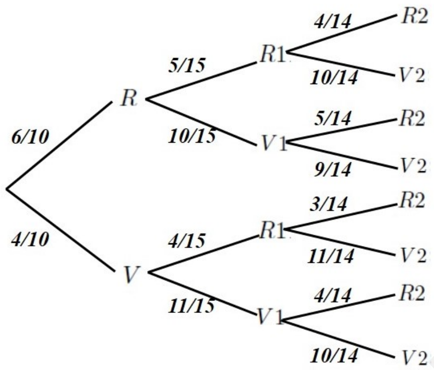
d) $P(N|\overline{P}) = \dfrac{P(\overline{P}|N)P(N)}{P(\overline{P})} = \dfrac{0,67\cdot 0,16}{1-0,12} = 0,122$

4.5.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.5.3 *(2,5 puntos)* En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.

Solución:
R sale rojo en el cajón 1, V sale verde en el cajón 1, $R1$ sale primero rojo en el cajón 2, $V1$ sale primero verde en el cajón 2, $R2$ sale segundo rojo en el cajón 2 y $V2$ sale segundo verde en el cajón 2



$$P(\text{mismo color}) = P(\text{dos rojas}) + P(\text{dos verdes}) =$$

$$P(R\cap R1\cap R2) + P(V\cap R1\cap R2) + P(R\cap V1\cap V2) + P(V\cap V1\cap V2) =$$

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14} + \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14} + \frac{6}{10}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14} + \frac{4}{10}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{10}{14} = \frac{41}{75} \simeq 0,5467$$

4.5.4. Extrordinaria

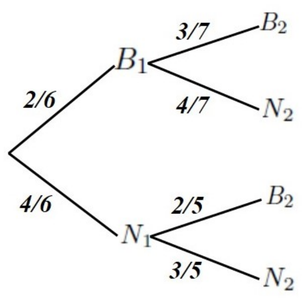
Opción A

Problema 4.5.4 *(2,5 puntos)* En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Solución:
B_1: sale blanca en la primera extracción, N_1: sale negra en la primera extracción, B_2: sale blanca en la segunda extracción y N_2: sale negra en la segunda extracción.



a) $P(\text{distinto color}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(N_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{16}{35}=0,457$

b) $P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{43}{105}$
$P(N_1|B_2) = \frac{P(B_2|N_1)P(N_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{43}{105}} = \frac{28}{43} = 0,651$

4.6. Año 2021

4.6.1. Modelo

Opción A

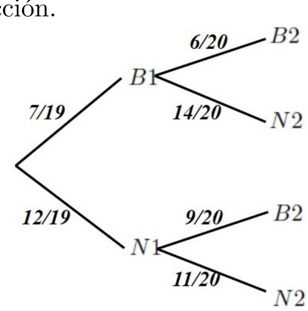
Problema 4.6.1 *(2,5 puntos)* Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

Solución:
Sean $B1$ sale blanca en la primera extracción, $B2$ sale blanca en la segunda extracción, $N1$ sale negra en la primera extracción y $N2$ sale negra en la segunda extracción.



a) $P(B2) = P(B2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) =$
$\frac{6}{20}\cdot\frac{7}{19}+\frac{9}{20}\cdot\frac{12}{19}=\frac{15}{38}\simeq 0,3947$

b) $P(\text{distinto color primera y segunda}) =$
$P(N2|B1)P(B1) + P(B2|N1)P(N1) =$
$\frac{14}{20}\cdot\frac{7}{19}+\frac{9}{20}\cdot\frac{12}{19}=\frac{103}{190}\simeq 0,5421$

c) $P(N1|B2) = \frac{P(B2|N1)P(N1)}{P(B2)} = \frac{\frac{9}{20}\cdot\frac{12}{19}}{\frac{15}{38}} = \frac{18}{25} \simeq 0,72$

Opción A

Problema 4.6.2 *(2,5 puntos)* Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0,2 y 0,3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0,5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0,5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0,75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0,75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

Solución:

Tenemos $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ y los sucesos A y B son independientes, es decir, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$
$= 1 - (0,2 + 0,3 - 0,06) = 0,56$

c) $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,12 = 0,38$

d) $n = 10$, $p = 0,2$ y $q = 1 - p = 0,8 \Longrightarrow B(10; 0,2)$

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a \cdot q^{n-a}$$

$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^7 = 0,201326592$

Capítulo 5

Estadística

5.1. Año 2018

5.1.1. Modelo

Opción A

Problema 5.1.1 *(2,5 puntos)* Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide:

a) (1 punto) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.

b) (0,5 puntos) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.

c) (1 punto) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

Solución:
$N(74, 6)$

a) $P(68 \le X \le 80) = P\left(\dfrac{68-74}{6} \le Z \le \dfrac{80-74}{6}\right) = P(-1 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 1) = 2P(Z \le 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826 \Longrightarrow 68,26\,\%$

b) $P(X \ge 80) = 1 - P(X \le 80) = 1 - P\left(Z \le \dfrac{80-74}{6}\right) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 \Longrightarrow 15,87\,\% \Longrightarrow$ 238 estudiantes pesarán más de 80 kg.

c) $P(X \ge 86|X \ge 76) = \dfrac{P(\{X \ge 86\} \cap \{X \ge 76\})}{P(X \ge 76)} = \dfrac{P(X \ge 86)}{P(X \ge 76)} = \dfrac{1 - P(X \le 86)}{1 - P(X \le 76)} = \dfrac{1 - P\left(Z \le \frac{86-74}{6}\right)}{1 - P\left(Z \le \frac{76-74}{6}\right)} = \dfrac{1 - P(Z \le 2)}{1 - P(Z \le 0,33)} = \dfrac{1 - 0,9772}{1 - 0,6293} = 0,0615$

5.1.2. Ordinaria

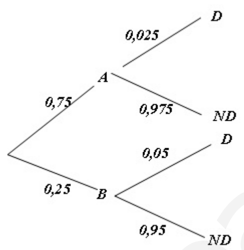
Opción B

Problema 5.1.2 *(2,5 puntos)* En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5 % de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1,5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Solución:



a) $P(D) = P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B) = 0,025\cdot 0,75+0,05\cdot 0,25 = 0,03125$. Luego se esperan $5000 \cdot 0,03125 = 156,25$ tornillos defectuosos, redondeando por exceso 157.

b) $p = 0,025$, $q = 1 - p = 0,975$ y $n = 6000$. Se trata de una binomial $B(6000; 0,025)$ como $np = 6000 \cdot 0,025 = 150 > 5$ y $nq = 6000 \cdot 0,975 = 5850 > 5$ la binomial se comporta como una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(150; 12,09)$
Aplicando la corrección por continuidad de Yates
$P(X > 160) = P(X \geq 160,5) = P\left(Z \geq \frac{160,5-150}{12,09}\right) = P(Z \geq 0,87) = 1 - P(Z \leq 0,87) = 1 - 0,8078 = 0,1922$

5.1.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 5.1.3 *(2,5 puntos)* La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0,05$.

b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

Solución:

$N(8,5; 2,5)$

a) La tabla de la normal empieza con 0,5: $P(X \leq a) = 0,05 \Longrightarrow 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-8,5}{2,5}\right) = 1 - 0,05 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\dfrac{a-8,5}{2,5}\right) = 0,95 \Longrightarrow -\dfrac{a-8,5}{2,5} = 1,645 \Longrightarrow a = 4,3875$

b) $P(8 \leq X \leq 9,3) = P\left(\dfrac{8-8,5}{2,5} \leq Z \leq \dfrac{9,3-8,5}{2,5}\right) = P(-0,2 \leq Z \leq 0,32) = P(Z \leq 0,32) - P(Z \leq -0,2) = P(Z \leq 0,32) - (1 - P(Z \leq 0,2)) = 0,6255 - (1 - 0,5793) = 0,2048$

5.2. Año 2019

5.2.1. Modelo

Opción A

Problema 5.2.1 *(2,5 puntos)* El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria X("número de respuestas acertadas") y se pide:

a) (1,5 puntos) Justificar que la variable X se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.

b) (1 punto) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial $B(300; 0,5)$ con $n = 300$, $p = 0,5$ y $q = 1 - p = 0,5$. Como $n > 10$, $np = 300 \cdot 0,5 = 150 > 5$ y $nq = 300 \cdot 0,5 = 150 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(150; 8,66)$.

b) La probabilidad de que acierte a lo sumo 130 aplicando la corrección por continuidad de Yates sería:

$$P(X \leq 130,5) = P\left(Z \leq \frac{130,5-150}{8,66}\right) = P(Z \leq -2,25) =$$

$$1 - P(Z \leq 2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122$$

La probabilidad de que acierte exactamente 160 aplicando la correción por continuidad de Yates sería:

$$P(159,5 \leq X \leq 160,5) = P\left(\frac{159,5-150}{8,66} \leq Z \leq \frac{160,5-150}{8,66}\right) =$$

$$P(1,10 \leq Z \leq 1,21) = P(Z \leq 1,21) - P(Z \leq 1,10) =$$

$$0,8869 - 0,8643 = 0,0226$$

5.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.2.2 *(2,5 puntos)* La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1,5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(0,1;10)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\left(\begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right) 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \left(\begin{array}{c} 10 \\ 1 \end{array} \right) 0,1^1 \cdot 0,9^9 \right) =$$

$$1 - (0,348678 + 0,387420) = 1 - 0,736098 = 0,263902$$

b) Se trata de una distribución binomial $B(200;0,1)$ con $n = 200$, $p = 0,1$ y $q = 1 - p = 0,9$. Como $n > 10$, $np = 200 \cdot 0,1 = 20 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,9 = 180 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(20;4,24)$.

$$P(X \geq 10) = P(X > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 20}{4,24}\right) = P(Z > -2,48) =$$

$$1 - P(Z < -2,48) = 1 - (1 - P(Z < 2,48)) = P(z < 2,48) = 0,9934$$

5.2.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 5.2.3 *(2,5 puntos)* Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2 % de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos exactamente 2 envíos.

b) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

c) (1,5 puntos) Usando la aproximación por la normal adecuada, hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado exactamente 30 paquetes defectuosos.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(0,02;10)$:

$$P(X = 2) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 2 \end{array} \right) 0,02^2 \cdot 0,98^8 = 0,015314$$

b) Se trata de una binomial $B(0,02;10)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\left(\begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array} \right) 0,02^0 \cdot 0,98^{10} + \left(\begin{array}{c} 10 \\ 1 \end{array} \right) 0,02^1 \cdot 0,98^9 \right) =$$

$$1 - (0,817073 + 0,16675) = 0,016177$$

c) Se trata de una distribución binomial $B(2000; 0,02)$ con $n = 2000$, $p = 0,02$ y $q = 1 - p = 0,98$. Como $np = 2000 \cdot 0,02 = 40 > 5$ y $nq = 2000 \cdot 0,98 = 1960 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal

$N(np, \sqrt{npq}) = N(40; 6,261)$.

$$P(X = 30) = P(29,5 < X < 30,5) = P\left(\frac{29,5 - 40}{6,261} < Z < \frac{30,5 - 40}{6,261}\right)$$

$$= P(-1,68 < Z < -1,52) = P(Z < -1,52) - P(z < -1,68) =$$

$$1 - P(Z < 1,52) - (1 - P(Z < 1,68) = P(z < 1,68) - P(Z < 1,52)$$

$$= 0,9535 - 0,9357 = 0,0178$$

5.2.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.2.4 *(2,5 puntos)* Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1,25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1,25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media $5,6$ y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es $0,67$, calcule σ.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(8; 0,4)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} 0,4^0 \cdot 0,6^8 + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} 0,4^1 \cdot 0,6^7\right) =$$

$$1 - (0,6^8 + 8 \cdot 0,4 \cdot 0,6^7) = 0,8936$$

b) Se trata de una distribución normal $N(5,6; \sigma)$

$$P(X \leq 8,2) = P\left(Z \leq \frac{8,2 - 5,6}{\sigma}\right) = 0,67 \Longrightarrow$$

$$\frac{8,2 - 5,6}{\sigma} = 0,44 \Longrightarrow \sigma = 5,91$$

5.3. Año 2020

5.3.1. Modelo

Opción B

Problema 5.3.1 *(2,5 puntos)* En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30°C y varianza 25. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28°C y 32°C.

b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36°C.

c) (0,75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

Solución:

$$\sigma^2 = Var(X) = 25 \Longrightarrow \sigma = 5 \Longrightarrow N(30,5)$$

a) $P(28 \le X \le 32) = P\left(\frac{28-30}{5} < Z < \frac{32-30}{5}\right) = P(-0,4 < Z < 0,4) = P(Z < 0,4) - P(Z < -0,4) = P(Z < 0,4) - (1 - P(Z < 0,4)) = 2P(Z < 0,4) - 1 = 2\cdot 0,6554 - 1 = 0,3108$

b) $P(X \ge 36) = P\left(Z > \frac{36-30}{5}\right) = P(Z > 1,2) = 1 - P(Z < 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151.$
Como el mes de junio tiene 30 días tendremos $30P(X \ge 36) = 30\cdot 0,1151 = 3,453 \Longrightarrow$ entre 3 o 4 días se superaran los 36º°C de temperatura.

c) $P(X \ge a) = P\left(Z > \frac{a-30}{5}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-30}{5}\right) = 0,5 \Longrightarrow \frac{a-30}{5} = 0 \Longrightarrow a = 30°\text{C}.$

5.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.3.2 *(2,5 puntos)* Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

a) La probabilidad P_1 de que no se lance la cuarta flecha será:
P_1 = probabilidad de acertar en el primer lanzamiento + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y acertar el segundo + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y fallar el segundo lanzamiento y acertar el tercer lanzamiento $= 0,3 + 0,7\cdot 0,4 + 0,7\cdot 0,6\cdot 0,5 = 0,79$

b) $P_2 =$ probabilidad de no acierta en la primera y no acierta en la segunda y no acierta en la tercera y no acierta en la cuarta $= 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$

c) $B(10; 0,85)$:
$$P(X = 6) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 6 \end{array} \right) \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 0,04$$

5.3.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 5.3.3 *(2,5 puntos)* El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0,2$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular la desviación típica, σ, de la distribución de pesos.

b) (1 punto) Calcular el valor x_0 tal que $P(X < x_0) = 0,2$.

Solución:
$$N(3353; \sigma)$$

a) $P(X > 3693) = P\left(Z > \dfrac{3693 - 3353}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \dfrac{340}{\sigma}\right) = 0,2 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{340}{\sigma}\right) = 0,8 \Longrightarrow \dfrac{340}{\sigma} = 0,845 \Longrightarrow \sigma = 402,37$ gramos.

b) $P(X < x_0) = P\left(Z < \dfrac{x_0 - 3353}{402,37}\right) = 1 - P\left(Z < -\dfrac{x_0 - 3353}{402,37}\right) = 0,2 \Longrightarrow$
$P\left(Z < -\dfrac{x_0 - 3353}{402,37}\right) = 0,8 \Longrightarrow -\dfrac{x_0 - 3353}{402,37} = 0,845 \Longrightarrow x_0 = 3013$ gramos.

5.3.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 5.3.4 *(2,5 puntos)* En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0,4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0,5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Solución:
Tenemos $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$, $P(X) = 0,4$ y $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$

a) $P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) \Longrightarrow P(X \cap Y) = P(X) - P(X \cap \overline{Y}) = 0,4 - 0,08 = 0,32$
$P(X \cap Y) = P(X)P(Y) \Longrightarrow 0,32 = 0,4P(Y) \Longrightarrow P(Y) = \dfrac{0,32}{0,4} = 0,8$

b) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0,4 + 0,8 - 0,32 = 0,88$.

c) $p = P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 0,6$ y sea A el nº de aciertos con probabilidad p. Se trata de una distribución binomial $B(8; 0,6)$.

$$P(A \geq 2) = 1 - (P(A = 0) + P(A = 1)) =$$

$$1 - \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} 0,6^0 \cdot 0,4^8 + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} 0,6^1 \cdot 0,4^7\right] = 0,99148032$$

5.4. Año 2021

5.4.1. Modelo

Opción A

Problema 5.4.1 *(2,5 puntos)* En un instituto, uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X = 0)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

Solución:

a) Es una distribución binomial $X \sim B(6; 0,25)$.

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} 0,25^0 \cdot 0,75^6 = 0,177979$$

b) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 0,25^5 \cdot 0,75^1 + \binom{6}{6} 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 0,004639$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,177979 = 0,822021$

5.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.4.2 *(2,5 puntos)* El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0,5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c; 8,8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

Solución:

$$N(8,8;3)$$

a) $P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10-8,8}{3}\right) = P(Z \geq 0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446 \Longrightarrow$ $34,46\ \%$

$P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8,8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8,8}{3}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 0,4) = P(Z \leq 0,4) - P(Z \leq -0,6) = P(Z \leq 0,4) - (1 - P(Z \leq 0,6)) = 0,6554 - 1 + 0,7257 = 0,3811 \Longrightarrow 38,11\ \%$

b) Se trata de una binomial $p = P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-8,8}{3}\right) = P(Z \leq 0,4) = 0,6554$
$B(4;0,6554)$, $n = 4$, $p = 0,6554$ y $q = 1 - 0,6554 = 0,3446$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0,6554^0 \cdot 0,3446^4 = 0,9859$$

c)

$$P(8,8-c;8,8+c) = P\left(\frac{8,8-c-8,8}{3} \leq Z \leq \frac{8,8+c-8,8}{3}\right) =$$

$$P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - P\left(Z \leq \frac{-c}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)\right) =$$

$$2P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 = 0,98 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 0,99 \Longrightarrow \frac{c}{3} = 2,325 \Longrightarrow c = 6,975$$

De otra forma:

$$NC = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01$$

$$P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,325$$

$$c = E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 2,325 \cdot 3 = 6,975$$

5.4.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 5.4.3 *(2,5 puntos)* El delantero de un equipo de fútbol, que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.

c) (1 punto) Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0,999.

Solución:

a) $B(4;0,6)$, $n = 4$, $p = 0,6$ y $q = 1 - p = 0,4$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^4 = 0,0256$$

b) $B(4;0,6)$, $n=4$, $p=0,6$ y $q=1-p=0,4$

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=$$

$$\binom{4}{3}0,6^3\cdot 0,4^1+\binom{4}{4}0,6^4\cdot 0,4^0=0,4752$$

c) la probabilidad de marcar si se lanzan n disparos es $1-0,4^n$ y esta probabilidad debe de ser mayor de $0,999$:

$$1-0,4^n>0,999\Longrightarrow 0,4^n<0,001\Longrightarrow n\ln 0,4>\ln 0,001\Longrightarrow$$

$$n>\frac{\ln 0,001}{\ln 0,4}=7,5388\Longrightarrow n=8$$

5.4.4. Extrordinaria

Opción B

Problema 5.4.4 *(2,5 puntos)* Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1,5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución:

$$B(100;0,45),\quad n=100,\quad p=0,45,\quad q=1-p=0,55$$

a) $P(X=40)=\binom{100}{40}0,45^{40}\cdot 0,55^{60}=0,0488$

b) $n=100>10,\quad np=45>5,\quad nq=55\Longrightarrow$

$$B(100;0,45)\overset{N(np;\sqrt{npq})}{\longrightarrow}N(45;4,975)$$

$P(X=40)=\left(\frac{39,5-45}{4,975}\le Z\le\frac{40,5-45}{4,975}\right)=P(-1,11\le Z\le -0,9)=P(Z\le -0,9)-P(Z\le -1,11)=1-P(Z\le 0,9)-(1-P(Z\le 1,11))=P(Z\le 1,11)-P(Z\le 0,9)=0,8665-0,8159=0,0506$

5.5. Año 2022

5.5.1. Modelo

No hay propuestos. En el problema de probabilidad de este modelo, en la opción B, hay un apartado con distribución binomial.