UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la matrices

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso a = 0.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para x > 0, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva ***y = f(x)***.
b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva ***y = f(x)*** en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva ***y = f(x)*** y las rectas ***y = 0*** y ***x = e***.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=z$ y la recta s que pasa por el punto (2;–5; 1) y tiene dirección (–1; 0;–1), se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.
c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los limites laterales $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto A(2; 1; 0) y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos.

Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} \text{ y } M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$; se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso a = 0.

a) La matriz A es de orden 3x4, su rango máximo es 3, buscamos un menor de orden 3 no nulo:

METODO 1. Utilizando determinantes:

Con las tres primeras columnas de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2-6+8-(-4a+3a+4)=a^2-6+8+4a-3a-4=a^2+a-2$$

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases} a=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ a=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

Habrían tres casos posibles:

CASO 1. a ≠ 1 y a ≠ –2. Rango de A es 3

CASO 2. a =1. La matriz queda:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La cuarta columna es igual a la primera con lo que rango de A = rango de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

En esta matriz su determinante es 0, por lo que el rango de A es menor de 3.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0$. El rango de A es 2

CASO 3. a = –2. La matriz queda:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

El menor de orden 3 formado por las tres últimas columnas vale:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -24+32+4-\left(4+32-24\right)=0$$

El rango de A no es 3

Tomemos el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-3=-5\neq 0$. El rango de A es 2

Conclusión: Si a ≠ 1 y a ≠ –2 el rango de A es 3. a = 1 o a = –2 el rango de A es 2.

METODO 2. También se puede estudiar utilizando el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$$

Si hacemos fila 2ª –fila 1ª . Tambien fila 3ª + fila 1ª

Nueva fila 2ª $\begin{array}{rrrrr} & 1 & 3 & 4 & 1 \\ + & -1 & -a & -2 & a-2 \\ \hline & 0 & 3-a & 2 & a-1 \end{array}$

Nueva fila 3ª $\begin{array}{rrrrr} & 1 & 3 & 4 & 1 \\ + & -1 & 2 & a & a-2 \\ \hline & 0 & 5 & 4+a & a-1 \end{array}$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3-a & 2 & a-1 \\ 0 & 5 & 4+a & a-1 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos columna 2ª y columna 4ª

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & a-1 & 2 & 3-a \\ 0 & a-1 & 4+a & 5 \end{pmatrix}$$

Hacemos fila 3ª – fila 2ª

Nueva fila 3ª $\begin{array}{rrrrr} & 0 & a-1 & 4+a & 5 \\ + & 0 & -a+1 & -2 & -3+a \\ \hline & 0 & 0 & a+2 & a+2 \end{array}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & a-1 & 2 & 3-a \\ 0 & 0 & a+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

Se observa que al ser una matriz triangular:

Si a ≠ 1 y a ≠ –2. Rango de A es 3

Si a = 1 la matriz equivalente queda:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2 pues la fila 2ª y fila 3ª son proporcionales

Si a = –2 la matriz equivalente queda:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Solo tiene dos filas no nulas y el rango de A es 2

b) La matriz AM es de orden 3x3 y si a = 0 la matriz producto AM quedaría:

$$AM=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & a & 2 & 2-a\\ -1 & 2 & a & a-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

Para ser invertible debe tener determinante no nulo:

$$|AM|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix}=0-6+2-(0-6+4)=-4+2=-2\neq 0$$

Calculemos su inversa:

$$(AM)^{-1}=\frac{Adj\left(AM^T\right)}{|AM|}=\frac{Adj\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\right)}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}-4 & 8 & 6\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -3\end{pmatrix}}{-2}$$

$$(AM)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ -1 & 5/2 & 3/2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para x > 0, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva ***y = f(x)***.
b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva ***y = f(x)*** en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva ***y = f(x)*** y las rectas ***y = 0*** y ***x = e***.

a) Calculemos los límites de la función en el infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (Regla de L`Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es la recta de ecuación $y=0$. El eje de abcisas.

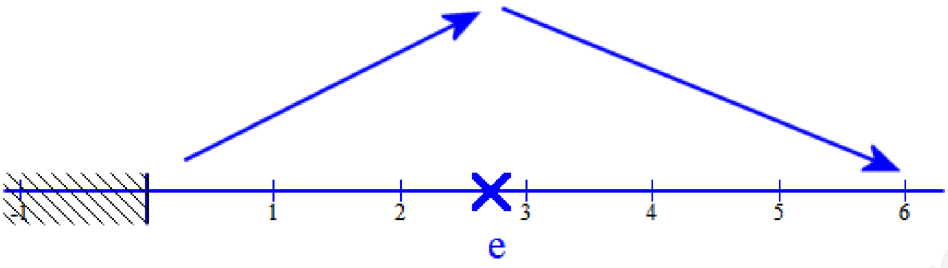
b) La pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia, si debe ser horizontal la derivada debe anularse.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f\,'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

En el intervalo (0, e) tomamos el valor 1 y $f\,'(1) = \frac{1-\ln 1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1 > 0$. La función crece

En el intervalo (e, +∞) tomamos el valor 4 y $f\,'(4) = \frac{1-\ln 4}{4^2} = \frac{-0,38}{16} = -0,02 < 0$. La función decrece



La función presenta un máximo relativo en ***x = e***.

c) Averigüemos los puntos de corte de las funciones $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ e ***y = 0 .***

$$\frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

El área pedida se calcula con la integral definida de la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ en el intervalo [1, e]:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \\ dx = xdt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{x} xdt = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$Área = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}u^2$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto (2;–5; 1) y tiene dirección (–1; 0;–1), se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.
c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas, nos planteamos si son paralelas y para ello comprobamos si sus vectores directores son proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v_r} = (2,-2,1) \\ \vec{v_s} = (-1,0,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{0} \neq \frac{1}{-1}$$

No son paralelas. Estas rectas o se cortan o se cruzan.

Debemos estudiar el determinante formado por sus vectores directores y el vector que une un punto P_r de la recta r y otro punto P_s de la otra.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,3,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,-2,1) \end{cases}$$

$$\text{Recta } s \Rightarrow \begin{cases} P_s(2,-5,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,0,-1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (2,-5,1) - (1,3,0) = (1,-8,1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2+8+0-(2+16+0) = -8 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

b) El plano que contenga a r y es paralelo a s tendrá como vectores directores los de ambas rectas (no son paralelas) y pasará por un punto P_r de la recta r.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,3,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,-2,1) \end{cases}$$

$$\text{Recta } s \Rightarrow \begin{cases} P_s(2,-5,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,0,-1) \end{cases}$$

El plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x-2-y+3+0-(2z-2y+6+0) = 0$$

$$\pi \equiv 2x+y-2z-5 = 0$$

c) El plano perpendicular a r y que pase por P(0,0,0) debe tener como vector normal el vector director de la recta r:

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (2,-2,1) \Rightarrow \pi \equiv 2x-2y+z+D = 0$$

Como pasa por P(0,0,0) → $2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$

El plano es $\pi \equiv 2x-2y+z = 0$

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

a) Este ejercicio no se puede hacer con diagrama de árbol debido a que serían 10 ramificaciones. Hay que resolverlo con la binomial. X = Número de peces que sobreviven más de 5 años.

n=10; p=0,10 → X=B(10;0,1).

$$P\left(X \geq 2\right) = 1 - P\left(X < 2\right) = 1 - \left(P(x=0) + P(x=1)\right) =$$

$$= 1 - \left(\binom{10}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \binom{10}{1} 0,1^1 \cdot 0,9^9\right) =$$

$$= 1 - \left(0,3487 + 0,3874\right) = 1 - 0,7361 = 0,2639$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} n = 200 \\ p = 0,1 \\ q = 0,9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = np = 200 \cdot 0,1 = 20 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 4,24 \end{array}\right\}$$

La distribución binomial X = B(200;0,1) se aproxima por una normal Y = N(20;4,24)

Calculamos la probabilidad pedida usando esta aproximación y haciendo una corrección por continuidad de 0,5:

$$P\left(X \geq 10\right) = P\left(Y \geq 10 - 0,5\right) = P\left(\frac{X - 20}{4,24} \geq \frac{9,5 - 20}{4,24}\right) = P\left(Z \geq -2,48\right) = P\left(Z \leq 2,48\right) = 0,9934$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Llamemos b al precio de un bocadillo, r al precio de un refresco y p al precio de una bolsa de patatas.

3 bocadillos + 1 que cobraron de más, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas + 1 que cobraron de más costaron 19€ → $4b+2r+3p=19$

Le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

$b+p=4$

Un bocadillo y un refresco por 3 euros, con un descuento del 40% respecto a sus precios originales. Es decir, pagó el 60% de su precio original. → $0,6b+0,6r=3 \Rightarrow 6b+6r=30 \Rightarrow b+r=5$

El sistema de ecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l} 4b+2r+3p=19 \\ b+p=4 \\ b+r=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b+2r+3p=19 \\ b=4-p \\ b+r=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4(4-p)+2r+3p=19 \\ 4-p+r=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 16-4p+2r+3p=19 \\ -p+r=1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -p+2r=3 \\ -p+r=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -p+2r=3 \\ r=p+1 \end{array}\right\} \Rightarrow -p+2(p+1)=3 \Rightarrow -p+2p+2=3$$

$$\Rightarrow p=1 \Rightarrow r=1+1=2 \Rightarrow b=4-1=3$$

Un bocadillo ha costado 3 €, un refresco 2 € y una bolsa de patatas 1 €

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los limites laterales $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$

a) El dominio de la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ son los valores de x que hacen positivo el radicando. Planteamos la ecuación correspondiente:

$$4x^2-x^4=0 \Rightarrow x^2\left(4-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

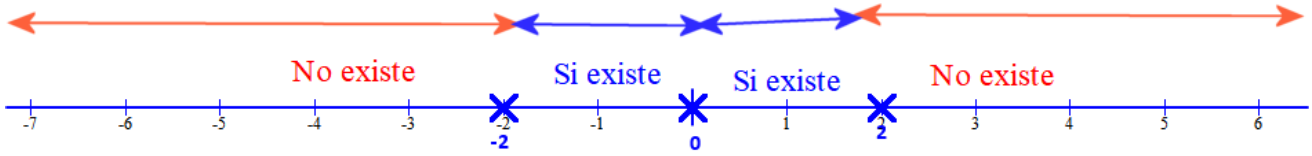
Los números reales se dividirían en 4 intervalos o semirrectas, veamos en cuales existe la función:

(–∞, –2) →por ejemplo $x=-4 \Rightarrow f(-4)=\sqrt{4(-4)^2-(-4)^4}=\sqrt{64-256}=\sqrt{-192}=\text{No existe}$

(–2, 0) → por ejemplo $x=-1 \Rightarrow f(-1)=\sqrt{4(-1)^2-(-1)^4}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}=Si\ \text{existe}$

(0, 2) → por ejemplo $x=1 \Rightarrow f(1)=\sqrt{4(1)^2-(1)^4}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}=Si\ \text{existe}$

(2, ∞) → por ejemplo $x=4 \Rightarrow f(4)=\sqrt{4(4)^2-(4)^4}=\sqrt{64-256}=\sqrt{-192}=No$ existe



El dominio de la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ es $[-2,\,2]$

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento se estudian con la derivada:

$$f(x)=\sqrt{4x^2-x^4} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x^2-x^4}}\left(8x-4x^3\right)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 8x-4x^3=0 \Rightarrow 4x\left(2-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2-x^2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

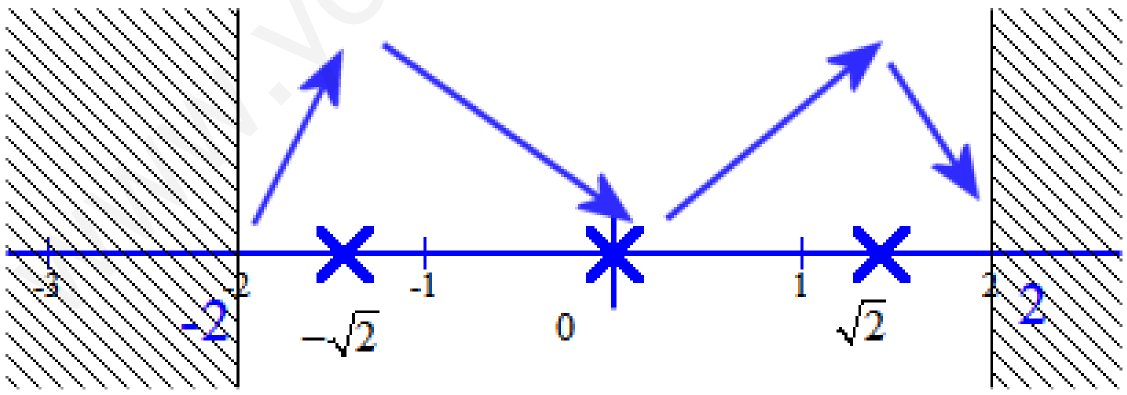
El intervalo del dominio $[-2,\,2]$ se divide en 4 partes, estudiemos el signo de la derivada en cada una de ellas:

$\left(-2,-\sqrt{2}\right)$ → por ejemplo $x=-1{,}5 \Rightarrow f\,'(-1{,}5)=\dfrac{8(-1{,}5)-4(-1{,}5)^3}{2\sqrt{4(-1{,}5)^2-(-1{,}5)^4}}=\dfrac{-12+12{,}5}{+}=+>0$ la función crece

$\left(-\sqrt{2},0\right)$ → por ejemplo $x=-1 \Rightarrow f\,'(-1)=\dfrac{8(-1)-4(-1)^3}{2\sqrt{4(-1)^2-(-1)^4}}=\dfrac{-8+4}{+}=-<0$ la función decrece

$\left(0,\sqrt{2}\right)$ → por ejemplo $x=1 \Rightarrow f\,'(1)=\dfrac{8(1)-4(1)^3}{2\sqrt{4(1)^2-(1)^4}}=\dfrac{8-4}{+}=+>0$ la función crece

$\left(\sqrt{2},2\right)$ → por ejemplo $x=-1{,}5 \Rightarrow f\,'(1{,}5)=\dfrac{8(1{,}5)-4(1{,}5)^3}{2\sqrt{4(1{,}5)^2-(1{,}5)^4}}=\dfrac{12-12{,}5}{+}=-<0$ la función decrece



La función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ crece en $\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(\sqrt{2},2\right)$

c)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}\sqrt{4-x^2}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{4-x^2}=2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Como } x \text{ son números negativos}\\ \sqrt{x^2}=-x\\ \text{ya que es la raiz positiva de } x\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{x}\sqrt{4-x^2}}{\cancel{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{4-x^2}=-2$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto A(2; 1; 0) y el plano $\pi\equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

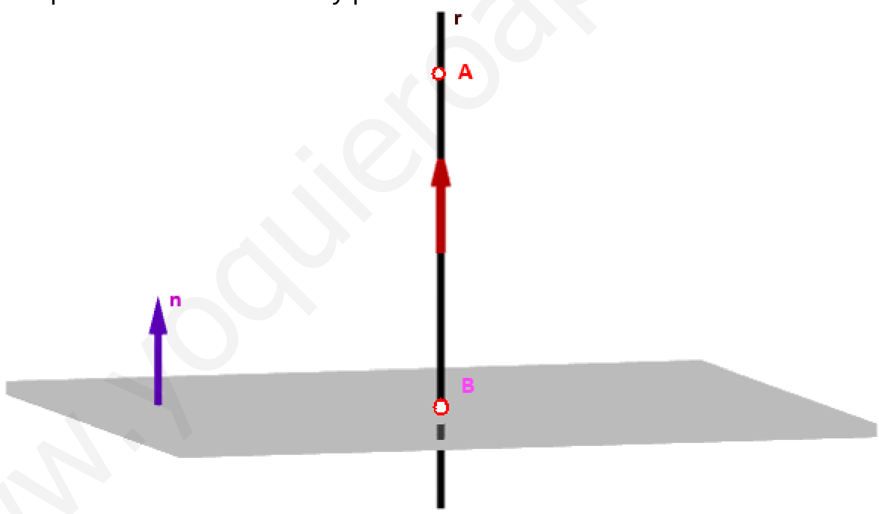
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

a)

$$\left.\begin{array}{l}A(2,1,0)\\ \pi\equiv 2x+3y+4z-36=0\end{array}\right\}d\left(A;\pi\right)=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\ u$$

b) Para determinar el punto buscamos la recta perpendicular al plano que pasa por A y luego averiguaremos el punto de corte de recta y plano.



$$\pi\equiv 2x+3y+4z=36\Rightarrow\vec{n}=(2,3,4)=\vec{v_r}$$

$$r\equiv\left\{\begin{array}{l}A(2,1,0)\\ \vec{v_r}=(2,3,4)\end{array}\right.\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2+2t\\ y=1+3t\\ z=4t\end{array}\right\}$$

El punto de corte de r y π se obtiene de resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y+4z=36\\ x=2+2t\\ y=1+3t\\ z=4t\end{array}\right\}\Rightarrow 2\left(2+2t\right)+3\left(1+3t\right)+4\left(4t\right)=36\Rightarrow 4+4t+3+9t+16t=36$$

$$29t=29\Rightarrow t=1\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2+2=4\\ y=1+3=4\\ z=4\end{array}\right\}$$

El punto pedido es $B\left(4,4,4\right)$

c) Para hallar el punto A´ simétrico de A respecto del plano π, utilizaremos el punto B obtenido en el apartado anterior. Asi el B es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ y por tanto:

$$B=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow(4,4,4)=\frac{(2,1,0)+(x,y,z)}{2}\Rightarrow(8,8,8)=(2,1,0)+(x,y,z)$$

$$(8,8,8)-(2,1,0)=(x,y,z)\Rightarrow A'=(6,7,8)$$

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

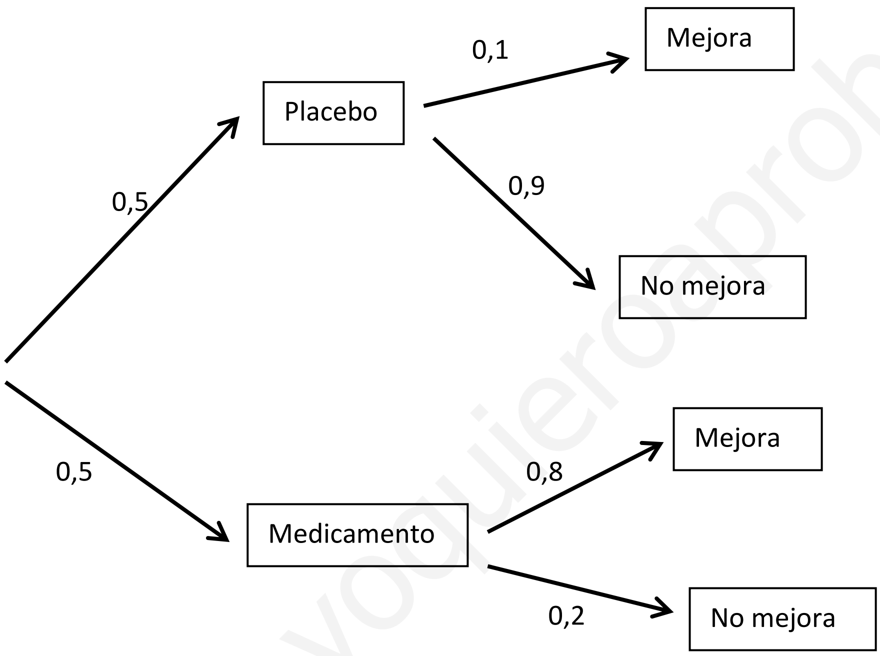
Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos.

Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Construyamos el diagrama de árbol que expresa los casos posibles y la probabilidad de que ocurran:



a)

$$P(\text{Mejore un paciente})=P(\text{Toma placebo y mejora})+P(\text{Toma medicamento y mejora})=$$

$$=0,5\cdot 0,1+0,5\cdot 0,8=0,05+0,4=0,45$$

b)

$$P(\text{Tome medicamento sabiendo que ha mejorado})=P(\text{Tome medicamento / ha mejorado})=$$

$$=\frac{P(\text{Tome medicamento y mejore})}{P(Mejore)}=\frac{0,5\cdot 0,8}{0,45}=0,89$$