Ejercicios de Distribuciones discretas. Distribución Binomial

1. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por la tabla

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,15	*m*	0,2	0,15	0,2	0,15

Determina el valor de *m* y para que $P(X)$ sea una función de probabilidad. Calcula $P(2<X<5)$; $P(X \geq 3)$; $P(X<0)$.

2. Dos personas A y B juegan con una moneda. Si sale cara, A recibe 1€ de B; si sale cruz B recibe 1€ de A. Sea X la variable aleatoria “ganancia de A en 3 jugadas”. Halla la función de probabilidad. Calcula su media y su varianza.
3. De una baraja española se extraen 8 cartas, de una en una y con devolución. Comprueba que la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se ha obtenido una figura sigue una distribución binomial. Halla los parámetros *n* y *p*.

   Calcula $P(X=5)$; $P(X<2)$; $P(X \geq 4)$

   ¿Cuál es el valor de la esperanza matemática? ¿Y su desviación típica?

   Sol: Es *B*(8; 0,3);

   $P(X=5)=0,0467$; $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0,2553$; $P(X \geq 4)=0,2587$

   $\mu = n \cdot p = 2,4$; $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 1,68$; $\sigma = 1,296$
4. Un examen tipo test consta de 10 preguntas. Cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas, de las que sólo una es correcta. Un alumno que no ha estudiado responde al azar a las preguntas del examen.
   a) Halla su función de probabilidad.
   b) Calcula la probabilidad de que el alumno apruebe el examen.
   c) Halla su media, varianza y su desviación típica.

   Sol: a) $f(x) = \begin{cases} \binom{10}{x} \cdot 0,25^x \cdot 0,75^{10-x} & x = 0,1,2...10 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$

   b) $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{10-k} = 0,0781$

   c) $\mu = 10 \cdot 0,25 = 2,5$; $\sigma^2 = 10 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 1,875$; $\sigma = 1,369$
5. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda trucada es 0,75. Si la lanzamos cinco veces,
   a) Halla su función de probabilidad.
   b) Calcula $P(X \geq 3)$; $P(X=0)$; $P(1 \leq X < 3)$
   c) Calcula los valores de su media, varianza y desviación típica.

   Sol: a) $f(x) = \begin{cases} \binom{5}{x} \cdot 0,75^x \cdot 0,25^{5-x} & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$

   b) Puesto que en la tabla sólo tenemos los datos para $0,01 \leq p \leq 0,5$, consideramos como éxito el obtener cruz, es decir consideramos la variable aleatoria *Y* de parámetros *B*(5;0,25), por tanto:

$$P(X \geq 3) = P(Y < 3) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{5-k} = 0,8965;$$

$$P(X = 0) = P(Y = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^0 = 0,001; \; ;$$

$$P(1 \leq X < 3) = P(X < 3) - P(X < 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = P(Y = 4) + P(Y = 3) = 0,1025$$

c) $\mu = 5 \cdot 0,75 = 3,75$; $\sigma^2 = 0,9375$; σ=0,9682

6. La probabilidad de que en cierto momento cada uno de los seis miembros de una familia quiera ver la televisión es 0,2. Sabiendo que a ninguno de los seis le gusta el mismo programa, ¿cuántos televisores debe haber (como mínimo) en la casa para que todos puedan ver su programa favorito al menos en un 90% de los casos?
   Sol: Se trata de una distribución *B*(6;0,2).
   Hay que hallar *x* tal que $P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{6}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{6-k} = 0,9$.
   Esto se verifica para $x = 2$.
7. Una máquina fabrica cierto tipo de circuito integrado. Este circuito se comercializa en lotes de 5 unidades, de los que compramos seis. Si sabemos que la probabilidad de que un circuito tenga algún defecto es 0,01, calcula:
   a) Probabilidad de que al menos un lote contiene algún circuito defectuoso.
   b) Todos los lotes contienen algún circuito defectuoso.
   c) Tres lotes contienen algún circuito defectuoso.

   Sol: Este es un caso de probabilidad combinada, es decir primero tenemos que hallar la probabilidad de que en un lote haya un circuito defectuoso y después la probabilidad de que entre los lotes comprados haya alguno con circuitos defectuosos:
   1. La variable aleatoria, *X*; que indica el número de circuitos defectuosos en un lote sigue una distribución binomial *B*(5;0,01).
      La probabilidad de que en un lote haya algún circuito defectuoso es:
      $$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^5 = 0,049.$$
   2. La variable aleatoria, *Y*, que indica el número de lotes que contiene algún circuito defectuoso es $B(6;0,049) \simeq B(6;0,05)$. Por tanto:
      a) $P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^6 = 0,2649$
      b) $P(Y = 6) = 0$; c) $P(Y = 3) = 0,0021$
8. Una pastelería empaqueta cajitas de bombones. La probabilidad de que un bombón esté relleno de mermelada es 0,7 y la probabilidad de que esté relleno de praline es 0,3. Si una persona compra tres cajitas de bombones con seis bombones en cada una, ¿cuál es la probabilidad de que en todas ellas haya algún bombón relleno de mermelada?
   Sol: Es el mismo caso que el problema anterior. Su solución es:
   $$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0,9993^3 \cdot 0,0007^0 = 0,9979.$$