

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	Junio de 2017

OPCIÓN A

Problema 1. a) Para $a=2$ el sistema es:
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$
 y como el determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27, \text{ el sistema es compatible y determinado y aplicando Cramer:}$$

$$x = \frac{1}{-27} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{-27} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}, \quad z = \frac{1}{-27} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$$

b) Como $\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3(a-1)^2$ el sistema es compatible y determinado si $a \neq 1$.

c) Para $a=-1$ el sistema es compatible e indeterminado pues $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ y

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \text{ El sistema: } \begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases} \text{ da las soluciones } (1+z, z, z).k$$

Problema 2. a) La recta r en paramétricas es:
$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$
 y si $A = (-3, 2, 0)$ en-

tonces $\vec{AP} = (4, 1, 1)$ y el vector normal del plano es: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 1).$

La ecuación del plano pertenece al haz: $.x - 3y + z + D = 0$ y al pasar por el punto P : $-1 - 3 + 1 + D = 0$ y el plano será $-x - 3y + z + 3 = 0$.

b) La recta s tiene de ecuación:
$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + s \\ z = 1 + s \end{cases}$$
 Sustituyendo en la ecuación del plano

$\pi: 1 + s + 1 + s + 1 + s = 1$, se obtiene $s = -\frac{2}{3}$ y el punto de intersección es:

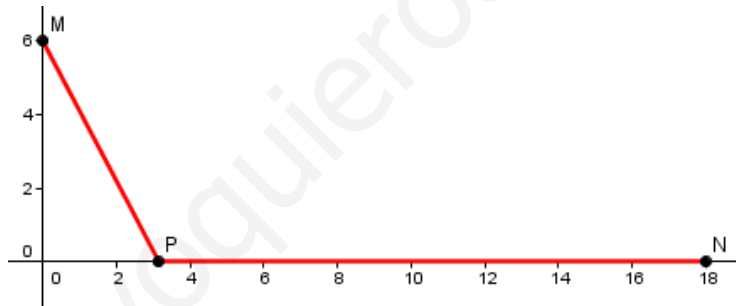
$Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La distancia pedida es: $|\overline{PQ}| = \left| \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right) \right| = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) El vector normal del plano σ es: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -1)$. El plano pertenece al

haz: $.x - z + D = 0$ y al pasar por el punto A : $-3 + D = 0$ y el plano será $-x - z + 3 = 0$.

Problema 3.

a) La función de coste es: $C(x) = 10\sqrt{36 + x^2} + 5(18 - x)$.



b) Derivando: $C'(x) = \frac{10 \cdot 2x}{2\sqrt{36 + x^2}} - 5$, se anula $x = 2\sqrt{3}$. Como $C'(x) < 0$ si

$x < 2\sqrt{3}$, es decreciente y $C'(x) > 0$ si $x > 2\sqrt{3}$ es creciente. Por tanto presenta el mínimo en $x = 2\sqrt{3}$.

c) El coste mínimo es: $C(2\sqrt{3}) = 10\sqrt{36 + 12} + 5(18 - 2\sqrt{3}) \approx 141,96\text{€}$.

OPCIÓN B

Problema 1 a) $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ y

$$2C - 1 = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$C^4 = C^2 C^2 \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$b) |(3A)^4 (4A^2)^{-1}| = |3A^4| |(4A^2)^{-1}| = 3^4 |A|^4 \frac{1}{|4A^2|^2} = \frac{3^4 |A|^4}{4^4 |A|^2} = \frac{81 |A|^2}{256} \frac{81}{256}.$$

$$c) BB = B \rightarrow BBB^{-1} = BB^{-1} \rightarrow B = I$$

Problema 2. a) $\overrightarrow{AB} = (3,0,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,2,-1)$. El vector normal del plano π es:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (3,3,3). \text{ El plano pertenece al haz } x + y + z + D = 0 \text{ y al}$$

pasar por $A(1,1,1)$, $D = -3$. El plano π es $x+y+z-3=0$. La recta h_o es $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

b) Sustituyendo las ecuaciones de la recta en el plano: $t+t+t-3=0$ y $t=1$. El punto obtenido es el punto A .

$$c) \text{ El \u00e1rea del tri\u00e1ngulo es: } A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(3,3,3)| = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 3^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

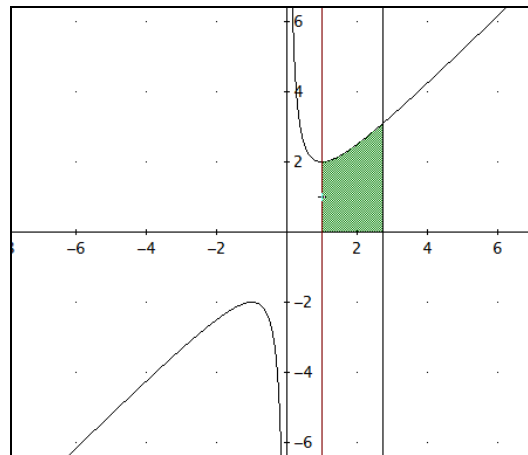
$$\text{El volumen del tetraedro es: } V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2}.$$

Problema 3. a) $y' = \frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ que se anula en $x = \pm 1$. Por tanto: $(-\infty, -1)$ $y' > 0$ creciente; $(-1, 0)$ $y' < 0$ decreciente; $(0, 1)$ $y' < 0$ decreciente; $(1, \infty)$ $y' > 0$ creciente. Hay un m\u00e1ximo en $(-1, 2)$ y un m\u00ednimo en $(1, 2)$.

b) As\u00edntota vertical: $x = 0$. As\u00edntota oblicua: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \right] = 0. \quad y = x.$$

c)



c) La integral indefinida es: $\int \frac{x^2+1}{x} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + L|x| + C$.

Por tanto el área es: $\int_1^e \frac{x^2+1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + L|x| \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2} \approx 4,19$.