1B. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} \qquad \textbf{(2,5 puntos)}$$

2B. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y la recta $g(x) = 2x + 2$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.

Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior. **(1 punto)**

b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado. **(1,5 puntos)**

4B. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia su posición relativa. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre r y s. **(1,25 puntos)**

1B) ¿ $a>0$: $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}}$?

• $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = e^{-1}$ (*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-(1+x)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} =$$

$$= \frac{-2}{1+1} = -1$$

• $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x)} = e^{-2a} \quad (**)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{x^2}\ln(\cos 2x) = \lim_{x\to 0} \frac{a\ln(\cos 2x)}{x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a\,\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2a\operatorname{tg}(2x)}{2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4a}{\cos^2(2x)}}{2} = -2a$$

• De (*) y (*) : $e^{-1} = e^{-2a} \Rightarrow -1 = -2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

2B) $f(x) = x^2-6x+9$

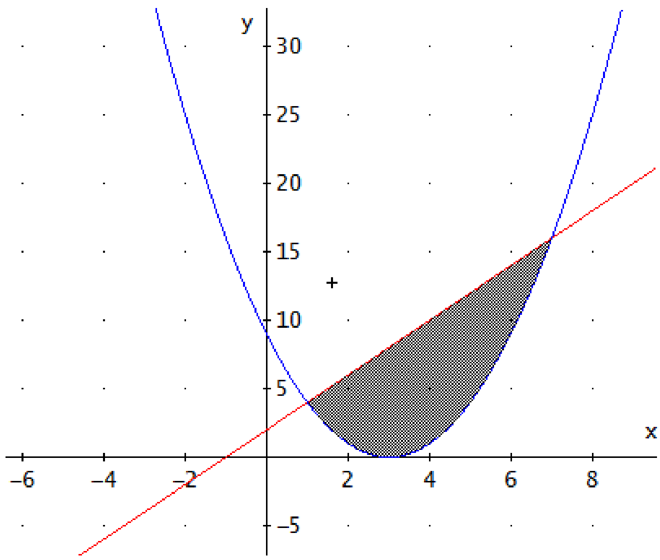
Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{6}{2} = 3 \\ y_v = 0 \end{array}\right\} V(3,0)$

Tabla

x	1	5
y	4	4

$g(x) = 2x+2$

x	y
0	2
2	6



b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

Área

$$\boxed{A} = \int_1^7 \left[(2x+2) - (x^2-6x+9)\right] dx = \int_1^7 (-x^2 + 8x - 7)\, dx =$$

$$= \frac{-x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 7x \Big|_1^7 = \left(\frac{-7^3}{3} + \frac{8 \cdot 7^2}{2} - 7 \cdot 7\right) - \left(\frac{-1^3}{3} + \frac{8 \cdot 1^2}{2} - 7 \cdot 1\right) =$$

$$= \boxed{36\ u^2}$$

3B) a) x = precio de un café
y = " de un refresco
z = " de una infusión

$$\boxed{\begin{cases} 4x + 6y + 2z = 15{,}40 \\ 5x + 4y + 3z = 14{,}40 \\ 3x + 8y + z = 18 \end{cases}}$$

b) Para razonar que hay un error, vamos a demostrar que el sistema en incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 15{,}40 \\ 5 & 4 & 3 & 14{,}40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 : 4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7{,}70 \\ 5 & 4 & 3 & 14{,}40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1 + F_3]{-5F_1 + F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7{,}70 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -24{,}1 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & -5{,}1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7{,}70 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -24{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & -29{,}2 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -29{,}2$$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

4B) $r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Posición relativa

$$r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y + 1 \Rightarrow x - 2y - 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv x = y = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = y \Rightarrow x - y = 0 \\ x = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow -x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$M=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&0&-2\\1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix},\quad \tilde{M}=\begin{pmatrix}1&-2&0&-2\\3&0&-2&2\\1&-1&0&0\\-1&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&0\\3&0&-2\\1&-1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow \text{rango } M=3$$

$$|\tilde{M}|=\begin{vmatrix}1&-2&0&-2\\3&0&-2&2\\1&-1&0&0\\-1&0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0&-2\\0&6&-2&8\\0&1&0&2\\0&-2&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-2&8\\1&0&2\\-2&-1&-1\end{vmatrix}=$$

$$=10\neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M}=4$$

Por tanto, r y s se cruzan.

b) $d(r,s)=\left|\dfrac{\det(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_sP_r})}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}\right|$

$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_r=(2,1,3)\\ \vec{u}_s=(1,1,-1)\end{array}\right\}$ $\overrightarrow{P_sP_r}=(0,-1,1)-(0,0,1)=(0,-1,0)$

$P_r(0,-1,1)$

$P_s(0,0,1)$

$$\vec{u}_r\times\vec{u}_s=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&3\\1&1&-1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}=(-4,5,1)$$

$$|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|=\sqrt{(-4)^2+5^2+1^2}=\sqrt{42}$$

$$\det(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_sP_r})=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&1&-1\\0&-1&0\end{vmatrix}=-5$$

Por tanto:

$$\boxed{d(r,s)=\left|\frac{-5}{\sqrt{42}}\right|=\frac{5\sqrt{42}}{42}\ u}$$