1B. Sabiendo que la función
$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$
tiene un punto crítico en $(1,1)$, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo. **(2,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} mx & & & + & z & = & 1 \\ & & my & + & z & = & m \\ -mx & - & my & + & (m+1)z & = & -m-1 \end{array} \right. \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$
b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta
$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
a) Estudia la posición relativa de π y r. **(1,25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0,1,-1)$. **(1,25 puntos)**

1B) $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

f tiene un punto crítico (punto en el que $f' = 0$) en $(1,1)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(1) &= \frac{-a-2b+a}{2^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2b}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ f(1) &= 1 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Ahora hay que comprobar que $x=1$ es un máximo relativo:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 1 \text{ es un máx. relativo de } f.}$

2B) a) $f(x) = x^2$

Vértice: $\left.\begin{aligned} x_v &= 0 \\ y_v &= 0 \end{aligned}\right\} V(0,0)$

Tabla:

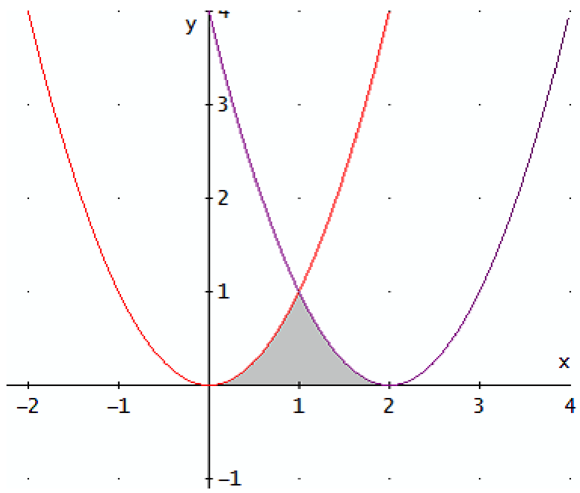
x	-1	-2	1	2
y	1	4	1	4

$g(x) = x^2 - 4x + 4$

Vértice: $\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{4}{2} = 2 \\ y_v &= 0 \end{aligned}\right\} V(2,0)$

Tabla:

x	0	4
y	4	4



Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1$$

Área

$$\boxed{A} = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{4\cdot 2^2}{2} + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{4\cdot 1^2}{2} + 4\cdot 1\right)\right] =$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\,u^2}$$

3B)

a) $\left.\begin{cases} mx+z=1 \\ my+z=m \\ -mx-my+(m+1)z=-m-1 \end{cases}\right\}$ $M=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix}$, $\tilde{M}=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & m \\ -m & -m & m+1 & -m-1 \end{pmatrix}$

$$|M| = m^2(m+3) \Rightarrow |M|=0 \Leftrightarrow m = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

Si $\boxed{m \neq 0,-3}$ $\Rightarrow$ rango M = rango $\tilde{M}$ = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

Si $\boxed{m=-3}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rango M = rango $\tilde{M}$ = 2 < 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $\boxed{m=0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z=-2 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $m=-3$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ \end{matrix}$$

De [2]: $-3y+z=-3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}z+1$

Sustituimos en [1]: $-3x+z=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}$

Hacemos $z=\lambda\in\mathbb{R}$. Las soluciones son $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\lambda+1, \lambda\right)}$

4B) $\pi \equiv y - z = 3$, $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Posición relativa

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (0, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (2,1,1) \end{array}\right\}$ $\pi \equiv y - z - 3 = 0$

Sustituimos $\vec{u}_r = (2,1,1)$ en la ec. del plano: $+1-1=0 \Rightarrow$ sustituimos $P(0,1,-1) \in r$ en la ec. completa del plano $1-1-3 \neq 0 \Rightarrow$ r y π son paralelos

De otra forma: mediante rangos

$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y-1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = z+1 \Rightarrow x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} |M| = 0 \,,\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ r y π son paralelos

b) La recta s que nos piden está determinada por $P(0,1,-1)$ y el vector director $\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r$

$\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2,-2,-2)$

Unas ecuaciones paramétricas de s son:

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = +2\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = -1 - 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}}$$