

1A. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(0,5 puntos)**

b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima. **(2 puntos)**

2A. Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

tal que $F(0) = 5$. **(2,5 puntos)**

3A. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

a) Calcula $A \cdot A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A . **(1 punto)**

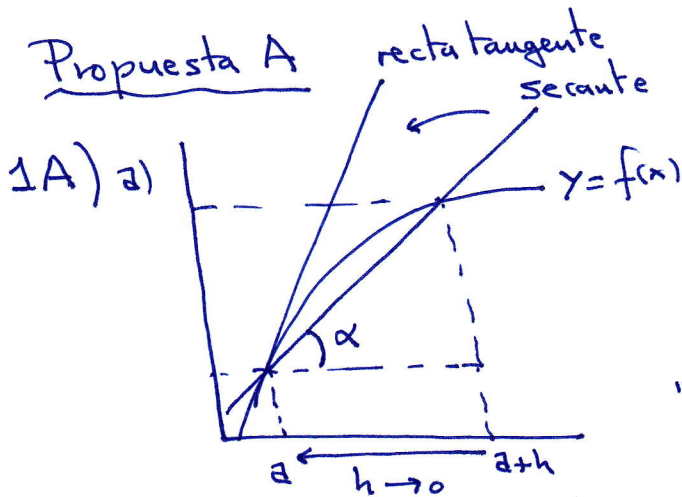
b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A , independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$. **(1,5 puntos)**

4A. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1,5 puntos)**

Propuesta A



$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{secantes}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = m_{\text{recta tangente}}$$

"La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto"

b) $m_{\text{recta tangente}} = f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 30 = g(x)$

Queremos optimizar $g(x)$:

$$g'(x) = 12x^2 - 48x + 36$$

$$g''(x) = 24x - 48$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$$g''(1) = -24 < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un máx. relativo}$$

$$g''(3) = 24 > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ " " mín. relativo}$$

La pendiente es mínima en $x=3$ y máxima en $x=1$.

2A) ¿ $F(x)$ primitiva de $f(x) = (x^2+1)e^x$ t.q. $F(0) = 5$?

$$\int (x^2+1)e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2+1 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x dx =$$

$$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = F(x)$$

$$\int 2xe^x dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = 2xe^x - \int 2e^x dx =$$

$$= 2xe^x - 2e^x$$

$$F(0) = (0^2+1)e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0 + C = 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$$

$$F(x) = \int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + 2$$

$$3A) A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \neq 0$$

$$a) AA^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$b) \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot a^3 - b \cdot (-b^3) = a^4 + b^4 \neq 0 \text{ ya que } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0.$$

$$4A) \pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$$

$$\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$$

$$a) \text{ ¿ } \lambda : \pi_1 \perp \pi_2 ?$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1} = (1, -2, -1) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, \lambda) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1, -2, -1) \cdot (2, -1, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -4} \end{array}$$

b) La recta que nos piden está determinada por $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$.

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 4\vec{k} + \vec{i} + 4\vec{j} = 9\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} = (9, 6, 3)$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = 1 + 9\mu \\ y = 2 + 6\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$

ii) No usar λ , ya que se ha usado en el apartado anterior para otra cosa !!