EXAMEN de FUNCIONES

Todos los apartados tienen que estar justificados correctamente, no hacerlo equivale a la anulación de la pregunta correspondiente.

1. Calcula la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas: (1.5 puntos).
   a) La recta que pasa por los puntos $A(-2,4)\ y\ B(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. (1 punto)
   b) La recta que pasa por los puntos $C(3,2)\ y\ D(3,8)$. (0.25 puntos)
   c) La recta que pasa por los puntos $E(0,-2)\ y\ F(-1,-2)$. (0.25 puntos)

2. Considera la parábola de ecuación: $y=-x^2-4x$ (2 puntos)
   a) ¿Cuál es su dominio? (0.1 puntos)
   b) ¿Cómo es su curvatura? (0.1 puntos)
   c) Halla las coordenadas de su vértice. (0.3) puntos)
   d) ¿Es su vértice un máximo o un mínimo? ¿Por qué? (0.2 puntos)
   e) Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. (0.2 puntos)
   f) Obtén los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas. (0.3 puntos)
   g) Estudia el signo de la parábola. (0.3 puntos)
   h) Construye una tabla de valores donde aparezcan, al menos, tres puntos diferentes a los anteriormente obtenidos. (0.1 puntos)
   i) Representa la parábola gráficamente. (0.4 puntos)

3. Considera la hipérbola de ecuación: $y=\frac{-1}{x-1}+1$ (2.5 puntos)
   a) ¿Cuál es su dominio? (0.3 puntos)
   b) Halla sus asíntotas. (0.5 puntos)
   c) Obtén los puntos de corte de la hipérbola con los ejes de coordenadas. (0.3 puntos)
   d) Estudia el signo de la función. (0.4 puntos)
   e) Representa la hipérbola gráficamente. (0.8 puntos)
   f) Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. (0.2 puntos)

4. Considera la función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases}\frac{-1}{x-2}\ si\ x<-1\\ x^2+a\ si\ x\geq -1\end{cases}$, tomando $a=1$. (4 puntos).
   a) Representa la función gráficamente. **ESTUDIA EN PRIMER LUGAR LAS FUNCIONES POR SEPARADO.** (2 puntos).
   b) Indica su dominio. (0.5 puntos).
   c) ¿Es continua? En caso de no serlo indica el/los punto/s donde no lo/s sea/n. No olvides justificar la respuesta. (0.5 puntos).
   d) Observa la gráfica que has construido e indica: intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos (absolutos y/o relativos), si los hubiera. (1 punto).

EJERCICIO EXTRA:

Calcula el valor de "a" en el ejercicio anterior para que la función sea continua justificando la respuesta. (1 punto).

EJERCICIO 1

a) $P_1(-2,4)$ y $P_2\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

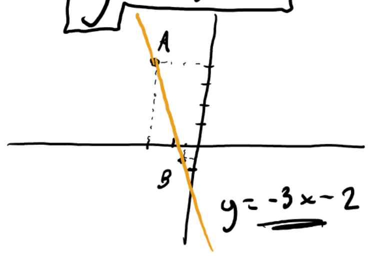
$$m = tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{1}{2}-4}{-\frac{1}{2}-(-2)} = \frac{\frac{-1-8}{\cancel{2}}}{\frac{-1+4}{\cancel{2}}} = \frac{-9}{3} = -3.$$

$y = mx+n$

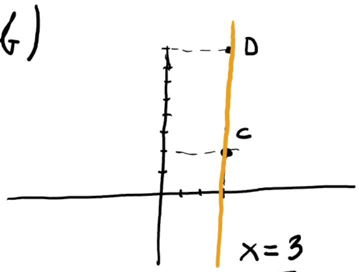
$y = -3x+n$; P_1 $\left\{ 4 = -3\cdot(-2)+n \Rightarrow 4 = 6+n \right.$

$n = -2$.

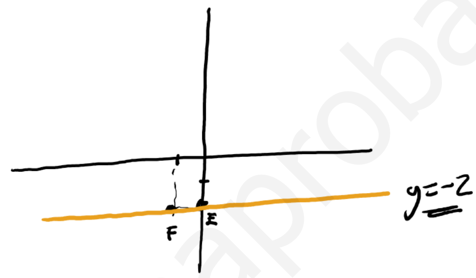
$$\boxed{y = -3x-2}$$



b)



c)



EJERCICIO 2

$y = -x^2-4x$

a) Dom $= \mathbb{R}$.

b) $a<0 \Rightarrow$

c) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2.$

$y = -(-2)^2 - 4\cdot(-2) = -4+8 = 4.$

$P_v(-2,4)$.

d) El vértice es un máximo debido a la curvatura de la parábola.

e) I. Crecimiento: $(-\infty,-2)$

I. Decrecimiento: $(-2,\infty)$.

f). Puntos de corte:

- Eje x: $y=0$. $-x^2-4x=0 \Rightarrow -x(x+4)=0 \left\{ \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-4. \end{array}\right.$

  $P_1(0,0)$.

  $P_2(-4,0)$.

- Eje y: $x=0$. $P(0,0)$.

g) Signo:

	$-\infty$	-4	0	∞
$-x^2-4x$	$-$	$+$	$-$	

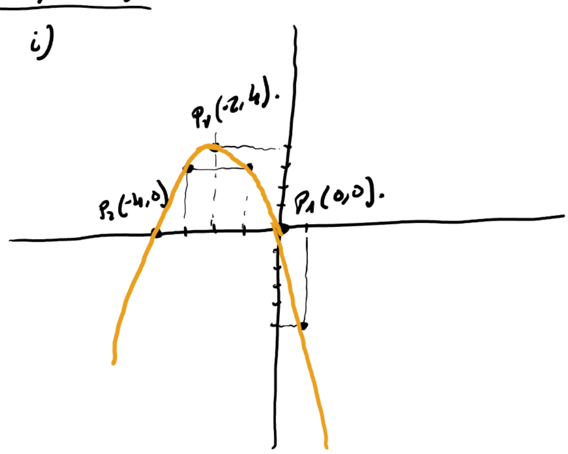
$-x^2-4x>0 : (-4,0)$.

$-x^2-4x<0 : (-\infty,-4)\cup(0,\infty)$.

h)

x	y
-1	3
-3	3
1	-5

i)



EJERCICIO 3 $\quad y = \dfrac{-1}{x-1} + 1$

a) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1. \qquad Dom = \mathbb{R} - \{1\}.$

b) Asíntotas:

- A. Vertical: $\underline{\underline{x = 1}}.$
- A. Horizontal: $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{-1}{x-1} + 1 \right) = 0 + 1 \quad \Big\} \; \underline{\underline{y = 1}}$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-1}{x-1} + 1 \right) = 0 + 1$

c) Puntos de corte:

- Eje x: $y = 0. \quad \dfrac{-1}{x-1} + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{+1}{x-1} = +1 \Rightarrow 1 = x - 1$

$x = 2 \Rightarrow P(2, 0).$

- Eje y: $x = 0. \quad y = \dfrac{-1}{0-1} + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P(0, 2).$

d) Signo: $y = \dfrac{-1}{x-1} + 1 = \dfrac{-1 + x - 1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$

	$-\infty$ — 1	1 — 2	2 — ∞
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

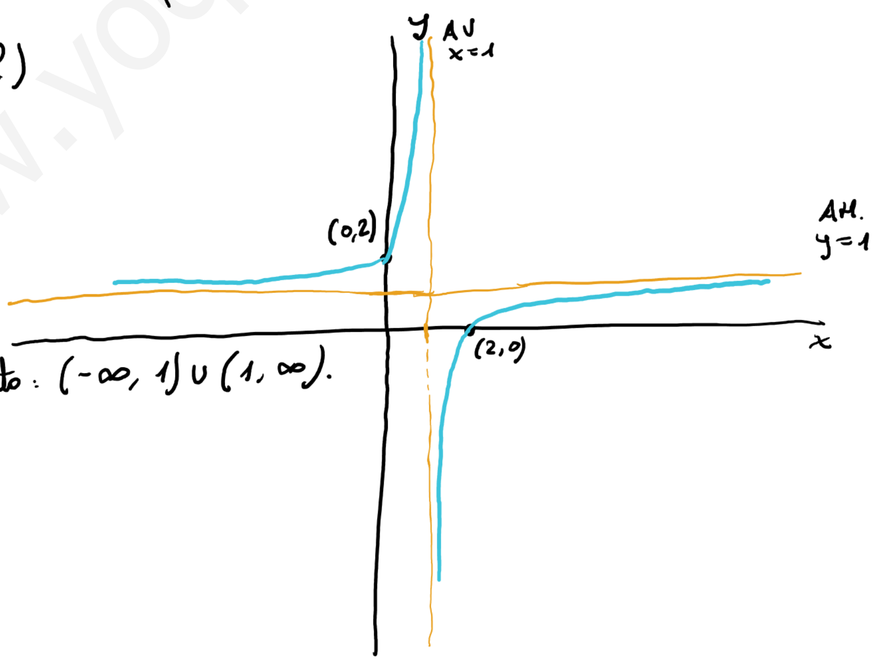
$\dfrac{x-2}{x-1} > 0 : (-\infty, 1) \cup (2, \infty).$

$\dfrac{x-2}{x-1} < 0 : (1, 2).$

e)

x	y
-1	$3/2$
3	$1/2$

f)



g) I. Crecimiento: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty).$

EJERCICIO 4

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-2} & \text{si } x<-1\\ x^2+1 & \text{si } x\geq -1\end{cases}$$

a) $f_1(x)=\dfrac{-1}{x-2}$.

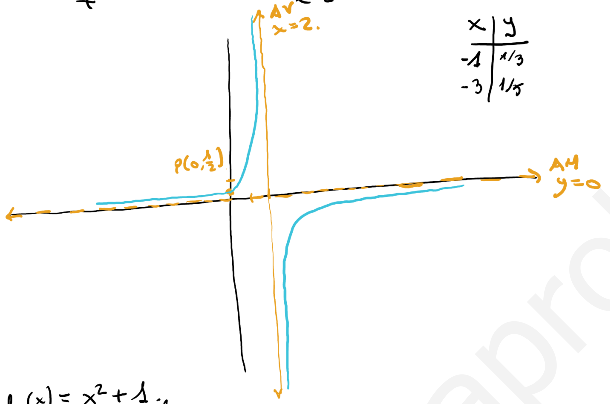
- Dominio $=\mathbb{R}-\{2\}$.
- Asíntotas:
  - Vertical: $x=2$.
  - Horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{-1}{x-2}\right)=0 \Rightarrow y=0$
- Ptos. de corte:
  - Eje x. $y=0$. $\dfrac{-1}{x-2}=0 \Rightarrow -1\neq 0$ ∄ Solución.
  - Eje y. $x=0$. $y=\dfrac{-1}{0-2}=\dfrac{1}{2}$. $P(0,\frac{1}{2})$.
- Signo de la función: $y=\dfrac{-1}{x-2}$.
  - Numerador: $-1<0$.
  - Denominador: $x-2=0 \Rightarrow x=2$.

	$-\infty$	2	∞
-1	$-$	$-$	
$x-2$	$-$	$+$	
	$+$	$-$	

$\dfrac{-1}{x-2}>0$: $(-\infty,2)$.

$\dfrac{-1}{x-2}<0$: $(2,\infty)$.

x	y
-1	1/3
-3	1/5



$f_2(x)=x^2+1$.

- $x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{2}=0$; $y_v=0+1=1$. $\Big\}$ $P_v(0,1)$.
- Por la curvatura no hay corte con el eje x.

x	y
1	2
2	5
-1	2
-2	5

GRÁFICA $f(x)$.

b) Dom $=\mathbb{R}$.

c) La función es discontinua en $x=-1$.

d) I. Crecimiento: $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$.

I. Decrecimiento: $(-1,0)$.

Mínimo relativo: $(0,1)$.

EJERCICIO EXTRA

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-2} & \text{si } x<-1.\\ x^2+a & \text{si } x\geq -1.\end{cases}$$

$f_1(x)=\dfrac{-1}{x-2}$, Dom $=\mathbb{R}-\{2\}$. como $x=2\notin(-\infty,-1)$.

f_1 es continua $\forall x\in(-\infty,-1)$.

$f_2(x)=x^2+a$, Dom $=\mathbb{R}$. f_2 es cont. $\forall x\in(-1,\infty)$.

→ Punto crítico $x=-1$.

$f(-1^-)=\dfrac{-1}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$.

$f(-1^+)=(-1)^2+a=a+1$

$f(-1^-)=f(-1^+)$.

$\dfrac{1}{3}=a+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}-1=\dfrac{1-3}{3}=\dfrac{-2}{3}$.