Examen resuelto MATRICES Y DETERMINANTES (Modelo EBAU)

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$**; calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:** $a)$ $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$

$$a)\ \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 2 = 30$$

$$b)\ \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} b & c & b \\ e & f & e \\ h & i & h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 2\cdot 0 = -2$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ **averiguar para qué valores del parámetro** m **existe** A^{-1} **y calcular** A^{-1} **para** $m = 2$**.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1\ ;\ m = 3$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $m \neq 1\ y\ 3$

b) Calculamos la inversa para $m = 2$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$**, siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2\cdot X = 2B \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

Sea $A=\begin{pmatrix} sen\,x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\,x & 0 \\ sen\,x+\cos x & sen\,x-\cos x & 1 \end{pmatrix}$.

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A?. Calcula dicha matriz inversa.

Para que la matriz A tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = sen^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$$

Luego, la matriz A tiene inversa para cualquier valor de x.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} sen\,x & -\cos x & -1 \\ \cos x & sen\,x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix} sen\,x & \cos x & 0 \\ -\cos x & sen\,x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} sen\,x & \cos x & 0 \\ -\cos x & sen\,x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad 3x3 y 0 la matriz nula 3x3, prueba que $A^3+I=0$

b) Calcula A^{10}

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3+I=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{10}=A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A=(-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot A=-A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$