MATRICES DETERMINANTES

1.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calcular razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación $(AB^t + C)X = (A^tD)E$, donde M^t significa la matriz transpuesta de la matriz M.

2.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Probar que la matriz T, tiene inversa T^{-1}, y calcular dicha matriz inversa.
b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B.
c) Obtener los elementos de la matriz B.

3.- A es una matriz 3 x 3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se pide
a) Calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3.
b) Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$.
c) Calcular la matriz inversa de A.

RESOLUCIÓN

1.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calcular razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación $(AB^t + C)X = (A^tD)E$, donde M^t significa la matriz transpuesta de la matriz M.

Calculemos $(AB^t + C) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Y ahora calculemos $(A^tD)E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = : 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$

Tenemos que resolver $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$. Así

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1}$ por la regla de los determinantes $\left(M^{-1} = \frac{1}{|M|}[Adj(M)]^t \right)$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

2.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Probar que la matriz T, tiene inversa T^{-1}, y calcular dicha matriz inversa.
b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B.
c) Obtener los elementos de la matriz B.

RESOLUCIÓN:

a) Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de 0.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1. \rightarrow \exists T^{-1}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}[Adj(T)]^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t = -1\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Despejando B: $TAT^{-1} = B$,
Utilizaremos que el determinante del producto coincide con el producto de los determinantes ($|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$) y que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|B| = |TAT^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = -1 \cdot |A| \cdot \frac{1}{-1} = |A|$$

Calculemos pues el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$

Entonces $|B| = 2$.

c) $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =:$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- A es una matriz 3 x 3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Se pide

a) Calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3.

b) Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$.

c) Calcular la matriz inversa de A.

RESOLUCIÓN:

a) $|A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$ $\quad (A^3)^{-1} = \frac{1}{|A^3|}[Adj(A^3)]^t$:

$$(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $XA^3 = BA^2 \quad \to X = BA^2(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =:$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $A^{-1} = A^2(A^3)^{-1} = (AAA^{-1}A^{-1}A^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$