

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3 - 2}{x^2 - x - 2} dx$ (1,25 puntos)

b) $\int (x^2 + 1) \cdot \operatorname{sen} x \, dx$ (1,25 puntos)

c) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx$ (1 punto)

d) $\int \frac{2e^{2x}}{e^x + 1} dx$ (1,25 puntos)

2. Dada la función $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$, se pide:

a) Halla la integral siguiente: $I = \int e^x \cdot \operatorname{sen} x$.

b) Encuentra la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(0, 2)$

(1,75 puntos)

3. Dadas las siguientes parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

a) Esboza el recinto comprendido entre ambas funciones.

b) Halla el área del recinto anterior.

(2,25 puntos)

4. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = e^x$, $y = -x + 1$, la recta vertical $x = -2$ y el eje de abscisas que se muestra en la figura adjunta.

(1,25 puntos)

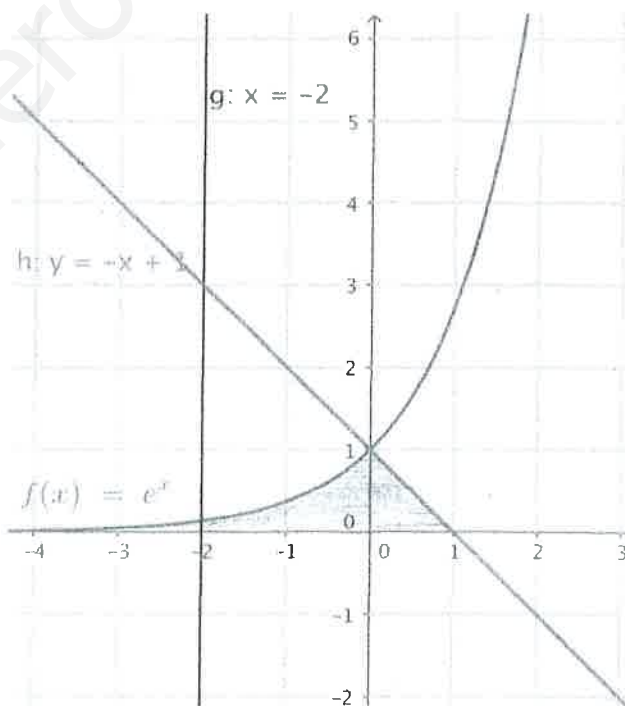
$$R = \int_{-2}^0 e^x dx + \int_0^1 -x + 1 dx =$$

$$= e^x \Big|_{-2}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 =$$

$$= e^0 - e^{-2} + \left[-\frac{1}{2} + 1 - 0 \right] =$$

$$= 1 - e^{-2} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{2} - e^{-2} =$$

$$= \frac{3}{2} - e^{-2} \text{ u}^2$$



$$1- a) \int \frac{x^3 - 2}{x^2 - x - 2} dx = \int \left[(x+1) + \frac{3x}{(x-2)(x+1)} \right] dx =$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^3} - 2 \\ \underline{-x^3 + x^2 + 2x} \\ x^2 + 2x - 2 \\ \underline{-x^2 + x + 2} \\ -x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} \\ (*) = \int (x+1) dx + \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \\ = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x-2| + \ln|x+1| + K \end{array}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$(*) \frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 3x = A(x+1) + B(x-2)$$

Si $x = -1 \Rightarrow -3 = -3B \quad (B=1)$
Si $x = 2 \Rightarrow 6 = 3A \quad (A=2)$

con ello; $\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}$

$$b) \int (x^2+1) \sec x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes} \\ u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x dx \\ \sec x dx = dv \Rightarrow -\cos x = v \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} = -(x^2+1) \cdot \cos x - \int -\cos x \cdot 2x dx = -(x^2+1) \cdot \cos x + \int 2x \cdot \cos x dx = \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes} \\ 2x = u \rightarrow 2dx = du \\ \cos x dx = dv \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} = -(x^2+1) \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = \\ = (-x^2+1) \cdot \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K \end{array} \right.$$

$$c) \int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{3x}{t} \cdot \frac{t dt}{x} = 3t + K = \boxed{3\sqrt{x^2-2} + K}$$

Cambio de variable

$$\begin{array}{l} x^2 - 2 = t^2 \\ 2x dx = 2t dt \\ dx = \frac{t dt}{x} \end{array}$$

2ª forma:

$$\begin{array}{l} \int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}} dx = \\ = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}} dx = \underline{3\sqrt{x^2-2} + K} \end{array}$$

inmediata

$$d) \int \frac{2e^{2x}}{e^x+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{2t^2}{t+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{2t}{t+1} dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2t - 2 \ln|t+1| + K$$

$$= \underline{2e^x - 2 \ln|e^x+1| + K}$$

Integramos por partes

$$2.- a) I = \int e^x \sen x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x dx = dv \rightarrow v = e^x \\ \sen x = u \rightarrow \cos x \, dx = du \end{array} \right\}$$

$$= e^x \sen x - \int e^x \cos x \, dx =$$

$v = e^x$
 $\cos x \, dx = du$
 $\int \sen x \, dx = -\cos x$

$$= e^x \sen x - \left[e^x \cos x - \int e^x \sen x \, dx \right] =$$

$$= e^x \sen x - e^x \cos x - \int e^x \sen x \, dx$$

$$I = e^x (\sen x - \cos x) - I \Rightarrow$$

Despejando I

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sen x - \cos x) + K$$

(b) Si $x=0 \Rightarrow I=2$

$$\frac{1}{2} e^0 (\sen 0 - \cos 0) + K = 2 \quad \text{y despejamos } K,$$

$$\frac{1}{2} (0 - 1) + K = -\frac{1}{2} + K = 2 \Rightarrow K = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

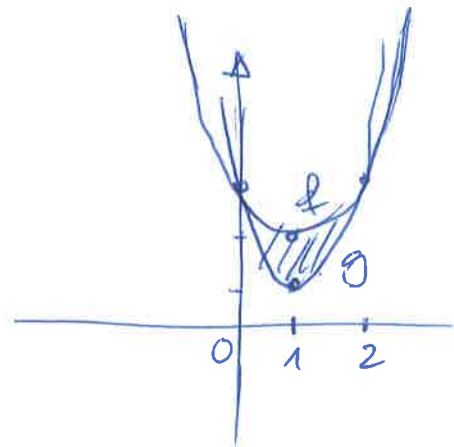
Entonces la primitiva buscada es $\boxed{\frac{e^x}{2} (\sen x - \cos x) + \frac{5}{2}}$

3.- $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0$

$$\bullet x(-x+2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x	f(x) = x^2 - 2x + 3
0	3
1	2
2	3
3	6

x	y = g(x)
0	3
1	1
2	3
3	5



$$R = \int_0^2 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx =$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 - 0 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3} u^2$$