

1.- (10 puntos) Hallar las integrales siguientes:

$$a) \int \frac{3x}{x^2-1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

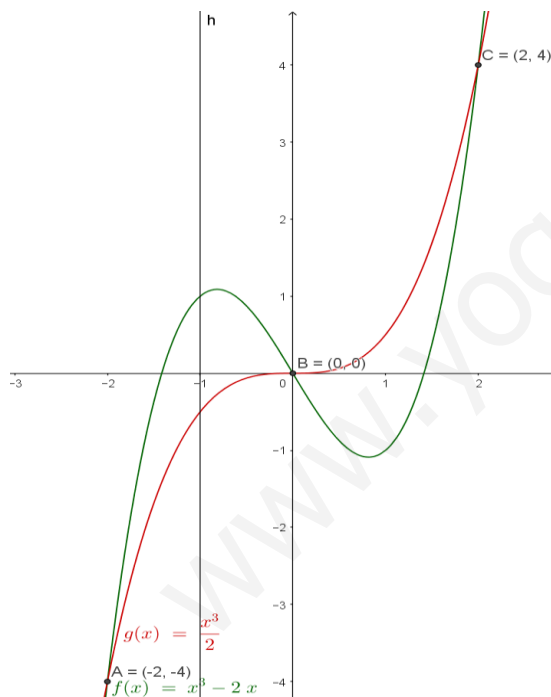
$$b) \int 5x^2 e^{x^3} dx = \frac{5}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{5}{3} e^{x^3} + C$$

$$c) \int \frac{\cos x \sqrt{-\operatorname{sen} x}}{2} dx = -\frac{1}{2} \int -\cos x (3-\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \frac{(3-\operatorname{sen} x)^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{3-\operatorname{sen} x} + C$$

$$d) \int \frac{(3 \ln x)^4}{3x} dx = 27 \int \ln^4 x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{27}{5} \ln^5 x + C$$

$$e) \int \frac{2x^3}{x+1} dx = \int (2x^2 - 2x + 2) dx - 2 \int \frac{dx}{x+1} = \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x - 2 \ln|x+1|$$

2.- (10 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^3 - 2x$, $y = \frac{x^3}{2}$ y la recta $x = -1$



Puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 2x = \frac{x^3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^3}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2.$$

Considerando el área de la izquierda:

$$A = \left| \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^3}{2} - 2x \right) dx \right| = \left[\frac{x^4}{8} - x^2 \right]_{x=-2}^{x=-1} = \left(\frac{1}{8} - 1 \right) - (2 - 4) = \frac{9}{8} u^2$$

Considerando el área de la derecha:

$$A = \left| \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{2} - 2x \right) dx \right| + \left| \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - x \right) dx \right| = \left[\frac{x^4}{8} - x^2 \right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{x^4}{8} - x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = \left| 0 - \left(\frac{1}{8} - 1 \right) \right| + \left| (2 - 4) - 0 \right| = \frac{7}{8} + 2 = \frac{23}{8} u^2$$

Considerando las dos áreas, y considerando que la función es impar

$$A = 2 \left| \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - 2x \right) dx \right| = 2 \left[\frac{x^4}{8} - x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = 2 \left| (2 - 4) - 0 \right| = 4 u.$$

3.- (20 puntos) Dada la siguiente función: $f(x) = \frac{4-2x^2}{x^2-4}$, calcular:

- Su dominio. (1 punto)
- Simetrías. (1 punto)
- Cortes con los ejes. (1 punto)
- Asíntotas. (5 puntos)
- Monotonía, máximos y mínimos. (5 puntos)
- Curvatura y puntos de inflexión. (4 puntos)

Con esta información hacer su representación gráfica. (3 puntos)

a) $Domf = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) $f(-x) = \frac{4-2(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{4-2x^2}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow \text{Par} \Rightarrow \text{Simétrica respecto de OY.}$

c) corte OX $\Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{4-2x^2}{x^2-4} = 0 \Rightarrow 4-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow A(\sqrt{2}, 0); B(-\sqrt{2}, 0)$
 corte OY $\Rightarrow x=0 \Rightarrow y = -1 \Leftrightarrow E(0, -1)$

d) Asíntotas

Horizontales:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-2x^2}{x^2-4} = -2 \Rightarrow y = -2$ (no hay asíntotas oblicuas)

Verticales:

$\odot x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4-2x^2}{x^2-4} = \frac{-4}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4-2x^2}{x^2-4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \end{cases} \quad \odot x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-2x^2}{x^2-4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-2x^2}{x^2-4} = \frac{-4}{0^+} = -\infty \end{cases}$

e) Monotonía:

$f'(x) = \frac{8x}{(x^2-4)^2} = \frac{8x}{x^4-8x^2+16}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$-\infty \xrightarrow{y'<0} -2 \xleftarrow{y'<0} 0 \xleftarrow{y'>0} 2 \xleftarrow{y'>0} \infty$
 Mínimo Relativo $E(0, -1)$

f) Curvatura:

$f''(x) = \frac{-24x^2-32}{(x^2-4)^3} = \frac{-24x^2-32}{x^6-12x^4+48x^2-64}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -24x^2-32 = 0$ no tiene solución.

$-\infty \xrightarrow{y''<0} -2 \xleftarrow{y''>0} 2 \xleftarrow{y''<0} \infty$ no hay PI

