8 INTEGRALES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

1 **Comprueba que las integrales de las funciones que se ofrecen en la tabla son correctas derivando los resultados para obtener la función que se integra.**

INTEGRALES INMEDIATAS
$\int k\,dx = kx + C$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, si $n \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, si $a > 0$ y $a \neq 1$

2 **Calcula las siguientes integrales, descomponiéndolas si es necesario.**

a) $\int x^{10}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$

d) $\int \frac{3}{\sqrt{x^5}}\,dx$

e) $\int \sqrt{2x^3}\,dx$

f) $\int 4\sqrt{3x}\,dx$

g) $\int \frac{5}{\sqrt{5x^3}}\,dx$

h) $\int \left(2x - \frac{3}{x^4}\right)dx$

i) $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 7)\,dx$

j) $\int \left(3x + 4x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

k) $\int \frac{4^x + 6^x}{2^{x-1}}\,dx$

l) $\int \sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}}\,dx$

a) $\frac{x^{11}}{11} + C$

b) $-\frac{1}{x} + C$

c) $\frac{-2}{\sqrt{x}} + C$

d) $\frac{-2}{x\sqrt{x}} + C$

e) $\frac{2x^2\sqrt{2x}}{5} + C$

f) $\frac{8x\sqrt{3x}}{3} + C$

g) $\frac{-10}{\sqrt{5x}} + C$

h) $x^2 + \frac{1}{x^3} + C$

i) $\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$

j) $\frac{3x^2}{2} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

k) $2\left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3}\right) + C$

l) $\frac{8}{19} \cdot x^2\sqrt[8]{x^3} + C$

3 **Calcula las siguientes integrales definidas.**

a) $\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,dx$

b) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx$

c) $\int_{-2}^{3} \lvert x\rvert\,dx$

d) $\int_{2}^{8} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

e) $\int_{2}^{3} \frac{x\,dx}{(1-x)^2}$

a) $\frac{-9}{2}$

b) 1

c) $\frac{13}{2}$

d) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 8}$

e) $\ln 2 + \frac{1}{2}$

4 **Averigua el área que determinan la gráfica de la función $f(x) = \lvert 2x + 3\rvert$, el eje de ordenadas, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = -2$.**

Sol: $2{,}5\ u^2$

5 **Determina el área de la región delimitada por la curva $y = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ y el eje de abscisas.**

Sol: $9{,}7604\ldots\ u^2$

6 **Calcula el área de la región del plano encerrada por la gráfica de la función $f(x) = e^x - 1$, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 2$.**

Sol: $4{,}39\ u^2$ aprox

7 **Calcula el área que determinan la curva $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, los ejes de coordenadas y la recta de ecuación $x = 2$.**

Sol: $\frac{2}{3}u^2$

8 **Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{1+x}$, el eje de abscisas y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 4$.**

Sol: $\frac{52}{3} - \ln 5$

9 **Calcula el área delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.**

Sol: $\frac{1}{3}u^2$

10 **Determina el área de la región del plano limitada por las curvas $y = x^4 + 2x^2$ e $y = x^2 + 2$.**

Sol: $\frac{44}{15}u^2$

11 **Calcula el valor del coeficiente b sabiendo que el área delimitada por la parábola $y = x^2 + bx - 2$ y la recta $2x + y + 2 = 0$, es $\frac{4}{3}$ u^2.**

Sol: La igualdad se cumple para $b = 0$ y $b = -4$.

Ejercicios y problemas

Cálculo de integrales indefinidas

12 **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\displaystyle\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt[3]{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int\frac{5^{2x+2}}{5+5^{2x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int\frac{3}{x\ln(2x)}\,dx$

a) $\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$

b) $\frac{25}{2\ln 5}\ln(5+5^{2x})+C$

c) $\frac{(\ln x)^3}{3}+C$

d) $3\ln\left|\ln|2x|\right|+C$

13 **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\displaystyle\int\frac{2e^{-x}}{2+e^{-x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

c) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2+4x+1}$

a) $-2\ln(2+e^{-x})+C$

b) $\sqrt{x^2+1}+C$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$

d) $\frac{-1}{4x+2}+C$

14 **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\displaystyle\int\frac{\ln(2x^2)}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int\frac{1+2x^2}{5x+2}\,dx$

c) $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

a) $\frac{1}{4}\ln^2(2x^2)+C$

b) $\frac{x^2}{5}-\frac{4x}{5}+\frac{33}{125}\ln(5x+2)+C$

c) $\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2x}}+C$

Cálculo de primitivas

15 **Calcula la primitiva de la función que se anula en el punto de abscisa $x = 2$:**

$$f(x) = x\sqrt{x^2-1}$$

Sol: $F(x)=\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}$

16 **Calcula la primitiva de la función $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$ que se anula en $x = e$.**

Sol: $F(x)=\frac{(\ln x)^3-1}{3}$

17 **Halla la función $f(x)$ tal que $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$, sabiendo que $f(0) = 2$.**

Sol: $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2$

18 **Encuentra la primitiva de $f(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$ sabiendo que su gráfica tiene como asíntota horizontal $y = 2$.**

Sol: $F(x)=\frac{1}{x-2}+2$

19 **Encuentra la primitiva de la función $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ cuya recta tangente en $x = e$ pasa por $(0, 0)$.**

Sol: $F(x)=\ln\left|\ln|x|\right|+1$

Integral definida

20 **Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.**

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0}x^2(x^3+2)^2\,dx$

d) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x\sqrt{2+2x^2}\,dx$

a) $\frac{16}{3}$

b) 0

c) $\frac{7}{9}$

d) $\frac{1}{4}$

e) 0

21 **Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.**

a) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{2x+3}{2x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{1}|1-x^2|\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,dx$

a) $2+\ln 5$

b) 8

c) $\ln 3$

Teorema fundamental del cálculo integral

22 **Halla el valor medio de la función $f(x) = xe^{x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$ y calcula en qué punto del intervalo se alcanza.**

Sol: 13,4 aprox.

$x \cong 1{,}4835$

23 **Halla la derivada de las siguientes funciones.**

a) $G(x)=\displaystyle\int_{3}^{x}\frac{dt}{t+5}$

b) $G(x)=\displaystyle\int_{3}^{x^2}\frac{dt}{t+5}$

c) $G(x)=\displaystyle\int_{x}^{x^2}e^{2t+1}\,dt$

d) $G(x)=\displaystyle\int_{0}^{2x}e^{t^2}\,dt$

a) $G'(x)=\frac{1}{x+5}$

b) $G'(x)=\frac{2x}{x^2+5}$

c) $G'(x)=2x\,e^{2x^2+1}-e^{2x+1}$

d) $G'(x)=2\,e^{4x^2}$

Áreas

24 **Dada la función $f(x)=x-4+\frac{16}{x+4}$, calcula el área limitada por la gráfica de la función, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.**

Sol: 0,487 u^2 aprox

25 Sabiendo que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(1, -4)$ y que su función derivada es $f'(x) = 2x - 2$:

a) **Determina la expresión de $f(x)$.**

b) **Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas X.**

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $\frac{32}{3}$ u^2

26 Se sabe que cierta función derivable $F(x)$ verifica las condiciones $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ y $F(1) = 3$.

a) **Calcula $F(x)$.**

b) **Calcula el área delimitada por $F(x)$ y el eje X desde $x = 0$ hasta $x = 1$.**

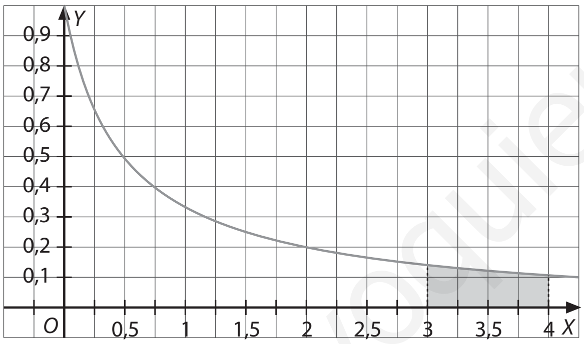
a) $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3}$

b) $\frac{17}{7}$

27 Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{x^2}$ en $x \geq 0$, el eje de abscisas y la recta vertical $x = 1$.

Sol: $\frac{e-1}{2}$ u^2

28 La gráfica de $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ para $x > 0$, es:



a) **Halla una primitiva de f.**

b) **Calcula el área de la región sombreada.**

a) $F(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2}$

b) $\ln\frac{3\sqrt{7}}{7}$ u^2

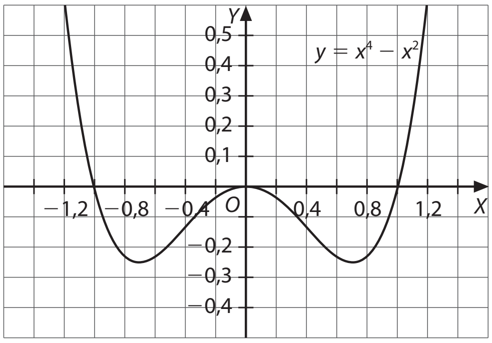
29 Buscando sus extremos relativos y sus puntos de corte con los ejes, realiza una representación aproximada de la curva de ecuación $y = x^4 - x^2$. A continuación, calcula el área encerrada por esta curva y el eje de abscisas.

Sol: En $(0, 0)$ tenemos un máximo relativo.

En $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ tenemos un mínimo relativo.

En $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ tenemos un mínimo relativo.

Los puntos de corte son: $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$



$A = \frac{4}{15}$ u^2

30 Dada la función $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}}$, se pide:

a) **Dibuja su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.**

b) **Calcula el área comprendida entre el eje X y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.**

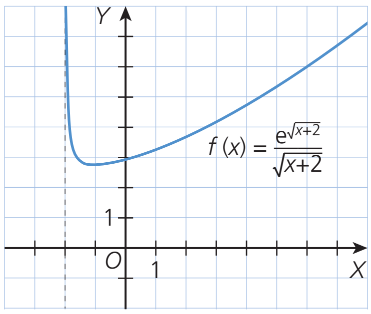
a) Dominio: $(-2, +\infty)$

Asíntota vertical $x = -2$

$f(x)$ decrece en $(-2, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$.

Mínimo relativo (y absoluto) en $(-1, e)$.

Es siempre cóncava, y por lo tanto no tiene puntos de inflexión.



b) 5,868 u^2

31 Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x + 4}$ calcula el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje X.

Sol: 17,18 u^2

32 Calcula el área del recinto que está limitado por las curvas $y = x^2 + 2x - 1$ e $y = -x^2 + 3$.

Sol: 9 u^2

33 Calcula el área comprendida entre las gráficas de $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 5$ en el primer cuadrante.

Sol: 12,17 u^2

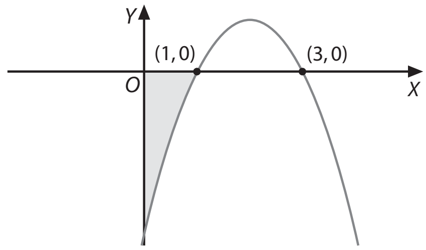
34 Determina el área encerrada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt[3]{x}$ en el primer cuadrante.

Sol: $\frac{1}{2}$ u^2

35 Calcula el área del recinto de $\mathbb{R}^2$ limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = x^2$ cuando se consideran valores de $x \leq 0$.

Sol: $\frac{5}{12}$ u^2

36 En la figura aparece una curva que representa una función polinómica de grado dos. Los puntos de intersección de la curva con el eje X son el (1, 0) y el (3, 0). Además, el área limitada por la curva y los dos ejes de coordenadas vale 4/3 u^2. Halla la expresión de la función polinómica.



Sol: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

37 Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = \frac{1}{x+1}$.

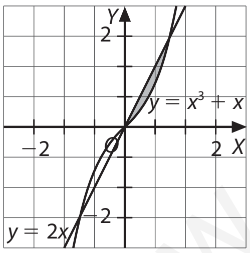
Sol: 0,526 u^2

38 Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ y el eje de abscisas.

Sol: $\frac{10}{3}$ u^2

39 Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abscisa x es positiva, por la curva $y = x^3 + x$ y por la recta $y = 2x$. Calcula su área.

Sol:



A = 0,25 u^2

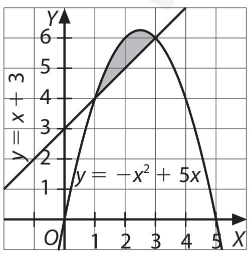
40 Dadas las funciones:

- $f(x) = -x^2 + 5x$
- $g(x) = x + 3$

a) Dibuja el recinto plano limitado por las funciones.

b) Halla su área.

a)



b) $\frac{4}{3}$ u^2

41 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$. Calcula el área del recinto limitado por la tangente y la curva dada.

Sol: La recta tangente es $y = 2$.

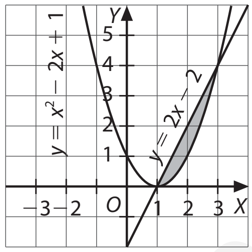
$A =$ 6,75 u^2

42 Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y el segmento que une los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$.

Sol: $\frac{2}{e}$

43 La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 4)$ limitan un recinto finito del plano. Traza un esquema gráfico de dicho recinto y calcula su área.

Sol: $A = \frac{4}{3}$ u^2



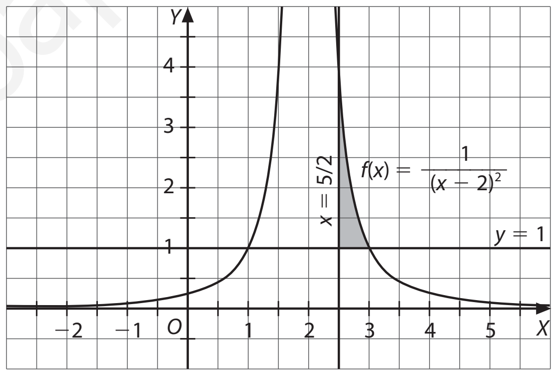
44 ***a)*** Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

b) Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = \frac{5}{2}$.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

Asíntota vertical: $x = 2$ Asíntota horizontal: $y = 0$

En $(-\infty, 2)$ la función es creciente, en $(2, +\infty)$ la función es decreciente. No hay extremos.

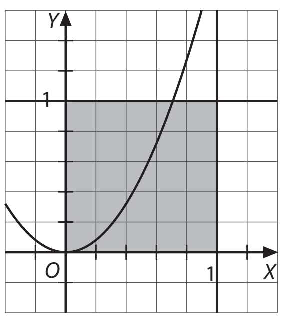


b) 0,5 u^2

45 La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0, 0)$, $B(1,0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$ en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos. ***b)*** Halla el área de cada uno.

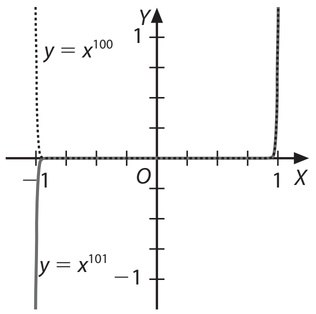
a)



b) $A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ u^2 $A_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$ u^2

46 **Haz un dibujo del recinto limitado por las curvas $y = x^{100}$ y $y = x^{101}$. Calcula el área de este recinto.**

Sol:



$A = \dfrac{1}{10\,302}$ u^2

47 **Calcula el área que, en el primer cuadrante, delimitan las curvas $y = x^2$, $y = 4x^2$ e $y = 16$.**

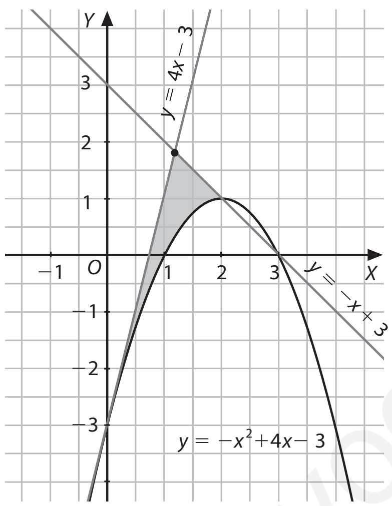
Sol: $A = \dfrac{64}{3}$ u^2

48 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $y = 0$, $y = \ln 3$ y $x = 0$.**

Sol: 2 u^2

49 **Dibuja el recinto limitado por $y = -x^2 + 4x - 3$, su recta tangente en el punto $P(0, -3)$ y la recta $y = -x + 3$. Calcula su área.**

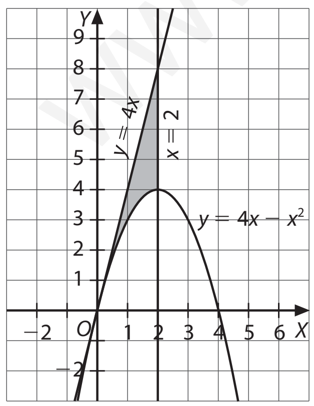
Sol:



$A = \dfrac{16}{15}$ u^2

50 **Calcula el área de la región plana limitada por la parábola $y = 4x - x^2$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Dibuja también esta región.**

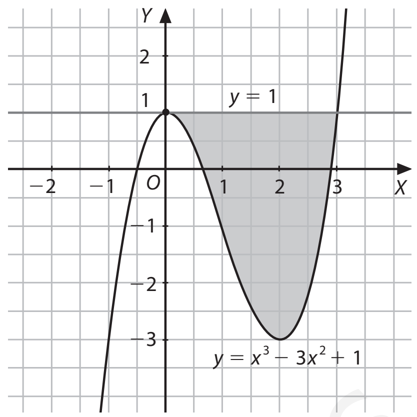
Sol:



$A = \dfrac{8}{3}$ u^2

51 **Halla el área limitada por $y = x^3 - 3x^2 + 1$ y la recta tangente a la misma en el punto en que alcanza su máximo relativo. Dibuja el recinto.**

Sol:



$A = \dfrac{27}{4}$ u^2

52 **Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $xy = 1$ y la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$ que pase por el punto de coordenadas (1, 1).**

Sol: $A = \left(\dfrac{3}{4} - \ln 2\right)$ u^2

Volúmenes

53 **Calcula el volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto limitado por la curva $y = x(x - 1)$ y el eje de abscisas, al girar alrededor de dicho eje.**

Sol: $\dfrac{\pi}{30}$ u^3

54 **Calcula el volumen del casquete parabólico generado por la parábola $y = 3x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$, al girar alrededor del eje X.**

Sol: $\dfrac{288\,\pi}{5}$ u^3

55 **Calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ alrededor del eje X.**

Sol: 2,10 u^3

56 **Calcula el volumen que engendra la figura del plano delimitada por la hipérbola $xy = 1$ y la circunferencia centrada en el origen de radio $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ en el primer cuadrante.**

Sol: $9/4\pi$ u^3

Actividades de aplicación

57 **Determina:**

a) **Los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$.**

b) **Una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y $F(0) = 4$.**

a) En $x = 1$ hay un máximo relativo y en $x = -1$ un mínimo relativo.

$x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$ son puntos de inflexión.

b) $F(x) = 3x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 4.$

58 Se sabe que la gráfica de una función pasa por el punto (1, 1) y que $f'(1) = 2$. Se conoce también que su derivada segunda es la función $g(x) = 2$. Calcula la función f.

Sol: $f(x) = x^2$.

59 Halla $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

$$\text{Sol: } f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1.$$

60 Determina la función $F(x)$ que:

- $F'(x) = 2x - 6$
- La gráfica de la función $F(x)$ presenta un mínimo en el punto de ordenada -1.

Sol: $F(x) = x^2 - 6x + 10$

61 Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (1, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es $m = 3x + 1$.

Sol: $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + x - \dfrac{3}{2}$

62 Halla la ecuación de la curva $y = f(x)$ que cumple que $f''(x) = 4$, y la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ tiene por ecuación $y = 9x - 13$.

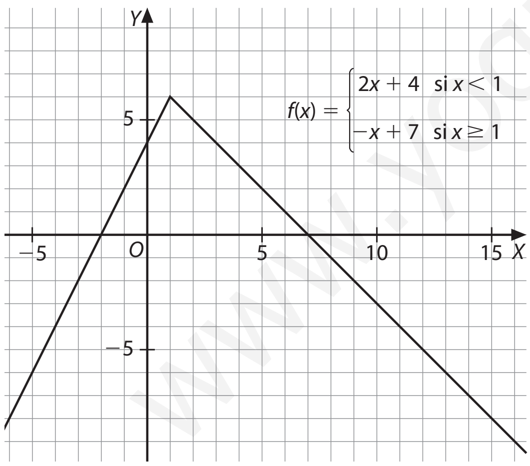
Sol: $y = 2x^2 - 3x + 5$

63 De una función $y = f(x)$ sabemos:

- Su dominio de definición es todo $\mathbb{R}$.
- Su función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- $f(x)$ es continua en todo punto y $f(-1) = 2$.

Determina el valor de $f(1)$ y dibuja la gráfica de la función $f(x)$.

Sol: $f(1) = 6$.



Ejercicios de aplicación

64 Considera la función $f(x) = x^2 + |x|$.

a) Calcula los puntos en que la gráfica corta a los ejes.

b) Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos), así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento f.

c) Dibuja la gráfica de f.

d) Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

a) $f(x)$ corta a los ejes en (0, 0).

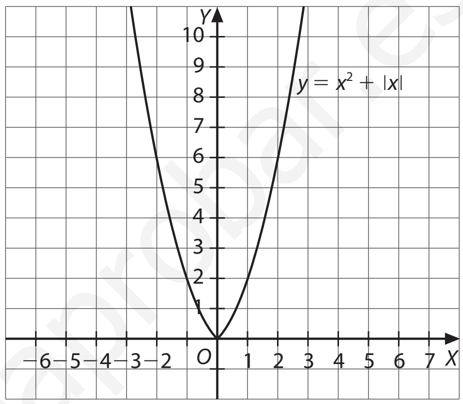
b) En $x = 0$ hay un punto anguloso.

$f(x)$ decrecen en $x < 0$

$f(x)$ crecen en $x > 0$

En $x = 0$, $y = 0$, es un mínimo absoluto: $m(0, 0)$

c)



d) $\dfrac{11}{2}$

65 Dadas $f(x) = x^2 - ax - 4$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + b$.

a) Calcula a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = 3$, es decir, que tengan la misma tangente en este punto.

b) Halla la ecuación de la recta tangente del apartado ***a)***.

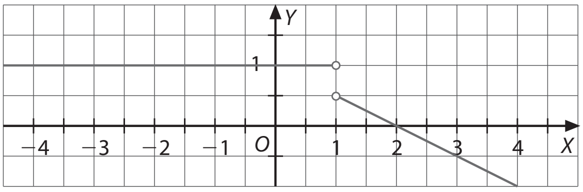
c) Para el valor de a obtenido en el primer apartado, calcula el valor del área de la región limitada por el eje de abscisas y la función $f(x)$.

a) $a = 3$, $b = -\dfrac{17}{2}$

b) $y = 3x - 13$

c) $\dfrac{125}{6}\ u^2$

66 **La función derivada $f'(x)$ de una cierta función continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función a trozos formada por las semirrectas del dibujo.**



a) **Determina si es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y por qué.**

b) **Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.**

c) **Averigua si $f(x)$ tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de que tipo.**

d) **Sabiendo que $f(0) = 1$, calcula $f(1)$.**

a) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) La función crece para los valores $x \in (-\infty, 2)$ y decrece si $x \in (2, +\infty)$.

c) Para $x = 2$ tenemos un máximo relativo.

d) $f(1) = 2$

67 **Los beneficios de una empresa, en miles de euros por año, se ajustan a la siguiente función:**

$$B(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$$

¿A cuánto ascienden los beneficios acumulados en los cinco primeros años de vida de la empresa?

Sol: 4 952,50 €.

68 **Un proyectil se lanza desde un avión con velocidad, en m/s, de ecuación $v(t) = 10 + 32t$. Si a los 10 s todavía no ha llegado al suelo, ¿qué se puede afirmar sobre la altura a la que va el avión?**

Sol: La altura a la que va el avión es superior a los 1 700 m.

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso.

69 **Si $F'(x) = \frac{1}{2}x + 2$ y la gráfica de $F(x)$ presenta un mínimo en el punto de ordenada −4, entonces:**

a) $F(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$

c) $F(x) = \frac{x^2}{4} + 8x + 2$

d) $F(x) = \frac{x^2}{4} + 2x + 8$

Sol: La respuesta correcta es la ***d)***.

70 **En un plano el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje X. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?**

a) **15 600 €**

b) **16 000 €**

c) **23 300 €**

Sol: La respuesta correcta es la ***b)***.

Evaluación

1. **Calcula una primitiva de la función: $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - \ln x^2}}$**

Sol: $-\sqrt{1 - \ln x^2} + C$

2. **Resuelve las siguientes integrales.**

a) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{x - 1/2}{x(x-1)}\,dx$ ***c)*** $\displaystyle\int \frac{x+1}{3x^2 + 6x}\,dx$

a) $2e^{\sqrt{x}} + C$ ***b)*** $\frac{1}{2}\ln(x^2 - x) + C$ ***c)*** $\frac{1}{6}\ln(x^2 + 2x) + C$

3. **Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, halla la suma superior y la suma inferior correspondientes a dicha partición y dicho intervalo.**

Sol: Suma superior: 14

Suma inferior: 1

4. **Halla el valor medio de la función $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 2]$.**

Sol: 2,07 aprox

5. **Encuentra el punto en el que se alcanza el valor medio de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ en el intervalo $[-2, 1]$.**

Sol: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

6. **Determina la derivada de la función $G(x) = \int_4^{x+3} \frac{1}{t-3}$ en $x = 2$.**

Sol: $G'(2) = \frac{1}{2}$

7. **Calcula el área limitada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.**

Sol: $\frac{3}{2}\,\text{u}^2$

8. **Halla el área de la región del plano delimitada por la curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ y las rectas $y = x + 1$ y $x = 3$.**

Sol: 9,751611… u^2

9. **Determina la función cuya derivada segunda es 6 sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 0)$ y en dicho punto la pendiente de su recta tangente es -4.**

Sol: $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

10. **Averigua la ecuación de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que en el punto de abscisa $x = -1$ tiene por tangente la recta $y = -x + 3$, y $f''(x) = 3$.**

Sol: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

11. **Determina una constante positiva, a, sabiendo que la figura plana delimitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$, tiene área $A = (a^2 - 1)^2$.**

Sol: $a = \sqrt{3}/3$

12. **La evolución de la demanda de un producto, en miles de artículos, en los cinco años transcurridos desde su aparición en el mercado, viene dada por la expresión $d(t) = 16e^{-0,1t}$, donde t expresa el tiempo, contado por semestres. Encuentra:**

a) **El número de artículos demandados durante los tres primeros años.**

b) **La demanda media de artículos durante los dos últimos años.**

a) Unos 72 190 artículos.

b) Una media anual de 28 949 artículos.