

Polinomios

□ 23. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $2x^2y - 5x^3y + \frac{3}{4}x^3y$ c) $\frac{-3a(a^2b) + 5a^4b}{-ab^3}$

b) $(2xy)(-3x^2yz)\left(\frac{5}{6}x^2yz^2\right)$ d) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y}$

□ 24. Escribe un polinomio completo de grado 4 con dos indeterminadas.

□ 25. Evalúa el polinomio $P(x) = -x^3 - 2x^2 + x - 3$ en:

- a) $x = 1$ c) $x = -2$ e) $x = -3$
b) $x = -1$ d) $x = 2$

□ 26. Escribe un polinomio de grado 5 que verifique las siguientes condiciones:

- El coeficiente líder es 4.
- El término independiente es -3 .
- El coeficiente de grado 2 es 1.
- No tiene término de grado 3.

Operaciones con polinomios

□ 27. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

- a) $(3x^3 - 5x^2 + 3x) + (2x^3 + 3x^2) - (5x^3 - 4x^2 + 3x)$
b) $2x(-x^2 + 5x - 3) - x(3x + 1)(x - 3)$
c) $(2x - 1)(3x - x^2) + 5x(2x - 3)$
d) $4x - x(2x^2 - 3x)(x - 2) + (5x - 2)(3 - x^2)$

□ 28. Sean los polinomios:

$P(x) = -x^2 + 5x - 2$ $R(x) = 3x^2 - x + 1$
 $Q(x) = 3x^2 - 2x$ $S(x) = 2x - 3$

Calcula:

- a) $P(x) + Q(x) - R(x)$
b) $Q(x) - P(x) \cdot S(x)$
c) $P(x) \cdot R(x) - Q(x) \cdot S(x)$

■ 29. Realiza las siguientes divisiones de polinomios:

- a) $(-3x^5 + 11x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 26x - 10) : (3x^2 - 5x + 3)$
b) $(-12x^5 - 18x^4 + 8x^3 + 27x^2 + 6x - 11) : (-6x^2 - 3x + 2)$
c) $(-6x^7 - x^5 + 40x^3 - 2x + 5) : (-x^2 + 5)$

■ 30. Simplifica:

$$2x^2y(-3xy^2 + 2x^2 - y^2) + 3xy^3(2x^2 - 5xy)$$

Identidades notables. Factor común

□ 31. Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones:

- a) $(x + 4)^2$ d) $(3x + 7)(3x - 7)$
b) $(x - 5)^2$ e) $(-x + 3)(x + 3)$
c) $(x^3 - 3)^2$ f) $(x - 3)(3 - x)$

■ 32. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

- a) $(2x - 3)^2$ e) $(-3x - 5)^2$
b) $(-2x + 5)^2$ f) $(-3x - 2)(3x + 2)$
c) $(3x^2 + x^3)^2$ g) $(3x^2 - 2x)(2x + 3x^2)$
d) $(-5x - 6)^2$ h) $(2x^2 + 5x)(-5x + 2x^2)$

■ 33. Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables:

- a) $\left(x - \frac{1}{5}\right)^2$ d) $\left(-\frac{x}{2} + 3\right)\left(3 + \frac{x}{2}\right)$
b) $\left(2x + \frac{3}{2}\right)^2$ e) $\left(-\frac{3}{2}x - 5\right)^2$
c) $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x\right)^2$ f) $\left(-\frac{3}{4}x^3 - 3x\right)\left(\frac{3}{4}x^3 + 3x\right)$

■ 34. Opera y simplifica utilizando las identidades notables:

- a) $(x + 1)^2 + (x - 2)(x + 2)$
b) $(3x - 1)^2 - (2x + 5)(2x - 5)$
c) $(2x + 3)(-3 + 2x) - (x + 1)^2$
d) $(-x + 2)^2 - (2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1)$
e) $-3x + x(2x - 5)(2x + 5) - (1 - x^2)^2$
f) $(3x - 1)^2 - (-5x^2 - 3x)^2 - (-x + 2x^2)(2x^2 + x)$

■ 35. Expresa en forma de producto o de cuadrado utilizando las identidades notables:

- a) $x^2 - 6x + 9$ c) $x^4 - 4x^2 + 4$
b) $x^2 + 10x + 25$ d) $4x^2 - 4x + 1$

■ 36. Expresa en forma de producto o de cuadrado utilizando las identidades notables:

- a) $x^2 - 9$ d) $81 - 4x^2$
b) $x^2 + 6x + 9$ e) $x^4 + 2x^2 + 1$
c) $x^4 - 9$ f) $9x^4 - 30x^3 + 25x^2$

□ 37. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

- a) $-3x + 6x^2 + 12x^3$
b) $2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3$
c) $2x^3 + 4x^2 - 8x$
d) $6x^3y^2 - 3x^2yz + 9xy^3z^2$

Polinomios.

23. a) $2x^3y - 5x^3y + \frac{3}{4}x^3y = \frac{8}{4}x^3y - \frac{20}{4}x^3y + \frac{3}{4}x^3y = -\frac{9}{4}x^3y$

b) $(2xy) \cdot (-3x^2yz) \cdot \left(\frac{5}{6}x^2yz^2\right) = -5x^5y^2z^3$

c) $\frac{-3a(a^2b) + 5a^4b}{-ab^3} = \frac{-3a^3b + 5a^4b}{-ab^3} = \frac{3a^2 - 5a^3}{b^2}$

d) $\frac{-3xy^2(-2x^3y)}{4x^2y} = \frac{6x^4y^3}{4x^2y} = \frac{3x^2y^2}{2}$

24. Un polinomio completo es aquel que tiene términos en todos los grados. Así:

$$P(x,y) = 4x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 - 2y^4 + 4x^3 - x^2y + 4xy^2 - xy^2 + 2y^3 + 2x^2 - xy - 5y^2 - 2x - y + 13.$$

25. $P(x) = -x^3 - 2x^2 + x - 3.$

a) $P(1) = -1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 - 3 = -1 - 2 + 1 - 3 = -5.$

b) $P(-1) = -(-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 3 = 1 - 2 - 1 - 3 = -5.$

c) $P(-2) = -(-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 3 = 8 - 8 - 2 - 3 = -5.$

d) $P(2) = -2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 3 = -8 - 8 + 2 - 3 = -11.$

e) $P(-3) = -(-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 + (-3) - 3 = 27 - 18 - 3 - 3 = 3$

26. Si el coeficiente líder es cuatro y el polinomio es de grado 5, entonces el término de mayor grado es : $4x^5$.

Si el coeficiente de grado dos es uno, entonces, el sumando de grado dos es x^2 .

Como el polinomio no tiene término en grado tres y su término independiente es -3, entonces, el polinomio más sencillo que cumple estas condiciones es:

$$P(x) = 4x^5 + x^2 - 3.$$

Podríamos añadirle cualquier término de grado 4, pero nunca de tercer grado.

Operaciones con polinomios.

27. a) $(3x^3 - 5x^2 + 3x) + (2x^3 + 3x^2) - (5x^3 - 4x^2 + 3x) = 2x^2$

b) $2x \cdot (-x^2 + 5x - 3) - x \cdot (3x + 1)(x - 3) = -2x^3 + 10x^2 - 6x - (3x^3 - 8x^2 - 3x) = -2x^3 + 10x^2 - 6x - 3x^3 + 8x^2 + 3x = -5x^3 + 18x^2 - 3x$

c) $(2x - 1) \cdot (3x - x^2) + 5x \cdot (2x - 3) = 7x^2 - 2x^3 - 3x + 10x^2 - 15x = -2x^3 + 17x^2 - 18x$

d) $4x - (2x^3 - 3x^2) \cdot (x - 2) + 15x - 5x^3 - 6 + 2x = 4x - (2x^4 - 7x^3 + 6x^2) + 15x - 5x^3 - 6 + 2x = 4x - 2x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 15x - 5x^3 - 6 + 2x = -2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 21x - 6$

28. a) $P(x) + Q(x) - R(x) = (-x^2 + 5x - 2) + (3x^2 - 2x) - (3x^2 - x + 1) = 2x^2 + 3x - 2 - 3x^2 + x - 1 = -x^2 + 4x - 3$

b) $Q(x) - P(x) \cdot S(x) = (3x^2 - 2x) - (-x^2 + 5x - 2) \cdot (2x - 3) = 3x^2 - 2x - (-2x^3 - 7x^2 - 15x - 10) = 3x^2 - 2x + 2x^3 + 7x^2 + 15x + 10 = 2x^3 + 10x^2 + 13x + 10$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(x) \cdot R(x) - Q(x) \cdot S(x) &= (-x^2 + 5x - 2) \cdot (3x^2 - x + 1) - (3x^2 - 2x) \cdot (2x - 3) = \\ &= -3x^4 + 16x^3 - 12x^2 + 7x + 1 - (6x^3 - 13x^2 + 6x) = \\ &= -3x^4 + 10x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{29. a) } (-3x^5 + 11x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 26x - 10) : (3x^2 - 5x + 3) &= -x^3 + 2x^2 + 3x - 4 \\ R(x) &= -3x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-12x^5 - 18x^4 + 8x^3 + 27x^2 + 6x - 11) : (-6x^2 - 3x + 2) &= 2x^3 + 2x^2 - \frac{5}{3}x - 3 \\ R(x) &= \frac{x}{3} - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (-6x^7 - x^5 + 40x^3 - 2x + 5) : (-x^3 + 5) &= 6x^4 + x^2 + 30x - 40 \\ R(x) &= -5x^2 - 152x + 205 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{30. } (2x^2y) \cdot (-3xy^2 + 2x^2 - y^2) + 3xy^3 \cdot (2x^2 - 5xy) &= -6x^3y^3 + 4x^4y - 2x^2y^3 + 6x^3y^3 - 15x^2y^4 = \\ &= 4x^4y - 2x^2y^3 - 15x^2y^4 = x^2y \cdot (4x^2 - 2y^2 - 15y^3) \end{aligned}$$

Identidades notables. Factor común.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

31.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dadas las siguientes igualdades notables:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$\text{a) } (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$\text{b) } (x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$\text{c) } (x^3 - 3)^2 = x^6 - 6x^3 + 9$$

$$\text{d) } (3x + 7) \cdot (3x - 7) = 9x^2 - 49$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (-x + 3) \cdot (x + 3) &= (3 - x) \cdot (3 + x) = \\ &= 9 - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (x - 3) \cdot (3 - x) &= -(3 - x) \cdot (3 - x) = \\ &= -(3 - x)^2 = -(9 - 6x + x^2) = -x^2 + 6x - 9 \end{aligned}$$

$$\text{32. a) } (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\text{b) } (-2x + 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\text{c) } (3x^2 + x^3)^2 = 9x^4 - 6x^5 + x^6$$

$$\text{d) } (-5x - 6)^2 = 25x^2 + 60x + 36$$

$$\text{e) } (-3x - 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

$$\text{f) } (-3x - 2) \cdot (3x + 2) = -(3x + 2)^2 = -(9x^2 + 12x + 4) = -9x^2 - 12x - 4$$

$$\text{g) } (3x^2 - 2x) \cdot (2x + 3x^2) = (3x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2x) = 9x^4 - 4x^2$$

$$\text{h) } (2x^2 + 5x) \cdot (-5x + 2x^2) = (2x^2 + 5x) \cdot (2x^2 - 5x) = 4x^4 - 25x^2$$

$$\text{33. a) } \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$$

$$\text{b) } \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 = 4x^2 + 6x + \frac{9}{4}$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x\right)^2 = \frac{4}{9}x^6 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{6}x^2$$

$$\text{d) } \left(-\frac{x}{2} + 3\right) \cdot \left(3 + \frac{x}{2}\right) = \left(3 - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(3 + \frac{x}{2}\right) = 9 - \frac{x^2}{4}$$

$$e) \left(-\frac{3}{2}x - 5\right)^2 = \frac{9}{4}x^2 + 15x + 25$$

$$f) \left(-\frac{3}{4}x^3 - 3x\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x^3 + 3x\right) = -\left(\frac{3}{4}x^3 + 3x\right)^2 = -\left(\frac{9}{16}x^6 + \frac{9}{2}x^4 + 9x^2\right) = -\frac{9}{16}x^6 - \frac{9}{2}x^4 - 9x^2$$

$$34. a) (x+1)^2 + (x-2) \cdot (x+2) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4 = 2x^2 + 2x - 3$$

$$b) (3x-1)^2 - (2x+5) \cdot (2x-5) = 9x^2 - 6x + 1 - (4x^2 - 25) = 9x^2 - 6x + 1 - 4x^2 + 25 = 5x^2 - 6x + 26$$

$$c) (2x+3) \cdot (-3+2x) - (x+1)^2 = (2x+3) \cdot (2x-3) - (x+1)^2 = (4x^2 - 9) - (x^2 + 2x + 1) = 4x^2 - 9 - x^2 - 2x - 1 = 3x^2 - 2x - 10$$

$$d) (-x+2)^2 - (2x+1)^2 - (x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 4x + 4 - (4x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 1) = x^2 - 4x + 4 - 4x^2 - 4x - 1 - x^2 + 1 = -4x^2 - 8x + 4$$

$$e) -3x + x \cdot (2x-5) \cdot (2x+5) - (1-x^2)^2 = -3x + x \cdot (4x^2 - 25) - (1 - 2x^2 + x^4)$$

$$= -3x + 4x^3 - 25x - 1 + 2x^2 - x^4 = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 28x - 1$$

$$f) (3x-1)^2 - (-5x^2 - 3x)^2 - (-x + 2x^2) \cdot (2x^2 + x) = 9x^2 - 6x + 1 - (25x^4 + 30x^3 + 9x^2) - (4x^4 - x^2) =$$

$$9x^2 - 6x + 1 - 25x^4 - 30x^3 - 9x^2 - 4x^4 + x^2 = -29x^4 - 30x^3 + x^2 - 6x + 1$$

35.

$$a) x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$c) x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$$

$$b) x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

$$d) 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$$

36.

$$a) x^2 - 9 = (x-3) \cdot (x+3)$$

$$d) 81 - 4x^2 = (9-2x) \cdot (9+2x)$$

$$b) x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$e) x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$c) x^4 - 9 = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 3)$$

$$f) 9x^4 - 30x^3 + 25x^2 = x^2 \cdot (9x^2 - 30x + 25) = x^2 \cdot (3x-5)^2$$

37.

$$a) -3x + 6x^2 + 12x^3 = 3x \cdot (-1 + 2x + 4x^2)$$

$$b) 2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3 = 2ab \cdot (b - 2a^2 + 4a^3b^2)$$

$$c) 2x^3 + 4x^2 - 8x = 2x \cdot (x^2 + 2x - 4)$$

$$d) 6x^3y^2 - 3x^2yz + 9xy^3z^3 = 3xy \cdot (2x^2y - xz + 3y^2z^3)$$