PROPUESTA A

1A. a) Estudia la continuidad en todo R de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. (1,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x)=xe^{-x}$. (1 punto)

a)

$$x^2-1=0\rightarrow(x-1)(x+1)=0\rightarrow\begin{cases} x-1=0\rightarrow x=1\rightarrow f(1)=\dfrac{2\cdot1^3-1^2-1}{1^2-1}=\dfrac{0}{0}\rightarrow Evitable \\ x+1=0\rightarrow x=-1\rightarrow f(-1)=\dfrac{2\cdot(-1)^3-(-1)^2-(-1)}{(-1)^2-1}=-\dfrac{0}{0}\rightarrow Inevitable \end{cases}$$

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Por\ L'Hopital}=\lim_{x\to1}\frac{6x^2-2x-1}{2x}=\frac{6\cdot1^2-2\cdot1-1}{2\cdot1}=\frac{3}{2}$$

$$Dom\ f(x)=\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}=\begin{cases}\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1} & ,si\ \ x<-1\\ \dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1} & ,si\ \ 1<x<1\\ \dfrac{3}{2} & ,si\ \ x=1\\ \dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1} & ,si\ \ x>1\end{cases}$$

b)

$$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)\rightarrow Creciente\rightarrow g'(x)>0\rightarrow\begin{cases} e^{-x}>0\rightarrow\forall x\in\mathbb{R}\\ 1-x>0\rightarrow -x>-1\rightarrow x<1\end{cases}$$

$e^{-x}>0$	**(+)**	**(+)**
$x<1$	**(+)**	**(-)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Creciente $\forall x\in\mathbb{R}/x<1$ **Decreciente** $\forall x\in\mathbb{R}/x>1$

Máximo relativo en $x=1\rightarrow g(1)=1e^{-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ **De Creciente pasa a decreciente**

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones f(x) = 16 - x² y g(x) = (x + 2)² - 4. (1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = 16 - x² en el punto de abscisa x = 1. (1 punto)
a)

$$Puntos\,de\,corte\,con\,OX \rightarrow y=0 \rightarrow \begin{cases} 16-x^2=0 \rightarrow (4-x)(4+x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=4 \end{cases} \\ (x+2)^2-4=0 \rightarrow x^2+4x+4-4=0 \rightarrow (x+4)x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\,de\,corte\,entre\;\;funciones \rightarrow 16-x^2=x^2+4x \rightarrow 2x^2+4x-16=0 \rightarrow 2\left(x^2+2x-8\right)=0 \rightarrow$$

$$x^2+2x-8=0 \rightarrow \Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=36\geq 0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot1} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{-2+6}{2}=2 \\ x=\frac{-2-6}{2}=-4 \end{cases}$$

Los intervalos de integración son de (-4 , 0) y de (0 , 2)

$$x=-2\in(-4,0) \rightarrow \begin{cases} f(-2)=16-(-2)^2=16-4=12 \rightarrow f(x)>0 \\ g(-2)=(-2+2)^2-4=-4 \rightarrow g(x)<0 \end{cases}$$

$$x=1\in(0,2) \rightarrow \begin{cases} f(1)=16-1^2=16-1=15 \\ g(1)=(1+2)^2-4=9-4=5 \end{cases} \rightarrow 15>5 \rightarrow f(x)>g(x)$$

$$A=\int_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx+\left|\int_{-4}^{0}\left[(x+2)^2-4\right]dx\right|+\int_{0}^{2}\left(16-x^2\right)dx-\int_{0}^{2}\left[(x+2)^2-4\right]dx$$

$$A=\int_{-4}^{2}\left(16-x^2\right)dx-\int_{-4}^{0}\left(x^2+4x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^2+4x\right)dx=\int_{-4}^{2}\left(16-x^2\right)dx-\int_{-4}^{2}\left(x^2+4x\right)dx$$

$$A=\int_{-4}^{2}\left(16-2x^2-4x\right)dx=16\cdot[x]_{-4}^{2}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-4}^{2}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-4}^{2}$$

$$A=16\cdot\left[2-(-4)\right]-\frac{2}{3}\cdot\left[2^3-(-4)^3\right]-2\cdot\left[2^2-(-4)^2\right]=$$

$$A=16\cdot6-\frac{2}{3}\cdot\left[8-(-64)\right]-2\cdot(4-16)=96-\frac{2}{3}\cdot72-2\cdot(-12)$$

$$A=96-2\cdot24-(-24)=96-48+24=72\,u^2$$

b)

$$g'(x)=-2x \rightarrow \begin{cases} g(1)=16-1^2=15 \\ m=g'(1)=-2.1=-2 \rightarrow m_n=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{(-2)}=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow y-15=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{x-1}{2}+15 \rightarrow y=\frac{x+29}{2} \rightarrow 2y=x+29 \rightarrow x-2y+29=0$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-(a-2)y-z=1 \\ x-2y+z=-4 \\ x-3y+az=-a^2 \end{cases}$$ (1,5 puntos)

b) Resuélvelo razonadamente para el valor **a = 3**. (1 punto)

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -(a-2) & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -(a-2)+2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 4-a & -2 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = -[(4-a)(a-1)-2] =$$

$$|A| = 4a-a^2-4+a-2 \to -a^2+5a-6 \to Si\ |A|=0 \to -a^2+5a-6=0 \to a^2-5a+6=0 \to$$

$$\Delta = (-5)^2-4\cdot 1\cdot 6 = 1 \ge 0 \to a = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} \to \begin{cases} a = \frac{5+1}{2} = 3 \\ a = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \to$$

$$\forall a \in \mathbb{R}-\{2,3\} \to rang(A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \to Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 6 & -10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$rang(A) = 2 \ne rang(A/B) = 3 \to Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$rang(A) = rang(A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \to Sistema\ Compatible\ Indeter\min ado$$

$b)$

$$Si\ a=3 \to Sistema\ Compatible\ Indeter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to -y+2z=-5 \to y=5+2z \to x-5-2z-z=1 \to x=6+3z$$

$$Solución \to (x\ ,\ y\ ,\ z) = (6+3\lambda\ ,\ 5+2\lambda\ ,\ \lambda)$$

4A. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a) Determina razonadamente la posición relativa de **r** y π. (1,25 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta **r**. (1,25 puntos)

a) Una recta y un plano pueden ser paralelos o estar contenida la recta en el plano, cuando eso pasa los vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo, además si un punto cualquiera de la recta **r** pertenece al plano la recta está contenida en el plano, de no ser así son paralelos.
Si el producto escalar no es nulo la recta y el plano tienen un punto de intersección
El vector director del plano es el producto vectorial de los vectores que lo forman

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - \vec{k} - \vec{k} + 2\vec{i} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2, 2, -2) \equiv (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 2) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1) \cdot (-1, 1, 2) = -1 + 1 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow$$

Tienen como intersección un punto

b)
El plano β contiene al vector director del plano π, al de la recta **r** y al vector **RG**, siendo R un punto cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y el punto G el genérico del plano buscado; estos tres vectores son coplanarios y su producto mixto es nulo y la ecuación del plano pedido ya que el paralelepípedo que forman no tiene volumen alguno

$$Siendo\ R(1, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 2) \\ \overrightarrow{RG} = (x, y, z) - (1, 0, 0) = (x-1, y, z) \end{cases} \rightarrow$$

$$\beta = \overrightarrow{v_\pi} \cdot \left(\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{RG} \right) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2 \cdot (x-1) + y + z + z + (x-1) - 2y = 0 \rightarrow$$

$$3 \cdot (x-1) - y + 2z = 0 \rightarrow \beta \equiv 3x - y + 2z - 3 = 0$$

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son p(A) = 0,75 y p(B) = 0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:
a1) Si A y B fuesen independientes. (0,75 puntos)
a2) Si P(A/B) = 0'6. (0,5 puntos)
Nota: P(A/B) denota la probabilidad condicionada.

b) El 1% de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:
b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. (0,75 puntos)
b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? (0,5 puntos)

a)
Del problema tenemos, con p(A) = 0'75, p(B) = 0'35.
a1)
Si A y B fuesen independientes.

Sabemos que $\mathbf{p(A\cap B) =}$ {al ser independientes} $p(A)\cdot p(B) = (0'75)\cdot(0'35)$ **= 0'2625.**

También piden $\mathbf{p(A\cup B) =}$ $p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'75 + 0'35 - 0'2625$ **= 0'8375.**
a2)
Si P(A/B) = 0'6.

Sabemos que $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ de donde $\mathbf{p(A\cap B) =}$ $p(B)\cdot p(A/B) = (0'35)\cdot(0'6)$ **= 0'21.**

También piden $\mathbf{p(A\cup B) =}$ $p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'75 + 0'35 - 0'21$ **= 0'89.**

b)
Recordamos que si realizamos **n** veces (5) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** (p(F) = 1% = 0'01) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0'01 = 0'99), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.
Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(5; 0'01)**.
En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (5\ sobre\ k)\cdot 0'01^{k}\cdot 0'99^{(5-k)} = \binom{5}{k}\cdot 0'01^{k}\cdot 0'99^{(5-k)}.}$$

** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

b1)
Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima.

Recuerdo que algún es lo contario de ninguno.

En nuestro caso piden $\mathbf{1 - p(X = 0) = \binom{5}{0}\cdot 0'01^{0}\cdot 0'99^{5} = 1 - 0'95099 = 0'04901 \cong 0'05.}$

b2)
El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos?

En nuestro caso piden $\mathbf{p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) =}$

$\mathbf{= \binom{5}{3}\cdot 0'01^{3}\cdot 0'99^{2} + \binom{5}{4}\cdot 0'01^{4}\cdot 0'99^{1} + \binom{5}{5}\cdot 0'01^{5}\cdot 0'99^{0} =}$ $0'000009801 + 0'0000000495 +$

$+ 0'0000000001$ $\mathbf{= 0'0000098506 = 0'00.}$

PROPUESTA B

1B. a) Demuestra que la ecuación sen x - 2x + 1 = 0 tiene al menos una solución real en el intervalo [0 , π]. (1,5 puntos)

b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando x $\in$ [-200 , 200]. (1 punto)

a)

Teorema de Bolzano

Si f(x) es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

$$f(x) = sen\ x - 2x + 1 \rightarrow \begin{cases} f(0) = sen\ 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 \\ f(\pi) = sen\ \pi - 2\pi + 1 = -1 - 2\pi + 1 = -2\pi \end{cases}$$

f(x) es continua en el intervalo **[0 , π],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(0) $\neq$ sign f(π)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

b)

Ademas su derivada

$$f'(x) = \cos x - 2 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x = 2 \rightarrow No\ hay\ solución$$

Por lo tanto no hay ni máximos ni mínimos relativos en todo el recorrido de la función siendo, esta, monótona decreciente y por ello tiene un **solo punto de corte** con el eje OX que ya hemos determinado está en el intervalo [0 , π] contenido en el intervalo [-200 , 200].

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales: $\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$ y $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

.

a)

$$\int (x+1)\, e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}\ dx = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} = -(x+2)e^{-x} + K$$

$$\begin{cases} x+1 = u \rightarrow dx = du \\ e^{-x}dx = dv \rightarrow v = \int e^{-x}dx = \int e^{t}\,(-dt) = -\int e^{t}\ dt = -e^{t} = -e^{-x} \end{cases}$$

$$-x = t \rightarrow -dx = dt \rightarrow dx = -\ dt$$

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx = -\left[(x+2)\, e^{-x}\right]_0^1 = -\left[(1+2)\, e^{-1} - (0+2)\, e^{-0}\right] = -\left(\frac{3}{e} - 2 \cdot 1\right) = -\frac{3-2e}{e} = \frac{2e-3}{e}$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{1+t^2}\, 2dt = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\ arc\ tg\ t = 2\ arc\ tg\ \sqrt{x} + K$$

$$t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ dt$$

3B. Dadas matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) Para **a = 1** calcula razonadamente la matriz X que verifica que **X . A = B - X**. (1,5 puntos)

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix}=a\cdot(a+2)\to Si\ \ |A|=0\to a\cdot(a+2)=0\to\begin{cases} a=0 \\ a+2=0\to a=-2 \end{cases}\to$$

$$\forall a\in\mathbb{R}-\{-2\,,0\}\to rang\ (A)=3$$

$$Si\ a=-2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to rang\ (A)=2$$

$$Si\ a=0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\to rang\ (A)=2$$

b) XA + X = B $\to$X (A + I) = B $\to$ X (A + I) (A + I)$^{-1}$ = B (A + I)$^{-1}$ $\to$ X.I = B (A + I)$^{-1}$ $\to$ **X = B (A + I)$^{-1}$**

$$A+I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\to|A+I|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=16\neq 0\to Existe\ (A+I)^{-1}$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{|A+I|}adj\left[(A+I)\right]^t\to\left[(A+I)\right]^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\to adj\left[(A+I)\right]^t=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\to X=B\cdot(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$X=\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

4B. a) Dados los vectores $\vec{u}=(1\,,0\,,2)\,,\vec{v}=(a\,,b\,,1)\;\; y\; \vec{w}=(2\,,5\,,c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1,5 puntos)

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(-1 , 3 ,1) y es perpendicular al plano $\pi \equiv$ x + y + 2z - 3 = 0. Comprueba si los puntos Q(1 , 5 , 5) y R(0 , 4 , 2) pertenecen o no a la recta. (1 punto)

a) Dos vectores son ortogonales o perpendiculares cuando su producto escalar es nulo

$$\vec{u}=(-1\,,0\,,-2)\,,\vec{v}=(a\,,b\,,1)\;\; y\; \vec{w}=(2\,,5\,,c)$$

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow (-1\,,0\,,-2)\cdot(a\,,b\,,1)=0 \rightarrow -a-2=0 \rightarrow a=-2 \\ \vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v} \rightarrow (2\,,5\,,c)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & b & 1 \end{vmatrix}=4\vec{j}-b\vec{k}+2b\vec{i}+\vec{j}=2b\vec{i}+5\vec{j}-bk \rightarrow \begin{cases} 2b=2 \rightarrow b=1 \\ -b=c \rightarrow c=-1 \end{cases} \end{cases}$$

b) El vector director de la recta **r** es el mismo que el del plano, el punto P la define totalmente.

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(1,1,\,2) \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q \rightarrow \begin{cases} 1=-1+\lambda \rightarrow \lambda=2 \\ 5=3+\lambda \rightarrow \lambda=2 \\ 5=1+2\lambda \rightarrow \lambda=\frac{4}{2}=2 \end{cases} \rightarrow Pertenece \\ R \rightarrow \begin{cases} 0=-1+\lambda \rightarrow \lambda=1 \\ 4=3+\lambda \rightarrow \lambda=1 \\ 2=-1+2\lambda \rightarrow 2\lambda=3 \rightarrow \lambda=\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow No\;\, pertenece \end{cases}$$

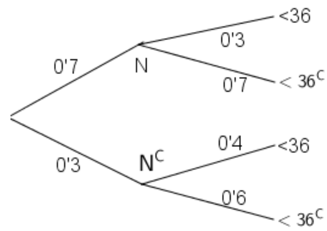
5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70% de los pacientes son niñas. De los niños el 40% son menores de 36 meses y de las niñas el 30% tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Que no tenga menos de 36 meses. (0,75 puntos)
a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. (0,5 puntos)

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 items a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:
b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. (0,75 puntos)
b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. (0,5 puntos)

a)
Llamemos N, N^C, <36 y $<36^C$, a los sucesos siguientes, “ser niña”, "ser niño", "tener menos de 36 meses" y "no tener menos de 36 meses", respectivamente.

Datos del problema p(N) = 70% = 0’7; p(<36/N^C) = 40% = 0’4 ; p(<36/N) = 30% = 0’3, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a1)
Que no tenga menos de 36 meses.

Por el teorema de la Probabilidad Total :
Me piden **p(no tener menos de 36 meses) = $p(<36^C)$ =** $p(N).p(<36^C/N) + p(N^C).p(<36^C/N^C) =$
$= (0'7)\cdot(0'3) + (0'3)\cdot(0'4)$ **= 33/100 = 0'33**.
a2)
Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:
Me piden **p(N/<36) =** $\frac{p(N\cap<36)}{p(<36)} = \frac{p(N)\cdot p(<36/N)}{1 - p(<36^C)} = \frac{(0'7)\cdot(0'3)}{1 - 0'33}$ **= 21/67 ≅ 0'3134**.

b)

Se trata de una distribución normal N(60, 10). Calculemos las probabilidades pedidas:
b1)
La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

Me piden **$p(X \geq 75)$ =** $1 - p(X \leq 75) = 1 - p\left(Z \leq \frac{75 - 60}{10}\right) = 1 - p(Z \leq 1'5) = 1 - 0'9332$ **= 0'0668**
b2)
El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos.

Sabemos que el número de opositores es el total de opositores por la probabilidad
Me piden **$450\cdot p(X \leq 75)$ =** $450\cdot p\left(Z \leq \frac{75 - 60}{10}\right) = 450\cdot p(Z \leq 1'5) = 450\cdot 0'9332$ **= 419'94, el número de opositores de los 450 que obtuvieron una puntuación menor de 75 fue de 419.**